

Tests des Standardmodells der Teilchenphysik

**Spezialfach
“Experimentelle Methoden der Kern- und
Teilchenphysik”**

WS 2004/04 und SS 2005

PD Dr. Hubert Kroha

Max-Planck-Institut für Physik

Föhringer Ring 6

80805 München

E-mail: kroha@mppmu.mpg.de

URL: http://www.atlas.mppmu.mpg.de/atlas_mdt

Skript

Inhalt

1. Das Standardmodell der Teilchenphysik

- 1.1 Feldtheorien der Elementarteilchen
- 1.2 Eichsymmetrien und Wechselwirkungen
- 1.3 Die fundamentalen Kräfte und ihre Vereinheitlichung:
Quantenelektrodynamik, Quantenchromodynamik und elektroschwache Wechselwirkung
- 1.4 Ursprung der Massen der Elementarteilchen und Higgs-Mechanismus
- 1.5 Grenzen und Erweiterungen des Standardmodells

2. Aktuelle experimentelle Tests des Standardmodells

- 2.1 Präzisionsmessungen der elektroschwachen Wechselwirkung bei den LEP- und Tevatron-Experimenten
- 2.2 B-Mesonphysik und Messung der CP-Verletzung bei B-Mesonfabriken
- 2.3 Neutrinomassen und -oszillationen
- 2.4 Suche nach dem Higgs-Boson
- 2.5 Physik und Experimente beim Large Hadron Collider

3. Suche nach Erweiterungen des Standardmodells

- 3.1 Suche nach neuen Teilchen und Symmetrien
- 3.2 Suche nach Alternativen zum Higgs-Mechanismus des Standardmodells
- 3.3 Suche nach der Supersymmetrie zwischen Fermionen und Bosonen
- 3.4 Suche nach der Dunklen Materie im Universum
- 3.5 Suche nach neuen Phänomenen an hochenergetischen Beschleunigern

Übungen zur Vorlesung

am Max-Planck-Institut nach Vereinbarung

Themen:

1. Grundlagen der relativistischen Feldtheorie
2. Lösungen der Feldgleichungen
3. Symmetrien der Elementarteilchen
4. Anwendungen der Gruppentheorie in der Teilchenphysik
5. Lie-Gruppen
6. Eichsymmetrien
7. Spontane Symmetriebrechung
8. Grundlagen der Störungstheorie und Feynman-Diagramme
9. Berechnung von Wirkungsquerschnitten und Zerfalls
wahrscheinlichkeiten
10. Strahlungskorrekturen fuer Experimentalphysiker
11. Renormierung der Massen und Kopplungskonstanten
12. Tests der Quantenchromodynamik
13. Neutrinooszillationen in Materie
14. Supersymmetrie
15. Modelle der "Grossen Vereinheitlichung"

16. Funktionsweise moderner Teilchendetektoren
17. Datenauswertung in aktuellen Teilchenphysikexperimenten mit
praktischen Demonstrationen
18. Ausgewaehlte Themen nach Wunsch

Literatur

1. B. Povh, K.Rith, Ch. Scholz, F. Zetsche:
Teilchen und Kerne,
Springer, 4. Auflage, 1997.
2. Ch. Berger:
Elementarteilchenphysik,
Springer, 2002.
3. P. Schmüser:
Feynmangraphen und Eichtheorien für Experimentalphysiker,
Springer, 2. Auflage, 1995.
4. I.J.R. Aitchison, A.J.G. Hey:
Gauge Theories in Particle Physics, Vol. 1,
Institute of Physics Publishing, neue Auflage, 2002.
5. W. Greiner, B. Müller:
Quantum Mechanics–Symmetries,
Springer, 2. Auflage, 1994.

1 Das Standardmodell der Teilchenphysik

Teilchen und Wechselwirkungen

Fermionen (Spin 1/2)–Materiebausteine

Leptonen				
	Symbol	Masse	el. Ladung	Entdeckung
1	ν_e	$< 2.2(0.4) \text{ eV}$	0	Cowan, Reines 1956 (inverser β -Zerfall)
	e^-	0.5110 MeV	-1	Kathodenstrahlen vor 1900 (Positron 1932)
2	ν_μ	$< 0.19 \text{ MeV}$	0	Ledermann, Schwartz, Steinberger 1962
	μ^-	105.7 MeV	-1	Kosmische Strahlung 1936
3	ν_τ	$< 18.2 \text{ MeV}$	0	DONUT Experiment (FNAL) 1997-2000
	τ^-	1777 MeV	-1	M. Perl et al. (MARK I Exp.) 1975

- Daß Neutrinos auch eine, wenn auch sehr kleine Masse besitzen, ist seit Sommer 1998 bekannt, als die sog. **Neutrino-Oszillationen** entdeckt wurden.

Quarks				
	Symbol	Masse	el. Ladung	Entdeckung
1	<i>d</i>	$\sim 5 \text{ MeV}$	$-1/3$	~ 1964
	<i>u</i>	$\sim 7 \text{ MeV}$	$+2/3$	~ 1964
2	<i>s</i>	$\sim 150 \text{ MeV}$	$-1/3$	~ 1964
	<i>c</i>	$\sim 1.4 \text{ GeV}$	$+2/3$	Richter et al. (SLAC), Ting et al. (BNL) 1974
3	<i>b</i>	$\sim 4.5 \text{ GeV}$	$-1/3$	Lederman et al. (FNAL) 1977
	<i>t</i>	174 GeV	$+2/3$	CDF-, D0-Experimente (FNAL) 1994

Strangeness-Quantenzahl:

Assoziierte Produktion von Kaonen, 1953.

SU(3)-flavour-Symmetrie: 1961.

Quarkmodell: Gell-Mann, Zweig 1964.

Substruktur der Hadronen (Partonen):

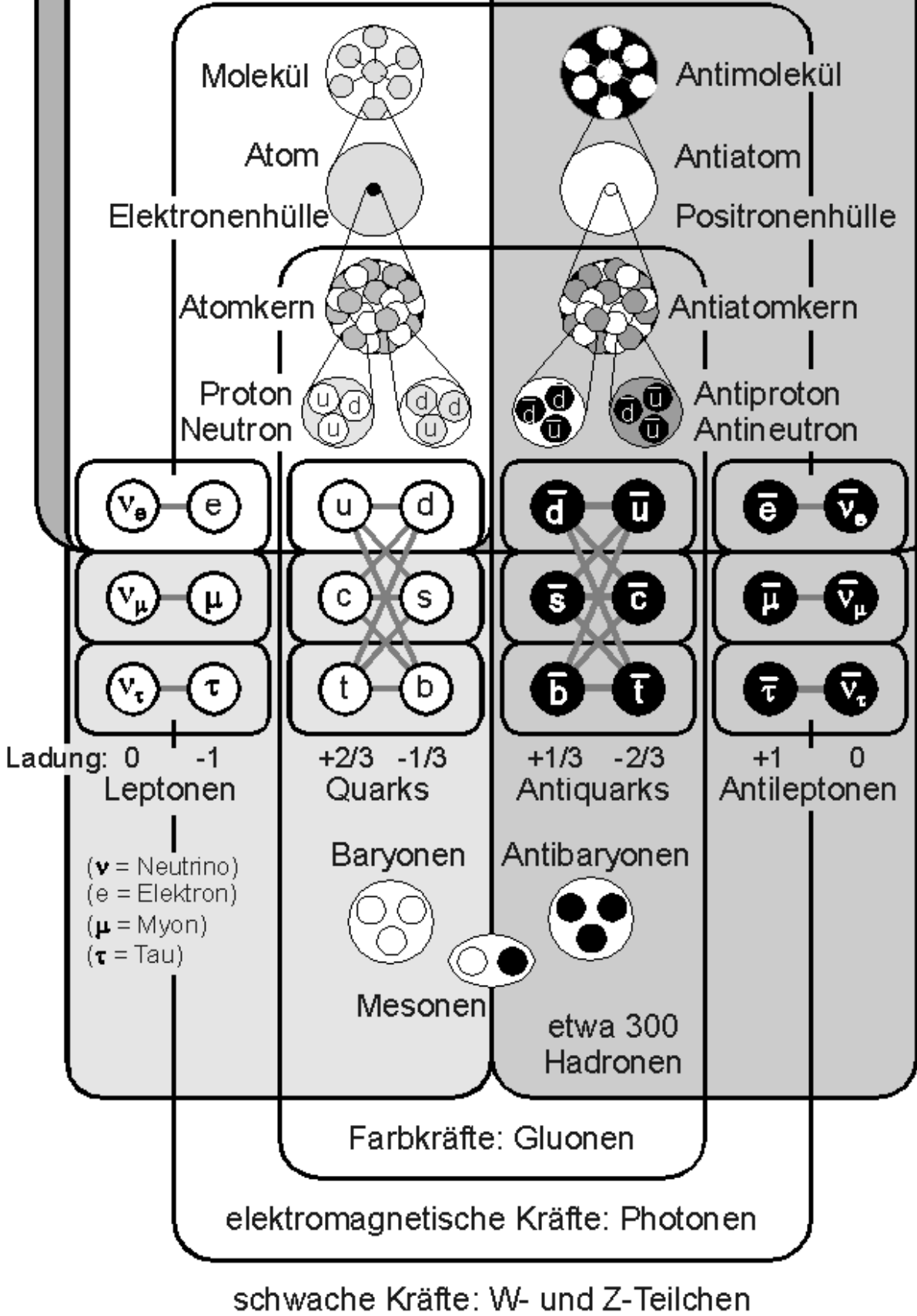
Hofstadter et al., Friedman, Kendall, Turner et al. (SLAC), 1969.

Review of Particle Properties: <http://pdg.lbl.gov>

Stabil

Materie

Antimaterie



Antiteilchen

- Zu jedem Elementarteilchen gibt es das zugehörige **Antiteilchen** mit entgegengesetzten Ladungsquantenzahlen, aber der gleichen Masse und Lebensdauer. Dies gilt aufgrund der **CPT-Symmetrie**, die für alle Teilchen und Wechselwirkungen gilt.

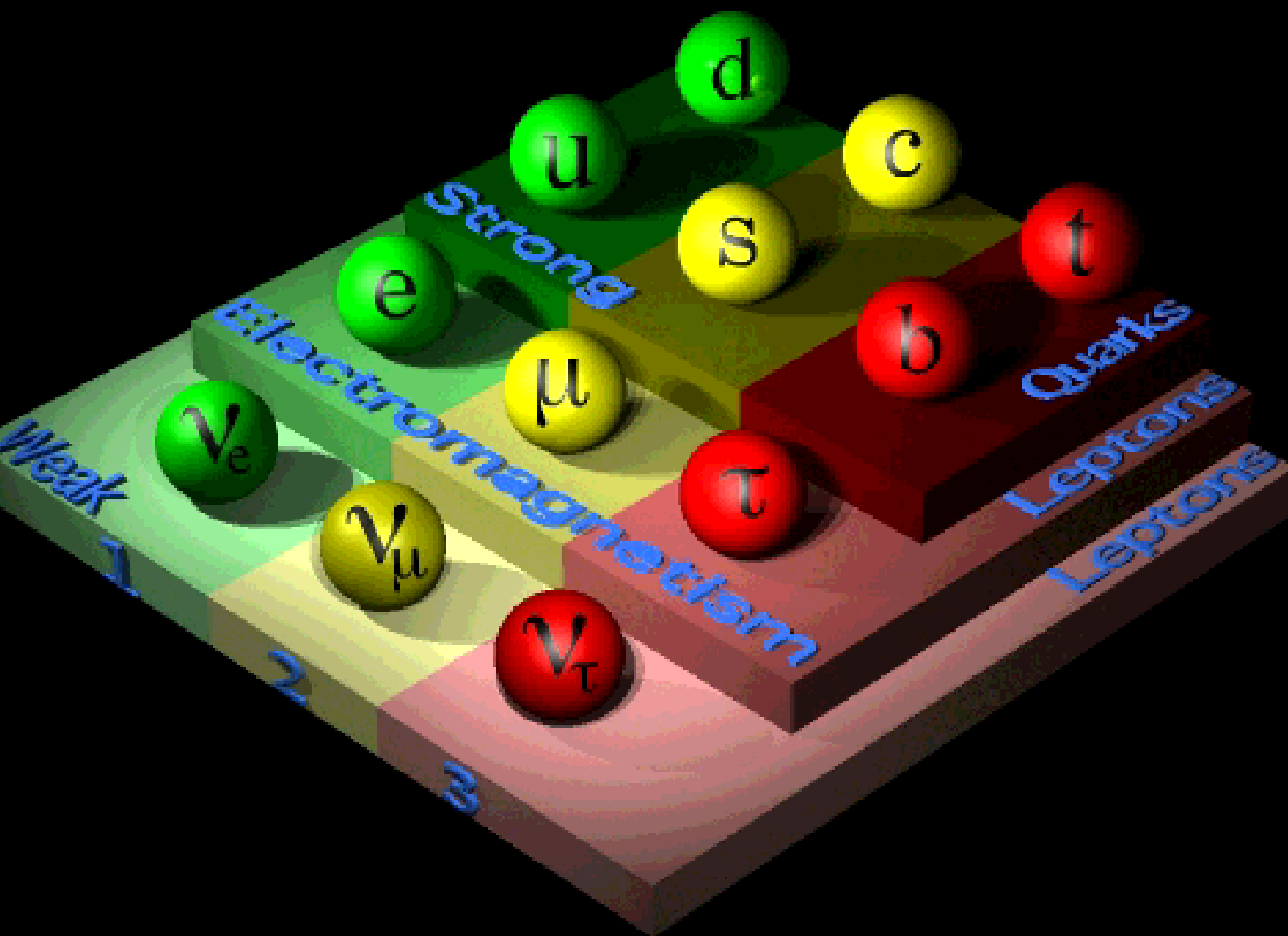
Die elektrisch neutralen Bosonen γ , Z^0 und H sind mit ihren Antiteilchen identisch. Bei den elektrisch neutralen Neutrinos ist noch nicht geklärt, ob sie mit ihren Antiteilchen identisch sind (**Majorana-Neutrinos**). Alle anderen fundamentalen Teilchen besitzen von ihnen verschiedene Antiteilchenzustände.

Damit sich der offensichtliche Überschuß von Materie gegenüber Antimaterie im Weltall bilden konnte, muß u.a. die CP-Symmetrie verletzt sein (s.u.).

Bosonen (Spin 1) – Vermittler der Wechselwirkungen

Kraft	rel. Stärke	wirkt auf	vermittelt durch	Theorie
Starke WW	1	Quarks und Gluonen (mit Farbladungen)	8 Gluonen g (masselos, Spin 1)	Quantenchromodynamik (QCD)
Elektromagnet. WW	10^{-3}	elektrisch geladene Teilchen	Photon γ (masselos, Spin 1)	Quantenelektrodynamik (QED)
Schwache WW	10^{-5}	Quarks, Leptonen (außer ν_R), W^\pm, Z^0	W^+, W^-, Z^0 (massiv, Spin 1)	Quantenflavourdynamik (QFD), GSW-Theorie
Gravitation	10^{-38}	alle Teilchen	Graviton (masselos, Spin 2)	Allgemeine Relativitätstheorie (ART)

Spin 0-Bosonen (Higgsboson) – Vermittler der Teilchenruhemassen



Quantenzahlen der Fermionen

Teilchen	Spin	Elektr. Ladung Q	Schwacher Isospin (I, I_z)	Farbe
ν_{eL}	1/2	0	(1/2, +1/2)	0
$e_{L,R}^-$	1/2	-1	(1/2, -1/2)	0
$\nu_{\mu L}$	1/2	0	(1/2, +1/2)	0
$\mu_{L,R}^-$	1/2	-1	(1/2, -1/2)	0
$\nu_{\tau L}$	1/2	0	(1/2, +1/2)	0
$\tau_{L,R}^-$	1/2	-1	(1/2, -1/2)	0
$u_{L,R}$	1/2	+2/3	(1/2, +1/2)	r, g, b
$d_{L,R}$	1/2	-1/3	(1/2, -1/2)	r, g, b
$c_{L,R}$	1/2	+2/3	(1/2, +1/2)	r, g, b
$s_{L,R}$	1/2	-1/3	(1/2, -1/2)	r, g, b
$t_{L,R}$	1/2	+2/3	(1/2, +1/2)	r, g, b
$b_{L,R}$	1/2	-1/3	(1/2, -1/2)	r, g, b
ν_{eR}	1/2	0	(0,0)	0
$\nu_{\mu R}$	1/2	0	(0,0)	0
$\nu_{\tau R}$	1/2	0	(0,0)	0
γ	1	0	(0, 0)	0
Z^0	1	0	(1, 0)	0
W^-	1	-1	(1, -1)	0
Gluonen	1	0	(0, 0)	$g\bar{r}, r\bar{b}, b\bar{g},$ $r\bar{g}, b\bar{r}, g\bar{b},$ $r\bar{r} - g\bar{g},$ $r\bar{r} + g\bar{g} - 2b\bar{b}$
Higgs H	0	0	(1/2, -1/2)	0

Die elektromagnetische Wechselwirkung

- Die Wechselwirkungen der fundamentalen Teilchen werden durch Austausch von Feldquanten beschrieben nach dem Vorbild der **Quantenelektrodynamik (QED)**, die die Wechselwirkung elektrisch geladener Teilchen mit Photonen beschreibt (quantenmechanische Formulierung der Maxwell Gleichungen der Elektrodynamik).

Die QED wurde in den 30-er Jahren entwickelt. Sie ist die erste und war bis Anfang der 70-er Jahre die einzige konsistente (renormierbare) Quantenfeldtheorie (QFT). Die konsistente **störungstheoretische Berechnung** physikalischer Observabler in der QED wurde erst nach dem 2. Weltkrieg in den 40-er Jahren mit dem **Renormierungsprogramm** verstanden (Feynman, Schwinger, Tomonaga et al. 1949).

Seitdem hat die QED genauere Vorhersagen physikalischer Observabler ermöglicht als jede andere Theorie, z.B. Lamb shift, anomales magnetisches Moment des Elektrons. Die QED ist eine (Abel'sche) Eichfeldtheorie mit der kommutativen lokalen Eichsymmetriegruppe $U(1)$. Das Photon ist masselos aufgrund der Eichsymmetrie.



Feynman



Schwinger



Tomonaga

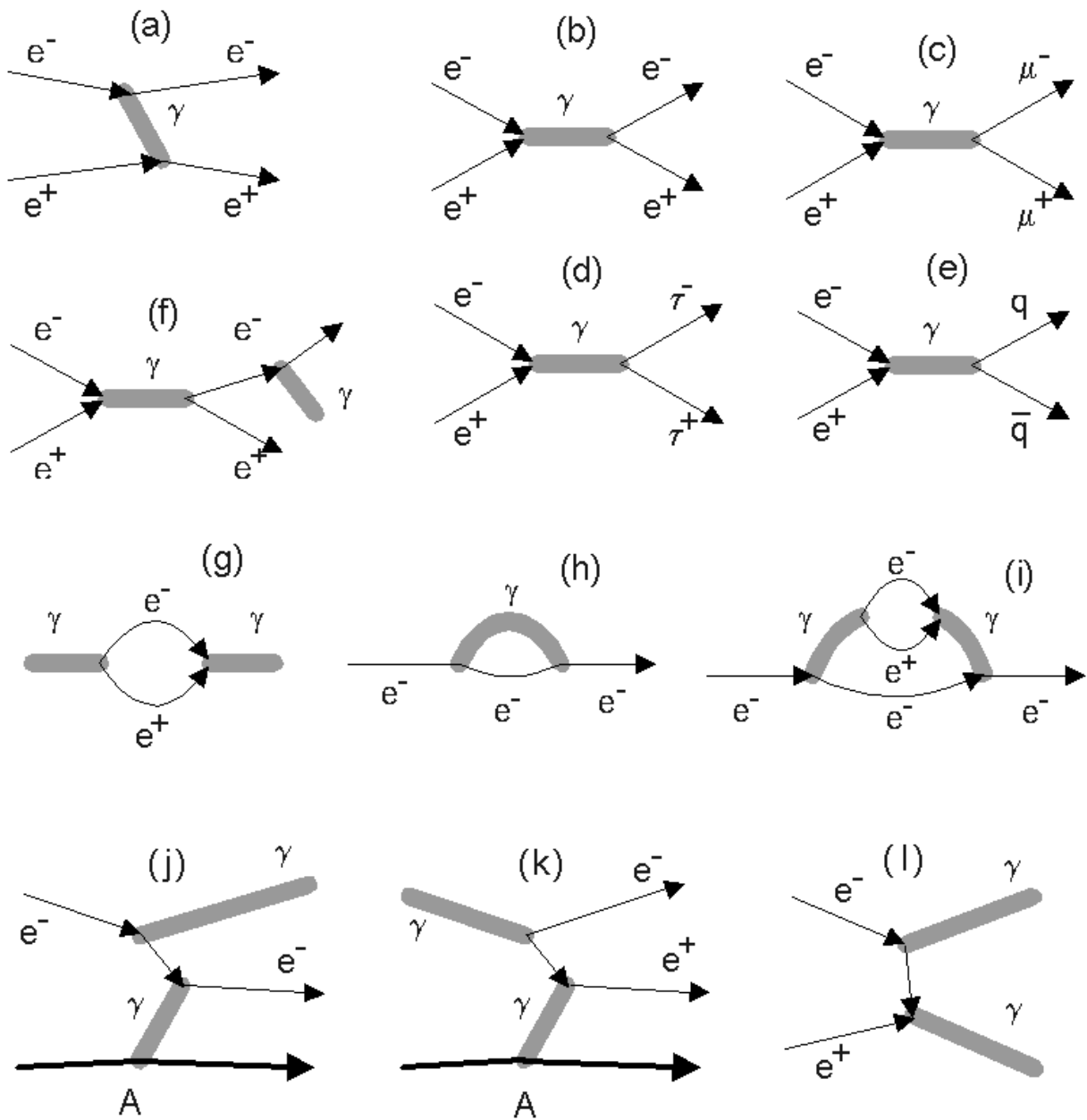
1944-1948

QED

„Quantenelektrodynamik“

Wesentliche Verbesserung der
quantentheoretischen Berechnungen
elektromagnetischer Vorgänge!

(Magnetisches Moment des Elektrons!)



Einige Feynman-Graphen der

QED

Die starke Wechselwirkung

- Die starke Wechselwirkung wirkt auf alle Teilchen mit **Farbladungen**, die 6 Quarks (je 3 Farben) und 8 Gluonen (8 Farbpaare, Farbladungen).

Die **flavour-Symmetrie** $SU(3)_F$ der **Hadronen**, Mesonen (Bosonen) und Baryonen (Fermionen), d.h. nicht Leptonen und Photonen, und ihre Einordnung in Multipletts der $SU(3)_F$ -Symmetriegruppe wurde nach der Entdeckung der **seltsamen Teilchen** ab 1961 als Erweiterung der Isospinsymmetrie erkannt.

Dieses Symmetriekonzept führte zum **Quarkmodell**, das 1964 von Gell-Mann und Zweig vorgeschlagen wurde. Quarks besitzen drittelzahlige elektrische Ladungen und existieren nicht als freie Teilchen.

Die Farbquantenzahlen der Quarks als Ladungen einer (globalen) Eichsymmetriegruppe $SU(3)_C$ wurden 1965 eingeführt, um z.B. die antisymmetrische Wellenfunktion für das Δ^{++} -Baryon mit Spin-Parität $J^P = \frac{3}{2}^+$, $L = 0$ und Quarkzusammensetzung $(u \uparrow u \uparrow u \uparrow)$ zu erklären. Antiquarks tragen Antifarben.

Baryonen (qqq) und **Mesonen** ($q\bar{q}$) sind danach farblose Bindungszustände von Quarks. Die drei verschiedenen Farben ('rot', 'grün', 'blau') und Farben- und Antifarbenpaare kompensieren sich.

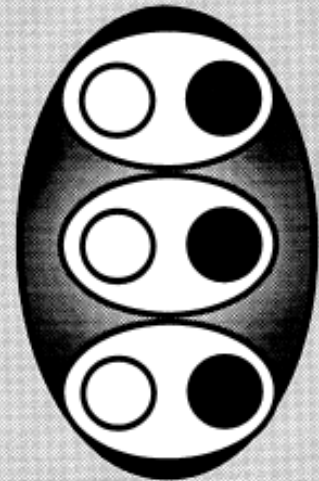
Die drei Farbladungen
ergeben zusammen eine
farbneutrale Verbindung



Die drei Antifarbladungen
ergeben zusammen eine
farbneutrale Verbindung



Farbladungen und ihre
Antifarbladungen neutra-
lisieren sich gegenseitig



Frei erscheinen
in der Natur nur
farbneutrale Teilchen

Die Grundregeln der Farbkombination

Aus: "Neuere Teilchenphysik - einfach dargestellt" von P. Waloschek, 4. Auflage, Dez. 1991, © Aulis Deubner

Die Farbladungen sind der Ursprung der starken Kraft zwischen Quarks. Die starke Wechselwirkung zwischen Hadronen, einschließlich der Kernkräfte, sind eine Restwechselwirkung der Quarkbindungskräfte (wie die van der Waals-Kräfte zwischen Molekülen).

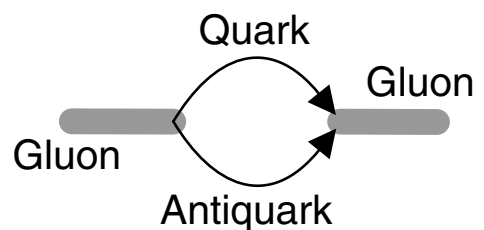
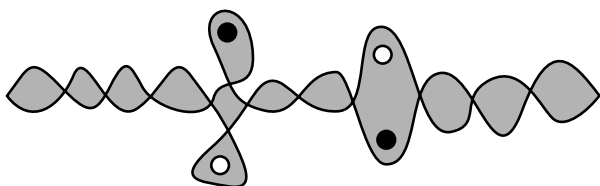
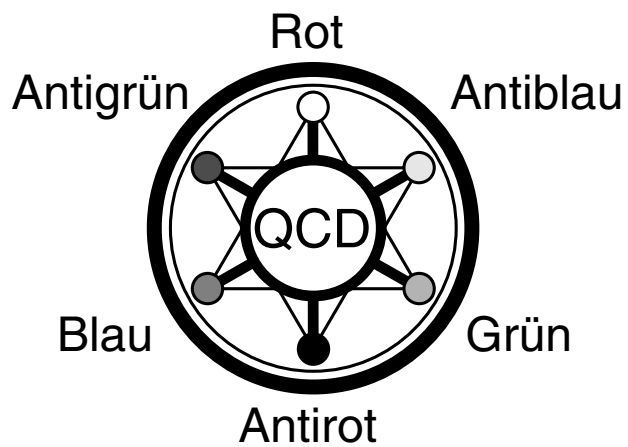
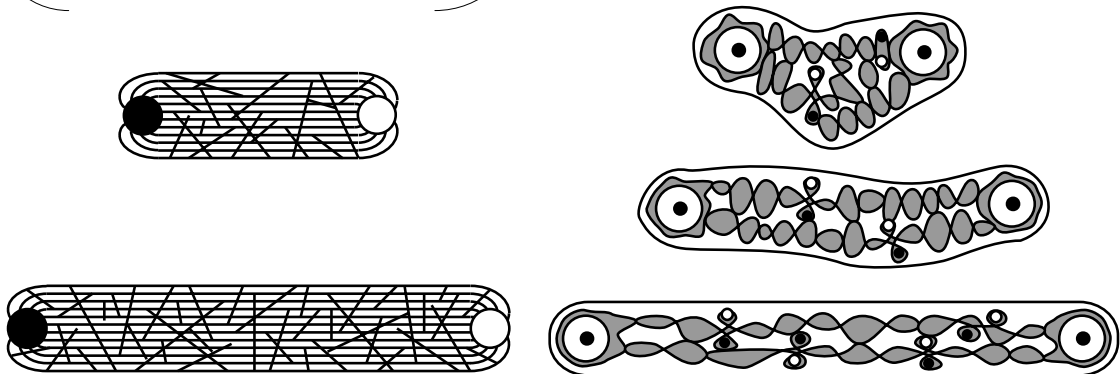
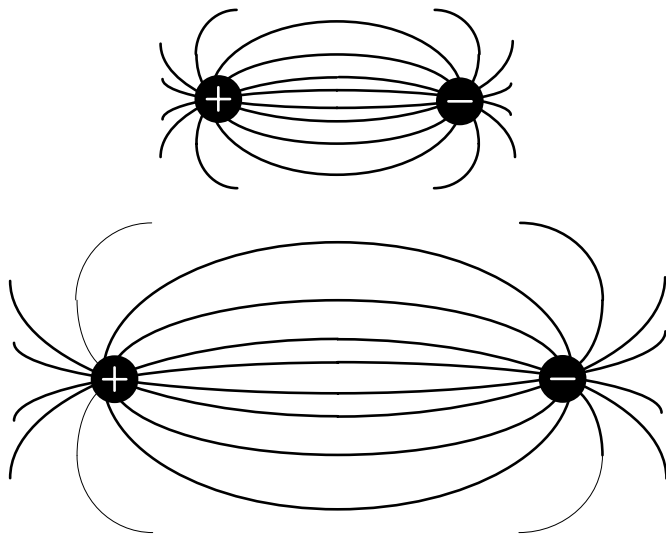
Eine Eichfeldtheorie der starken Farbwechselwirkung mit **lokaler Eichsymmetrie $SU(3)_C$** wurde ab 1973 formuliert (M. Gell-Mann, H. Fritsch u.a.), die **Quantenchromodynamik (QCD)** nach dem Vorbild der QED und der elektroschwachen Wechselwirkung.

Zum ersten Mal existiert eine renormierbare Theorie der starken Wechselwirkung. Die Austauschteilchen, **8 masselose Gluonen**, werden durch die Eichsymmetrie festgelegt und besitzen ebenfalls Farbladungen, so daß sie stark wechselwirken und nicht als freie Teilchen vorkommen.

Glukonen und Farbkräfte

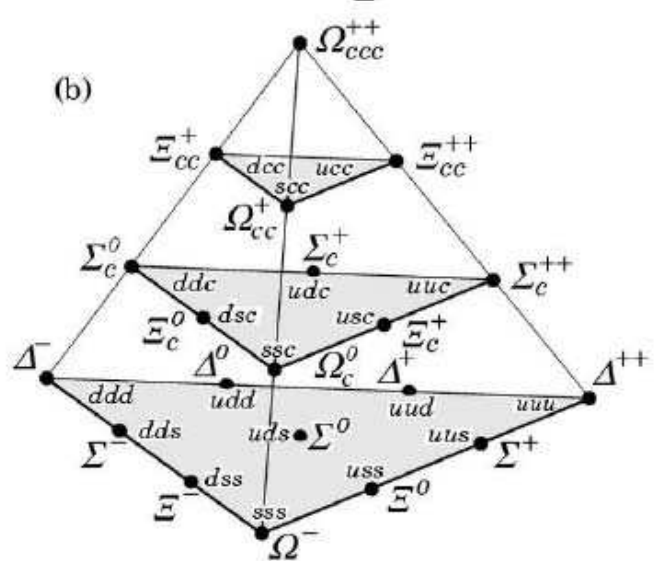
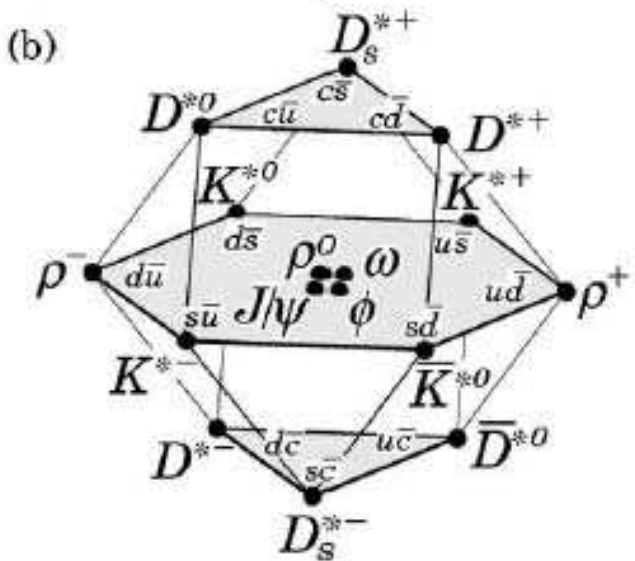
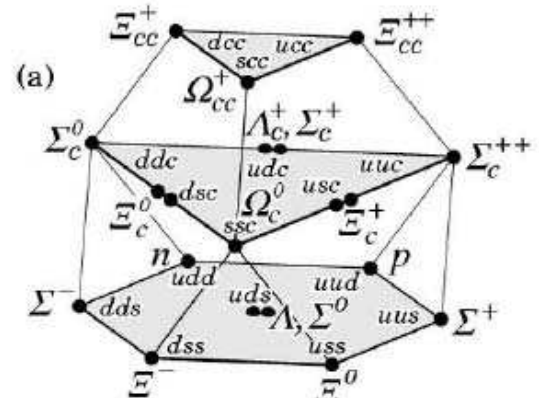
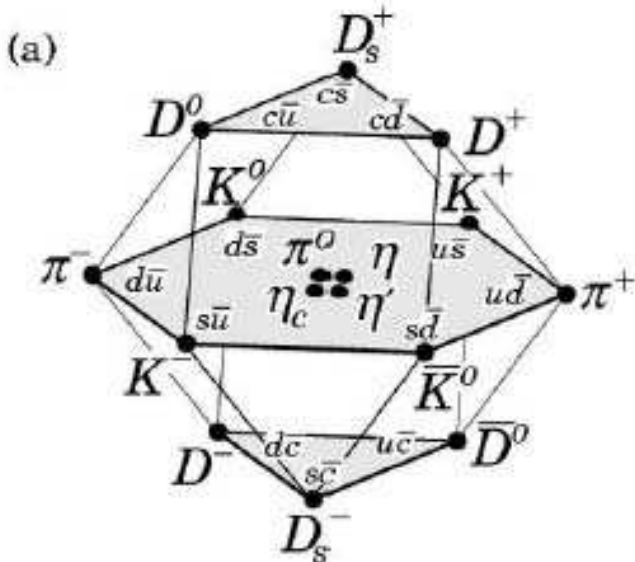
QCD

Quanten-Chromodynamik



Mesonen und Baryonen

Quark-Bindungs Zustände in Flavour-Multiplets

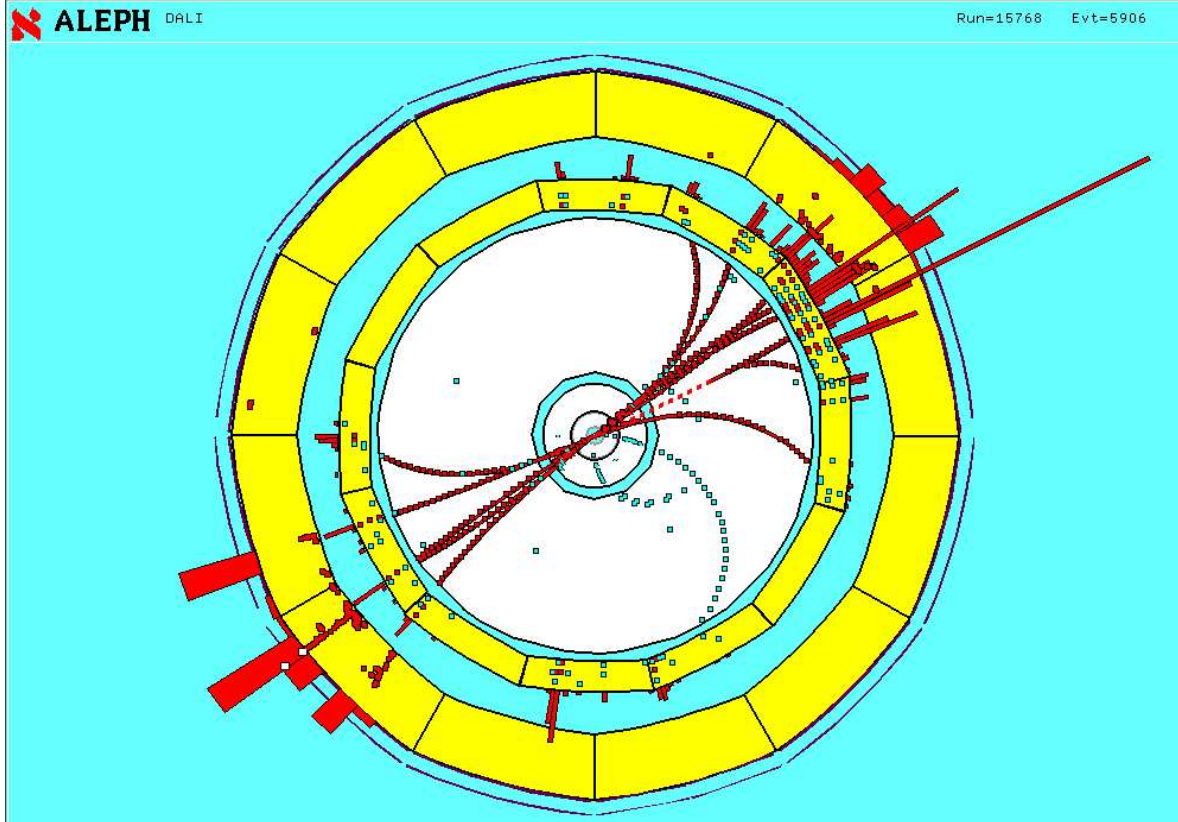


Die Selbstwechselwirkung der Gluonen führt zur unauflösbaren Bindung der farbgeladenen Teilchen in den Hadronen (**Confinement**). Innerhalb der Hadronen bewegen sich die Quarks und Gluonen wie freie Teilchen (**Asymptotische Freiheit**, störungstheoretisch berechenbar).

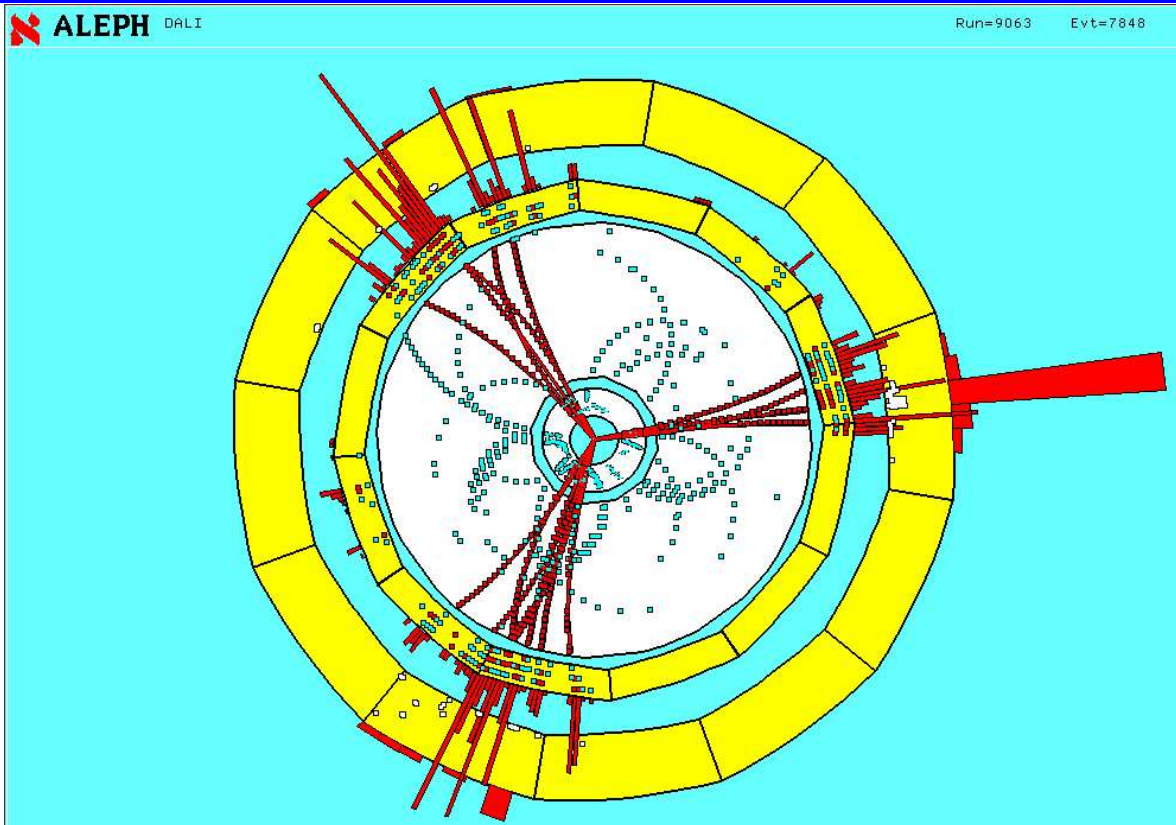
Beim Versuch die Bindung aufzubrechen (in Streuexperimenten bei hohen Teilchenenergien), entstehen neue Quark-Antiquarkpaare, die in Hadronen gebunden werden (**Fragmentation**). Dabei entstehen gebündelte sog. **Hadronjets**, die experimentell nachgewiesen wurden (erstmalig am e^+e^- -Speicherring SPEAR am SLAC 1975).

Auch hochenergetische Gluonen, die von Quarks abgestrahlt werden, fragmentieren in Hadronjets. Die **Gluonjets** wurden erstmalig 1979 am e^+e^- -Speicherring PETRA am DESY nachgewiesen. Quark- und Gluonjets werden heute in großer Zahl und eindeutig in den Hochenergiebeschleunigern LEP (e^+e^-) und TEVATRON ($p\bar{p}$) erzeugt.

$$e^+e^- \longrightarrow q\bar{q} \longrightarrow (\text{Hadronen})(\text{Hadronen})$$



$$e^+e^- \longrightarrow q\bar{q}\text{Gluon} \longrightarrow (\text{Hadr.})(\text{Hadr.})(\text{Hadr.})$$



Die schwache Wechselwirkung

- Eine Theorie der **schwachen Wechselwirkung** wurde zuerst von E. Fermi 1933 in Form einer 4-Fermion-Punktwechselwirkung zur Beschreibung des radioaktiven β -Zerfalls formuliert. Vorbild war die QED. Die schwache Wechselwirkung legt die Ordnung der Leptonen und Quarks in Paaren in jeder Generation nahe, zwischen denen die (geladenen) schwachen Übergänge stattfinden (Universalität der schwachen Wechselwirkung).

Falls Austauscheteilchen der schwachen Wechselwirkung, wie das Photon der QED, existierten (Schwinger, Sudarshan, Marshak, Gell-Mann, Feynman 1957), mußten sie wegen der kurzen Reichweite der schwachen Wechselwirkung (begrenzt auf den Atomkern) sehr schwer sein (bis 1965 Masse > 2 GeV), nach der Unschärferelation:

$$\Delta r = \Delta t \leq \frac{\hbar}{\Delta E} \leq \frac{\hbar}{M}.$$

Die erwarteten **schweren, geladenen Austauscheteilchen W^+ und W^-** wurden 1983 durch die Experimente UA1 und UA2 am 270 GeV $p\bar{p}$ -Speicherring SPS am CERN (C. Rubbia, S. van der Meer) entdeckt:

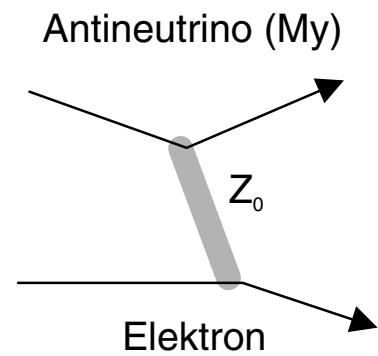
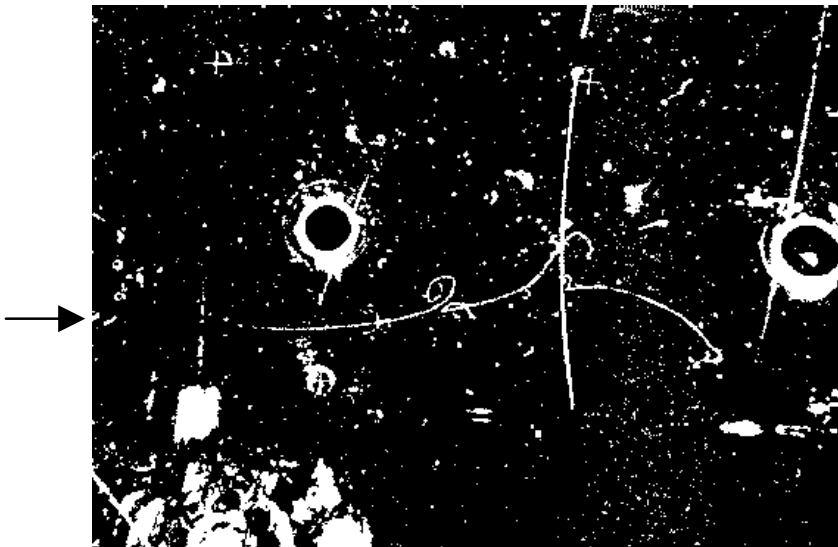
$$\begin{aligned}M_W &= 80.419 \pm 0.056 \text{ GeV}, \\M_Z &= 91.1882 \pm 0.0022 \text{ GeV}.\end{aligned}$$

(aktuelle Präzisionsmessungen am e^+e^- -Speicherring LEP am CERN und am $p\bar{p}$ -Speicherring TEVATRON am Fermi National Laboratory, FNAL).

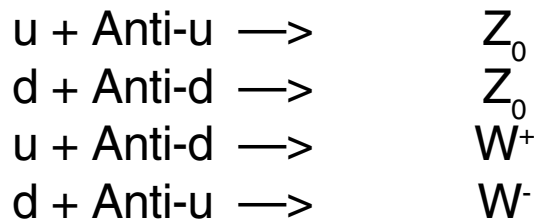
Das **neutrale Z^0 -Boson** vermittelt die schwache sog. **neutrale Stromwechselwirkung** (im Gegensatz zu den geladenen Strömen beim β -Zerfall), die 1973 bei Neutrino-Streuung in einer Blaskammer am CERN entdeckt wurde.

Eine konsistente Feldtheorie mit schweren Feldquanten mit Spin 1 (Vektormesonen) existierte nicht bis zur Einführung der **Vereinheitlichten Theorie der elektromagnetischen und schwachen Wechselwirkung** 1967/68 durch S. Glashow, A. Salam und S. Weinberg. Dabei handelt es sich um eine **lokale Eichfeldtheorie** nach dem Muster der QED mit der Eichsymmetriegruppe $SU(2)_W \times U(1)$.

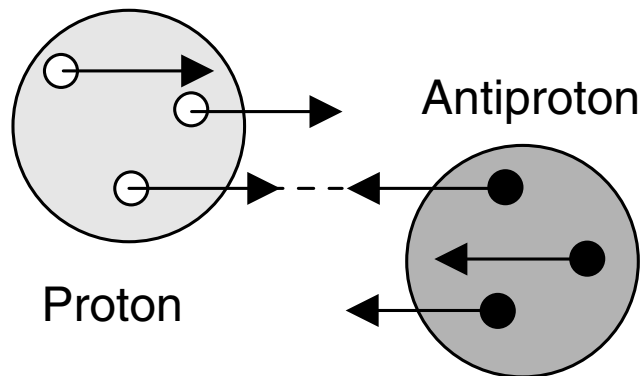
Die Träger der schwachen Kräfte



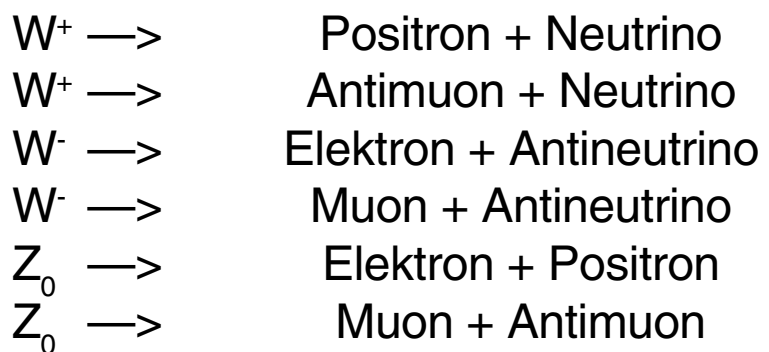
1973



Rubbia



1983





Glashow



Salam



Weinberg

GSW

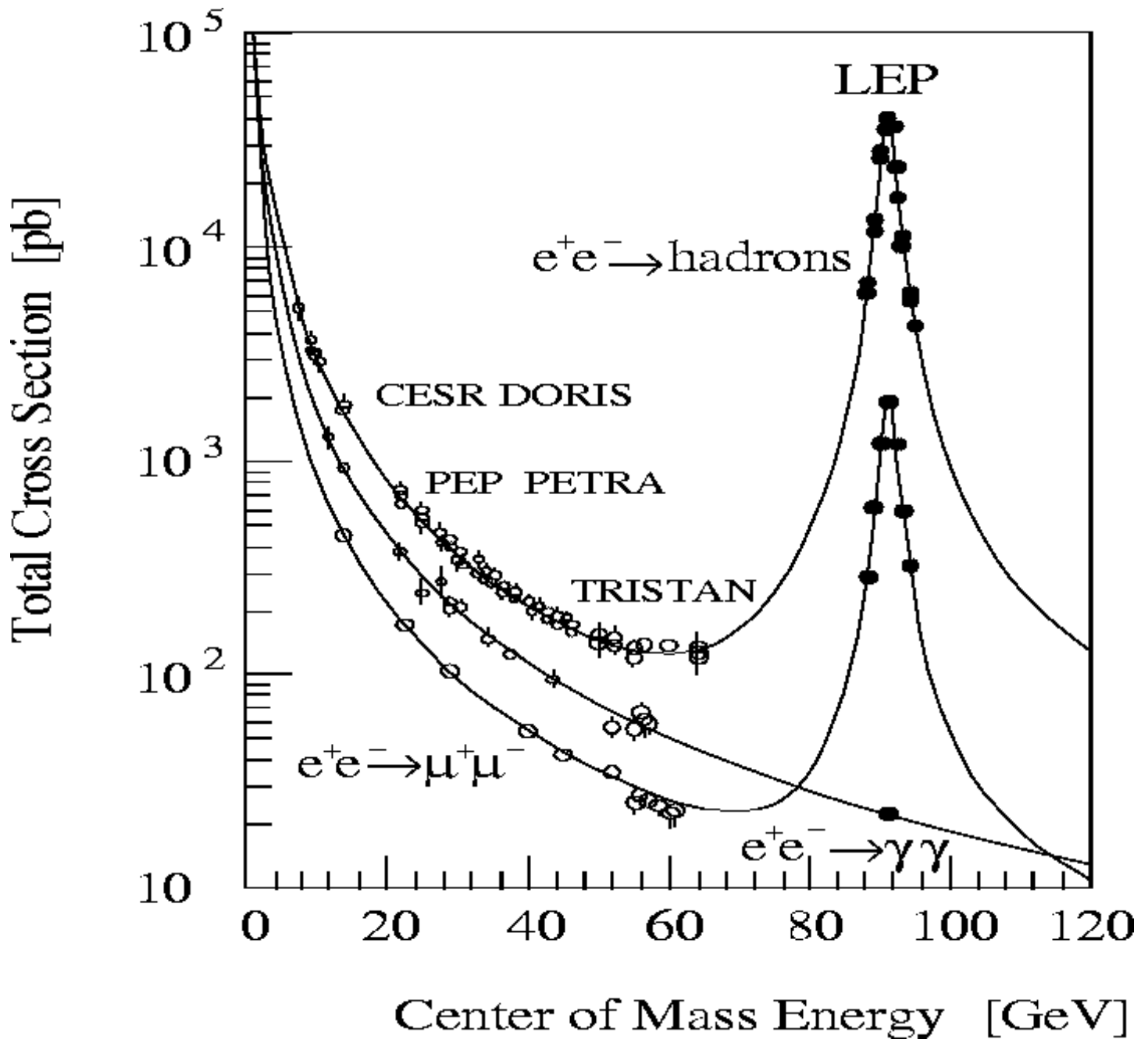
1967-1968: Theorie der
elektroschwachen Kräfte

El.-magn. Kraft: **Photon** ($m = 0$)
Schwache Kraft: **W-Plus-Teilchen**
W-Minus-Teilchen
neu dazu: Z-Null-Teilchen (???)
W und Z sind schwerer als Eisenkerne!

Bem.: Einige besondere Regeln:
Leptonenzahlerhaltung!
Generationswechsel nur mit W!

Hadronischer Wirkungsquerschnitt in der e^+e^- -Vernichtung als Funktion der Schwerpunktsenergie

Z^0 -Erzeugung bei LEP

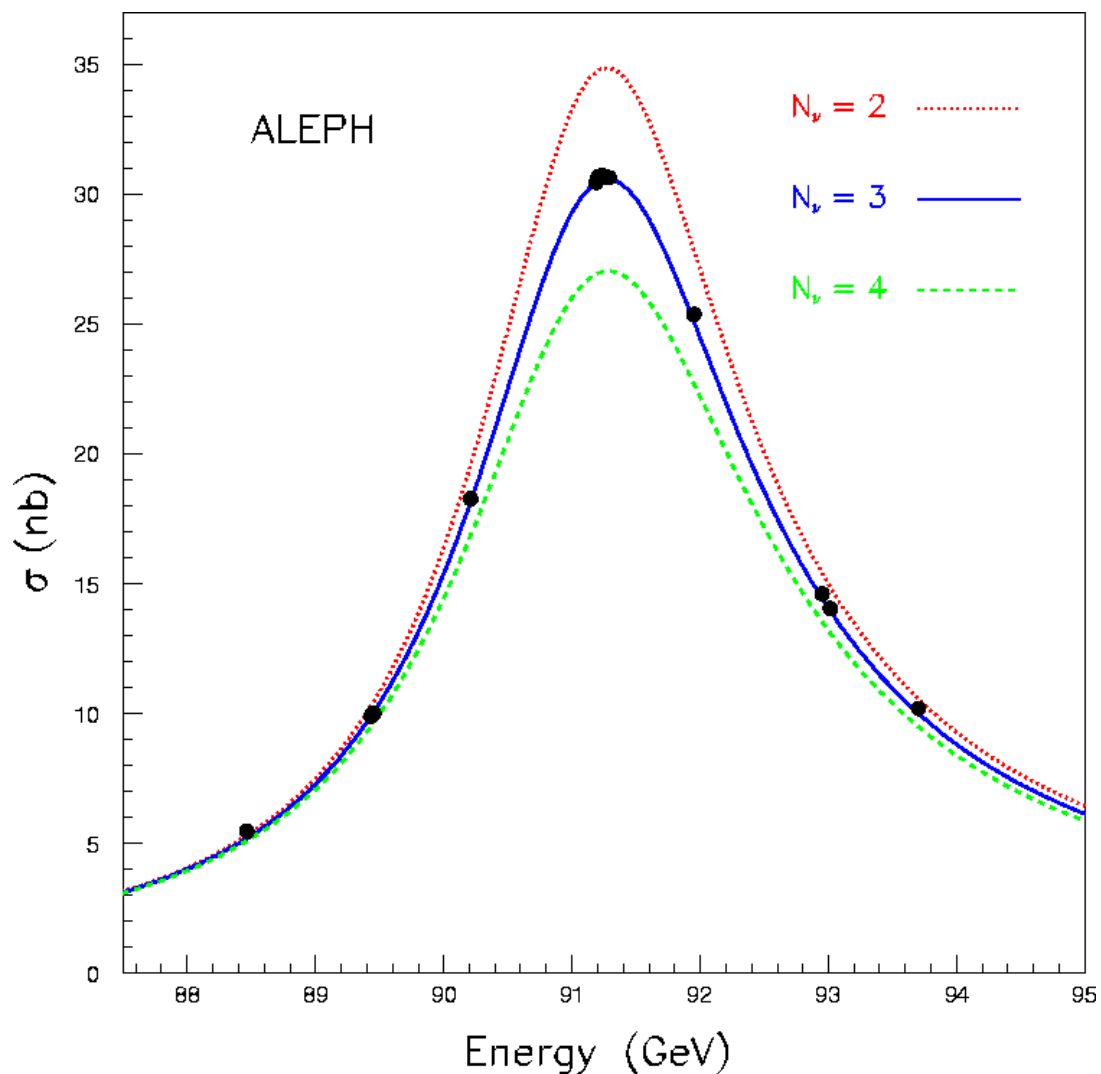


Zahl der Quark-Lepton-Generationen

Kurz nach Inbetriebnahme der Experimente am e^+e^- -Speicherring LEP am CERN 1989 (Schwerpunktenergie bei der Z^0 -Resonanz) wurde die Zahl der leichten Neutrinos, in die das Z^0 -Boson zerfällt, präzise gemessen (gleichzeitig am e^+e^- -Collider SLC am SLAC):

$$N_\nu = 2.984 \pm 0.008.$$

Z^0 -Resonanzkurve im e^+e^- -Reaktionsquerschnitt gemessen mit dem **ALEPH-Detektor** bei LEP:



Aufgrund der Häufigkeit der leichten Elemente, Helium und vor allem Deuterium, die durch Nukleosynthese im Anfangsstadium des Universums erzeugt wurden, werden ebenfalls **3 Generationen von leichten Neutrinos** und damit **3 Generationen von Quarks und Leptonen** vorhergesagt (etwa gleichzeitig mit den LEP-Messungen waren 4 Generationen ausgeschlossen unter Benutzung des kosmologischen Standardmodells).

Teilchenmassen und die schwache Wechselwirkung

- Massen der Fermionen und Eichbosonen konnten eichinvariant nur durch den sog. **Higgs-Mechanismus** mit **spontaner Eichsymmetriebrechung** eingeführt werden. Die **GSW-Theorie** sagt das Z^0 -Eichboson und das **neutrale Higgsboson H** mit Spin 0 voraus.

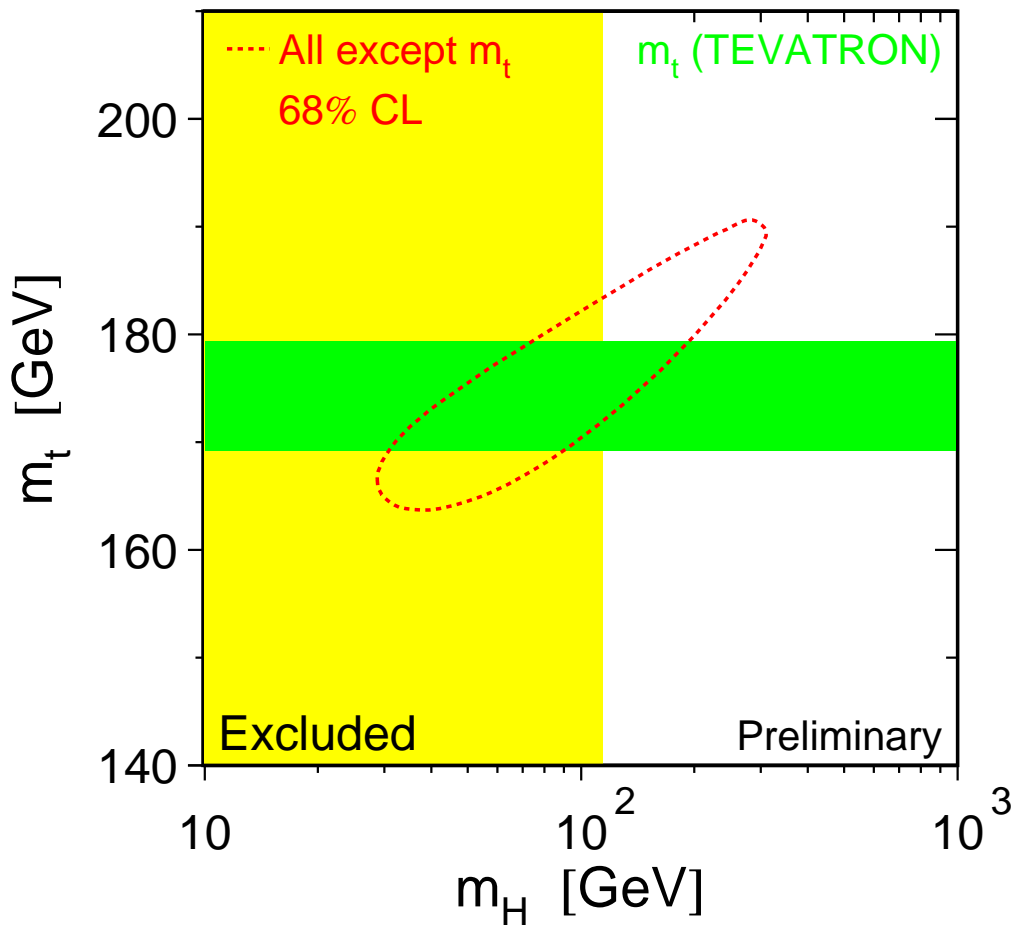
Das Higgsboson ist das einzige Teilchen der Theorie, das noch nicht direkt nachgewiesen werden konnte, da seine Masse größer ist als 114 GeV. Erste schwache Anzeichen für sein Auftreten mit einer Masse von 115 GeV wurden möglicherweise im Jahr 2000 am e^+e^- -Speicherring LEP am CERN kurz vor seiner Stilllegung gefunden. Die experimentellen Daten zur schwachen Wechselwirkung, vor allem vom LEP-Speicherring am CERN, verlangen eine Higgsbosonmasse kleiner als 193 GeV.

1971 wurde von G. t'Hooft und M. Veltman gezeigt, daß die GSW-Theorie wie die QED renormierbar, d.h. störungstheoretisch berechenbar ist. Vollständig (d.h. ohne sog. Anomalien bei der Quantisierung) ist dies nur möglich, wenn es zu jedem Leptonpaar in jeder Generation ein Quarkpaar in jeweils 3 Farben gibt.

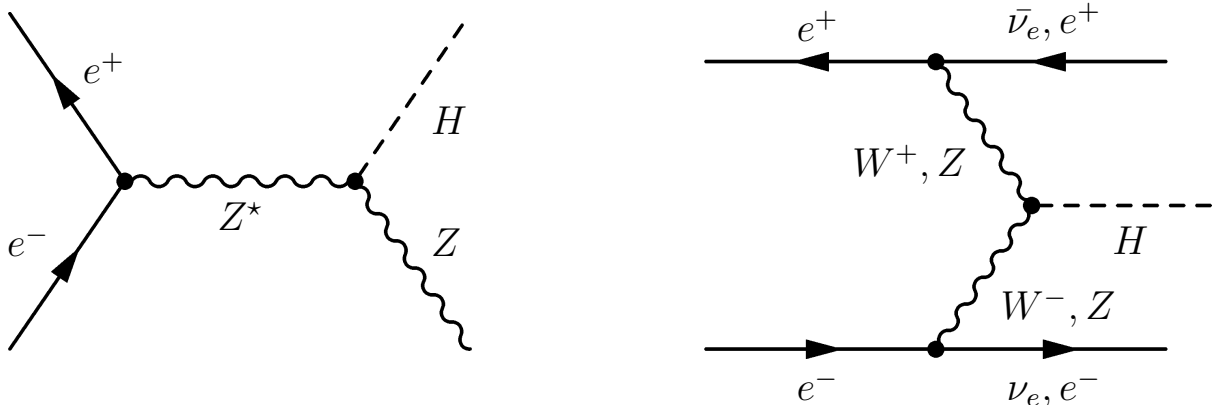
Lokale Eichfeldtheorien mit oder ohne spontane Symmetriebrechung sind renormierbar durch Aufhebung von Divergenzen in höherer Ordnung der Störungstheorie aufgrund der Eichsymmetrie. **Nicht-Abelsche Eichtheorien** (Yang-Mills-Theorien) mit nicht-kommutativer Eichsymmetriegruppe wurden 1954 durch Yang und Mills eingeführt.

Der Higgs-Mechanismus der spontanen Eichsymmetriebrechung zur Erzeugung der Teilchenmassen in Eichfeldtheorien wurde 1964 durch P. Higgs, F. Englert, R. Brout vorgeschlagen.

Die Präzisionsdaten zur Elektroschwachen Wechselwirkung, vor allem von LEP, sagen eine **Higgsmasse von $< 250 \text{ GeV}$** vorher.

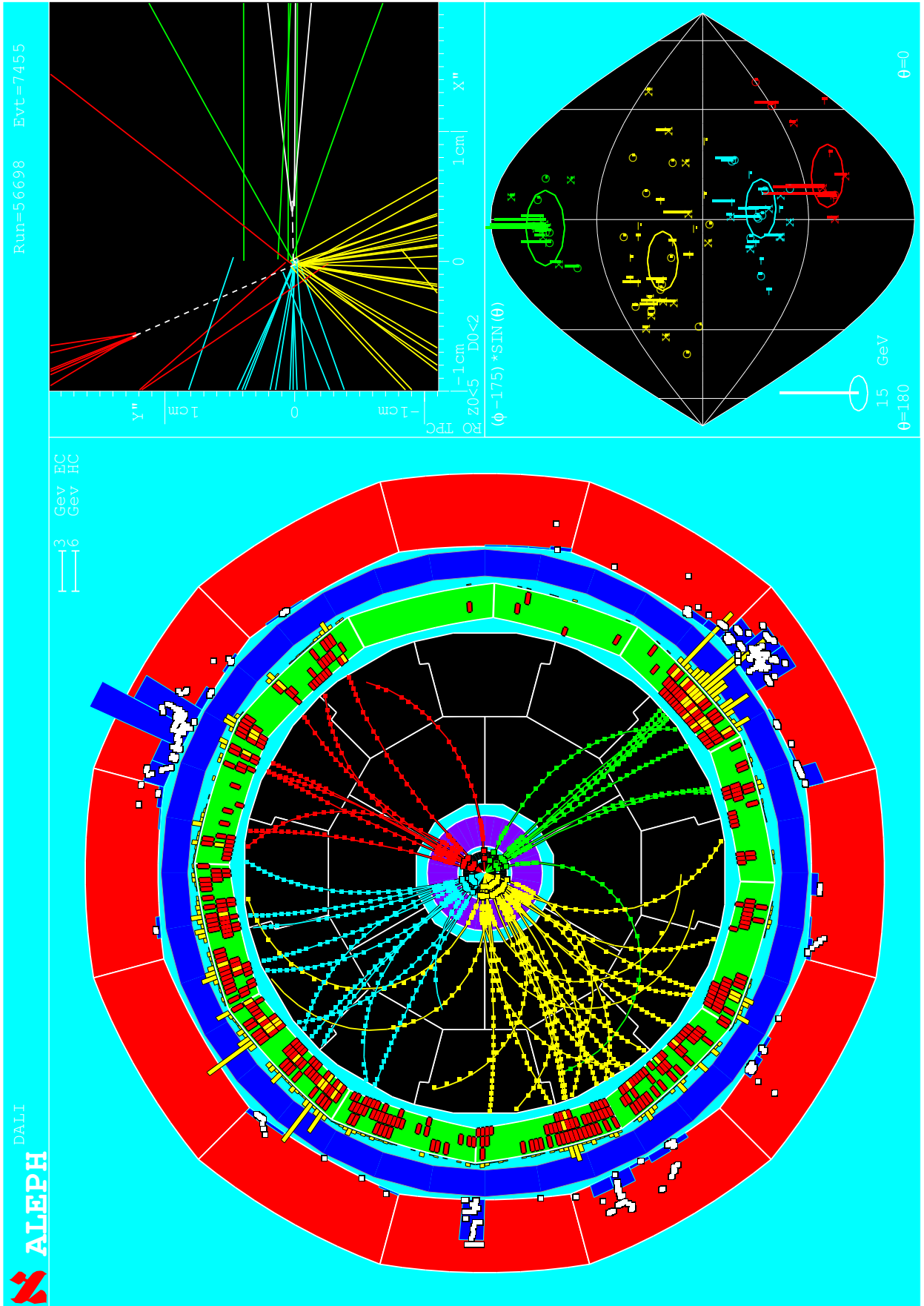


Die direkte Suche nach dem Higgsboson bei LEP schließt Higgsmassen von **$< 114.4 \text{ GeV}$** aus:

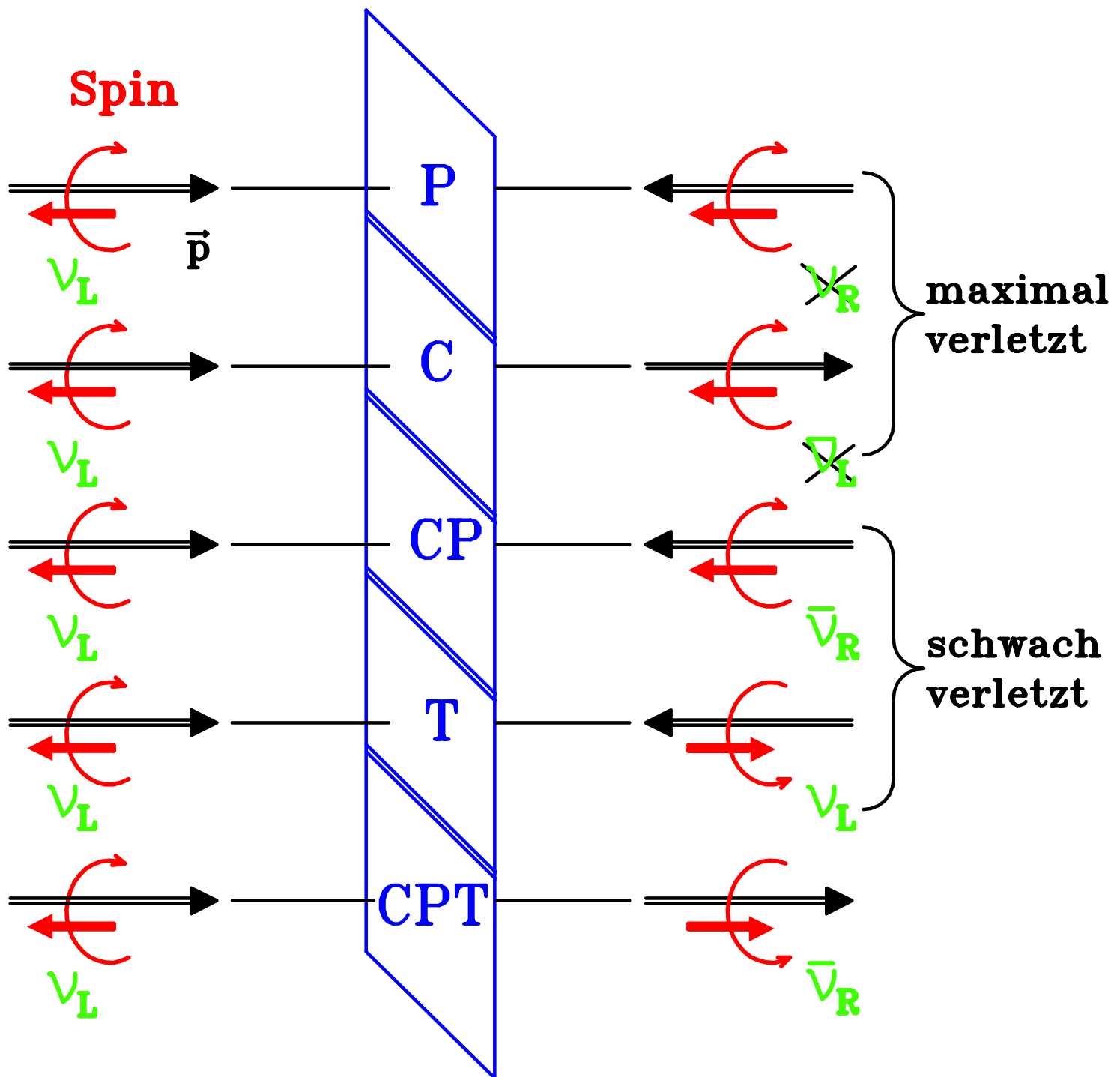


Higgs-Ereignisse im ALEPH-Detektor

$$e^+e^- \longrightarrow Z^0 \text{ Higgs} \longrightarrow (b\bar{b})(b\bar{b}) \longrightarrow (\text{Hadr.})(\text{Hadr.})$$



Diskrete Symmetrien der Teilchen



Symmetrieverletzungen durch die schwache Wechselwirkung

- Durch die schwache Wechselwirkung werden die **Paritätssymmetrie P** (Lee, Yang 1956, Wu 1957) und die **Ladungskonjugationssymmetrie C** maximal verletzt ($V - A$ -Theorie der schwachen Wechselwirkung von Sudarshan, Marshak, Gell-Mann, Feynman 1957; nur linkshändige Neutrinos an der schwachen Wechselwirkung beteiligt).

1964 wurde auch eine leichte **Verletzung der CP-Symmetrie** und damit der **Zeitumkehrinvarianz** in schwachen K^0 -Zerfällen beobachtet (Cronin, Fitch, Turlay et al.).

Der Nachweis, daß dafür die schwache Wechselwirkung und nicht eine neue superschwache Wechselwirkung verantwortlich ist, gelang erst endgültig 1999 am CERN und FNAL. Danach liegt der Ursprung der CP-Verletzung bei der schwachen Wechselwirkung in den Details der Wechselwirkung des Higgsbosons mit der Materie.

Vereinheitlichung der Wechselwirkungen ?

- Nach der Einführung der GSW-Theorie und der QCD lassen sich alle fundamentalen Kräfte durch renormierbare lokale Eichfeldtheorien beschreiben, dem **Standardmodell** der Teilchenphysik. Keine physikalische Theorie wurde genauer überprüft als das Standardmodell. Bisher wurden keine Abweichungen gefunden.

Sofort nach der Entdeckung der QCD wurden Vereinheitlichungen der drei Kräfte in einer übergeordneten größeren Eichsymmetriegruppe vorgeschlagen, z.B. $SU(5)$, $SO(10)$, etc. Die minimale einbettende Gruppe des Standardmodells ist $SU(5)$. Diese sog. **Grand Unified Theories (GUT)** sagen zusätzliche, sehr schwere Eichbosonen mit sowohl elektroschwachen als auch Farbladungen voraus. Die neuen Wechselwirkungen führen u.a. zum Zerfall des Protons, der bisher nicht experimentell gefunden wurde, was die möglichen Theorien einschränkt.

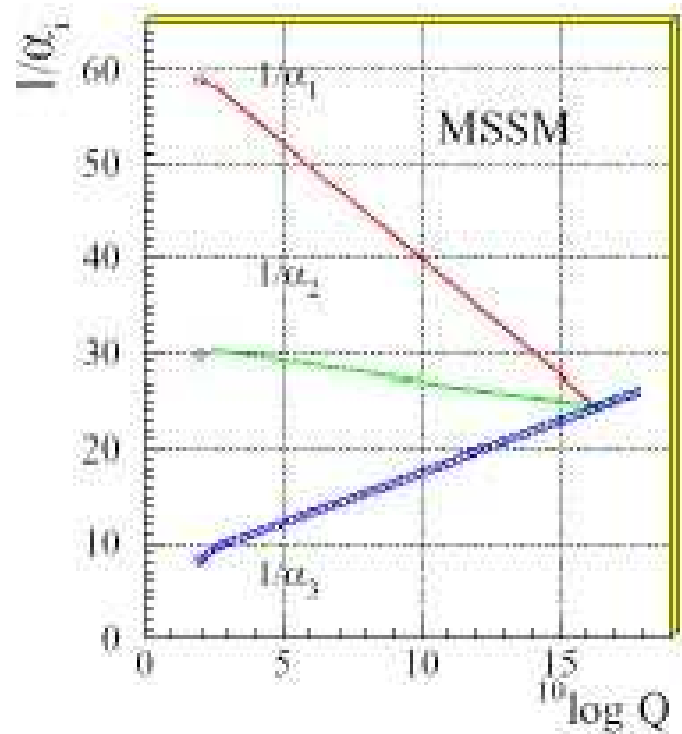
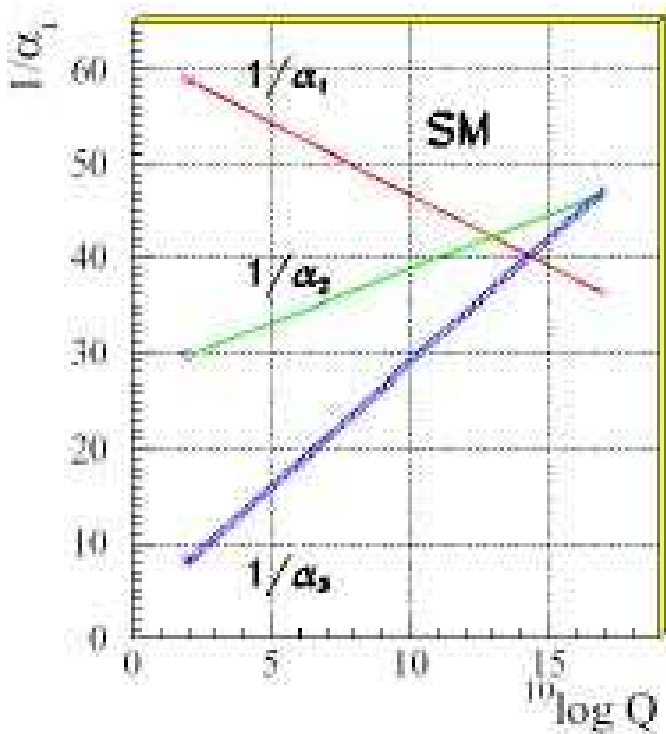
Die GUT-Eichsymmetrien müssen bei den Energien heutiger Beschleuniger spontan gebrochen sein nach dem Vorbild des Higgs-Mechanismus' des Standardmodells. Sie sind nur bei den hohen Teilchenenergien ($> 10^{15}$ GeV) in der heißen **Frühzeit des Universums** kurz nach dem Urknall realisiert und werden in einer Reihe von **Phasenübergängen** bei der Expansion und dem Abkühlen des Universums spontan gebrochen.

Eigenschaften der fundamentalen Wechselwirkungen

Wechselwirkungen	Theorie	Eichsymmetriegruppe	Eichbosonen (Vermittler)	erhaltene Ladungen	Entdeckung
Elektromagnetische	QED	$U(1)$	Photon (γ)	elektrische Ladung	Maxwell: 1864 Einstein: 1905 QFT: ab 1930
Elektroschwache	QFD (GSW)	$SU(2) \times U(1)$	W^\pm, Z^0, γ	schwacher Isospin (3 Ladungen), el. Ladung	GSW: 1968
Starke	QCD	$SU(3)$	8 Gluonen (g_i)	8 Farbladungen	1973
Vereinheitlichte WW	GUT	$SU(5), SO(10), \dots$	zusätzliche Eichbosonen	zusätzliche Ladungen	ab 1973
Gravitation	ART	lokale Koordinatentransf.	Graviton	Masse, Energie	Einstein: 1915

Alle Theorien sind lorentzinvariant (relativistische Feldtheorien).

Gleiche Stärke der elektromagnetischen, schwachen und starken Kraft bei $E \approx 10^{15}$ GeV.



Die GUT-Theorien vereinheitlichen auch Quarks und Leptonen in den Multipletts der übergeordneten Eichsymmetrie. Damit wird die Kombination der Quarks und Leptonen pro Familie und die Quantisierung der elektrischen Ladung erklärt. Die vereinheitlichte Kraft wirkt gleich auf Quarks und Leptonen und kann sie daher ineinander umwandeln.

Die **Gravitationswechselwirkung** wird ebenfalls durch eine Eichfeldtheorie, die **Allgemeine Relativitätstheorie** (Einstein 1915), beschrieben. Bisher konnte allerdings keine konsistente (renormierbare) **Quantengravitationstheorie** gefunden werden.

Die Gravitationskraft wird erst stark bei großen Massenansammlungen (siehe schwarze Löcher) und ist verantwortlich für die Entwicklung des Universums. Für die Elementarteilchen spielt die Gravitation erst eine Rolle bei den höchsten Energien, der Planckenergie (10^{19} GeV), bzw. den kleinsten möglichen Abständen, der Planck-Länge (10^{-33} cm), bevor die Gravitation und die Raum-Zeit quantisiert werden müssen.

Im Rahmen der **Superstringtheorie** kann möglicherweise eine Quantentheorie der Gravitation und eine Vereinheitlichung mit den übrigen Wechselwirkungen gefunden werden.

Vereinheitlichung von Materieteilchen und Wechselwirkungen ?

- Fermionen und Bosonen werden durch die sog. **Supersymmetrie (SUSY)** miteinander verknüpft, die eine Erweiterung der Symmetrien der Raum-Zeit, der **Lorentzinvarianz**, darstellt (seit 1974).

Damit sind Materiebausteine (Spin $1/2$), Austauscheteilchen (Spin 1) und Higgsteilchen (Spin 0) durch ein Symmetrieprinzip verbunden.

Zu jedem bekannten Teilchen gäbe es einen wesentlich schwereren “supersymmetrischen” Partner (Schattenwelt der “Dunklen Materie”).

Bei derzeit erreichbaren Beschleunigerenergien müßte die Supersymmetrie (spontan ?) gebrochen sein, da keine supersymmetrischen Partnerteilchen mit gleichen Massen beobachtet werden.

Die **supersymmetrischen Partner** der bisher gefundenen, relativ leichten Elementarteilchen besitzen deutlich größere Massen zwischen 100 GeV und 1000 GeV. Dazu gehören auch weitere Higgs-Teilchen. Die SUSY-Teilchen sollen beim nächsten großen *pp*-Speicherring am CERN, dem **Large Hadron Collider (LHC)** gefunden werden, der zur Zeit im LEP-Tunnel gebaut wird.

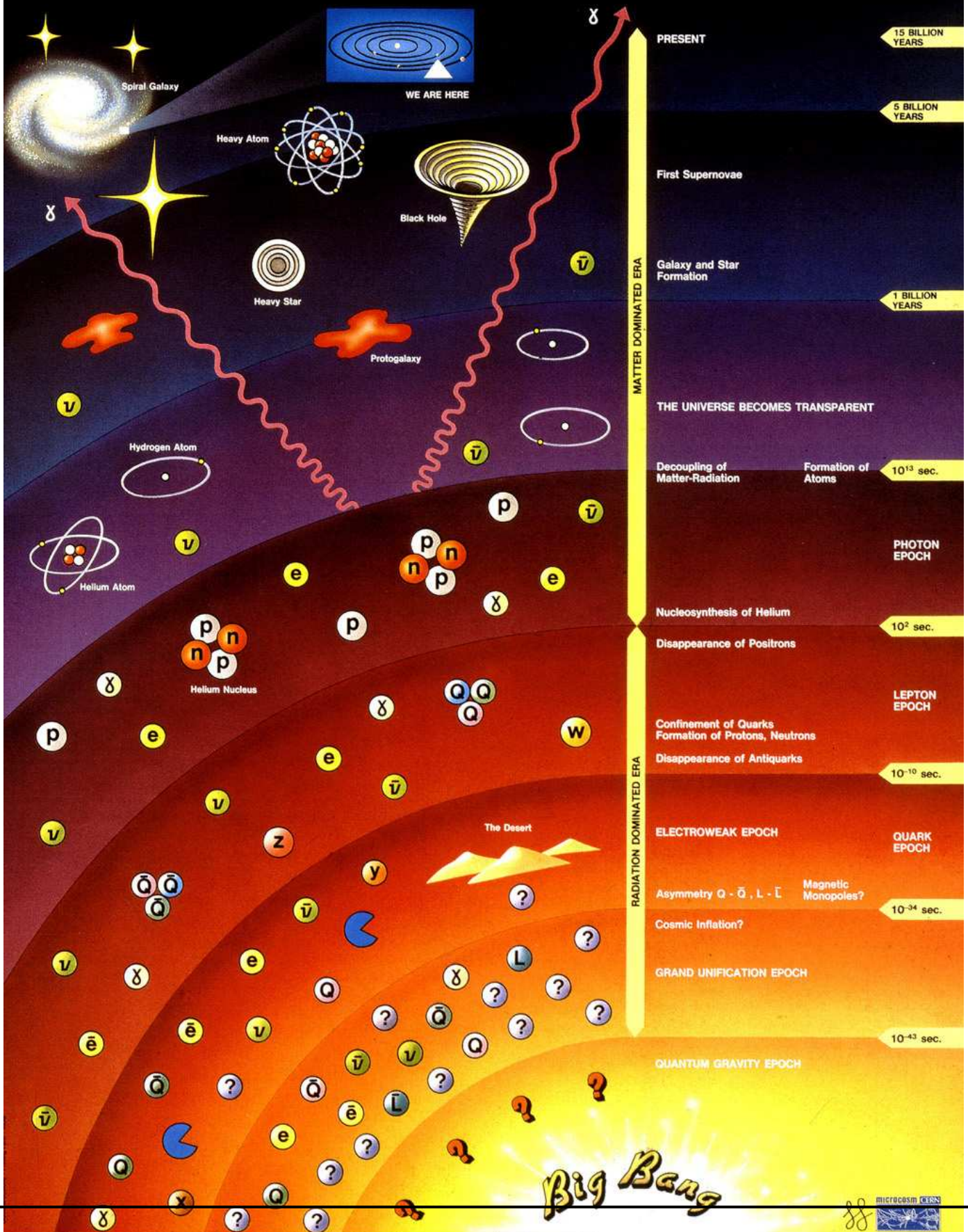
Das leichteste und damit stabile SUSY-Teilchen ist ein guter Kandidat für die fehlende **Dunkle Materie** im Weltall.

Die Supersymmetrie hilft bei der Vereinheitlichung der Kräfte und stabilisiert die Selbstwechselwirkung der Higgsbosonen. Supersymmetrische Erweiterungen des Standardmodells sind renormierbar.

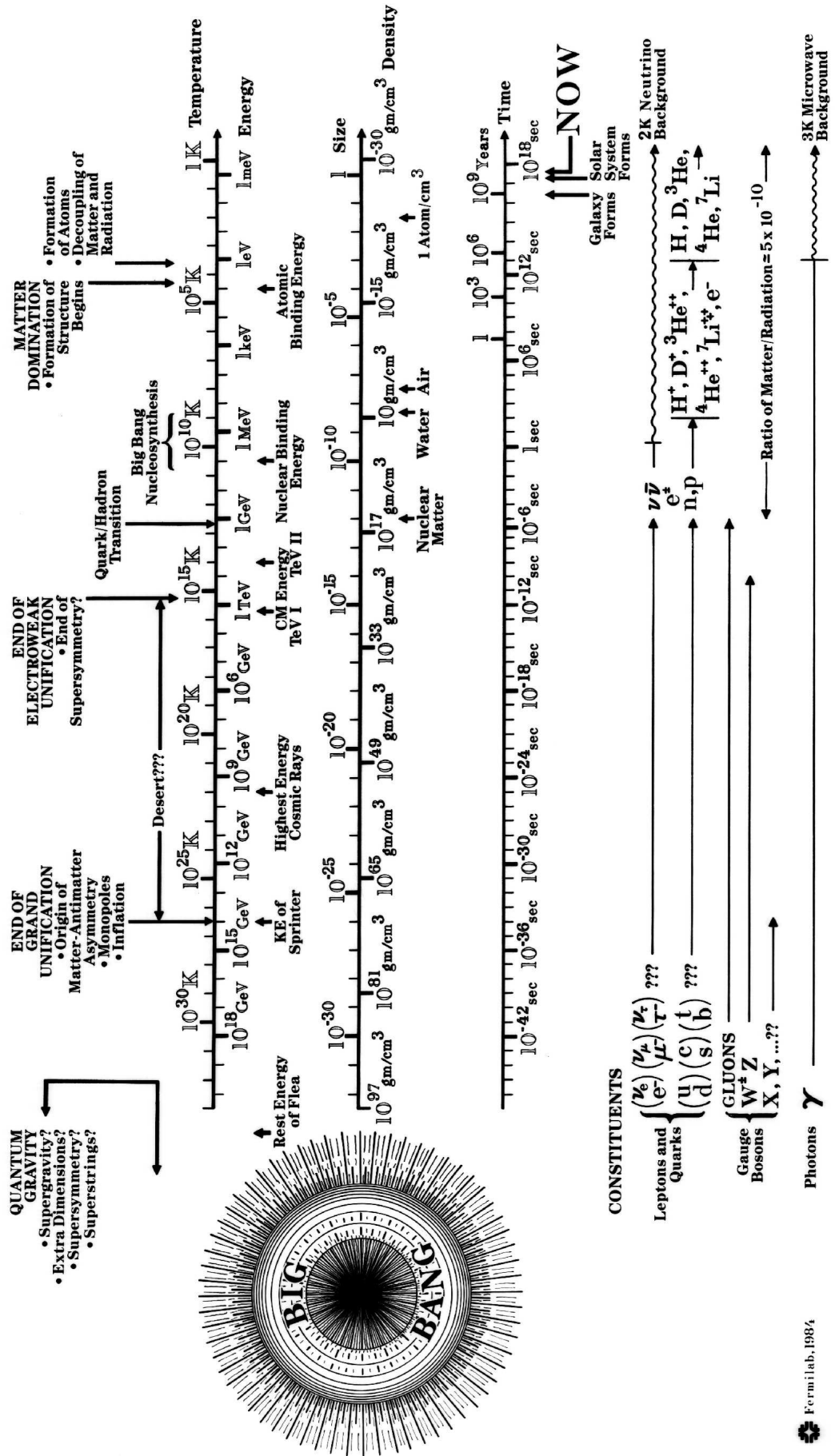
Eichfeldtheorien mit lokaler Supersymmetrie verbinden die inneren Quantenzahlen der Elementarteilchen mit den Symmetrien der Raum-Zeit und damit der Gravitation (allerdings nur bei mehr als 3 Raumdimensionen und bisher nicht renormierbar).

Teilchenphysik und Kosmologie

History of the Universe



Entwicklung des Universums



Materiedichte des Universums

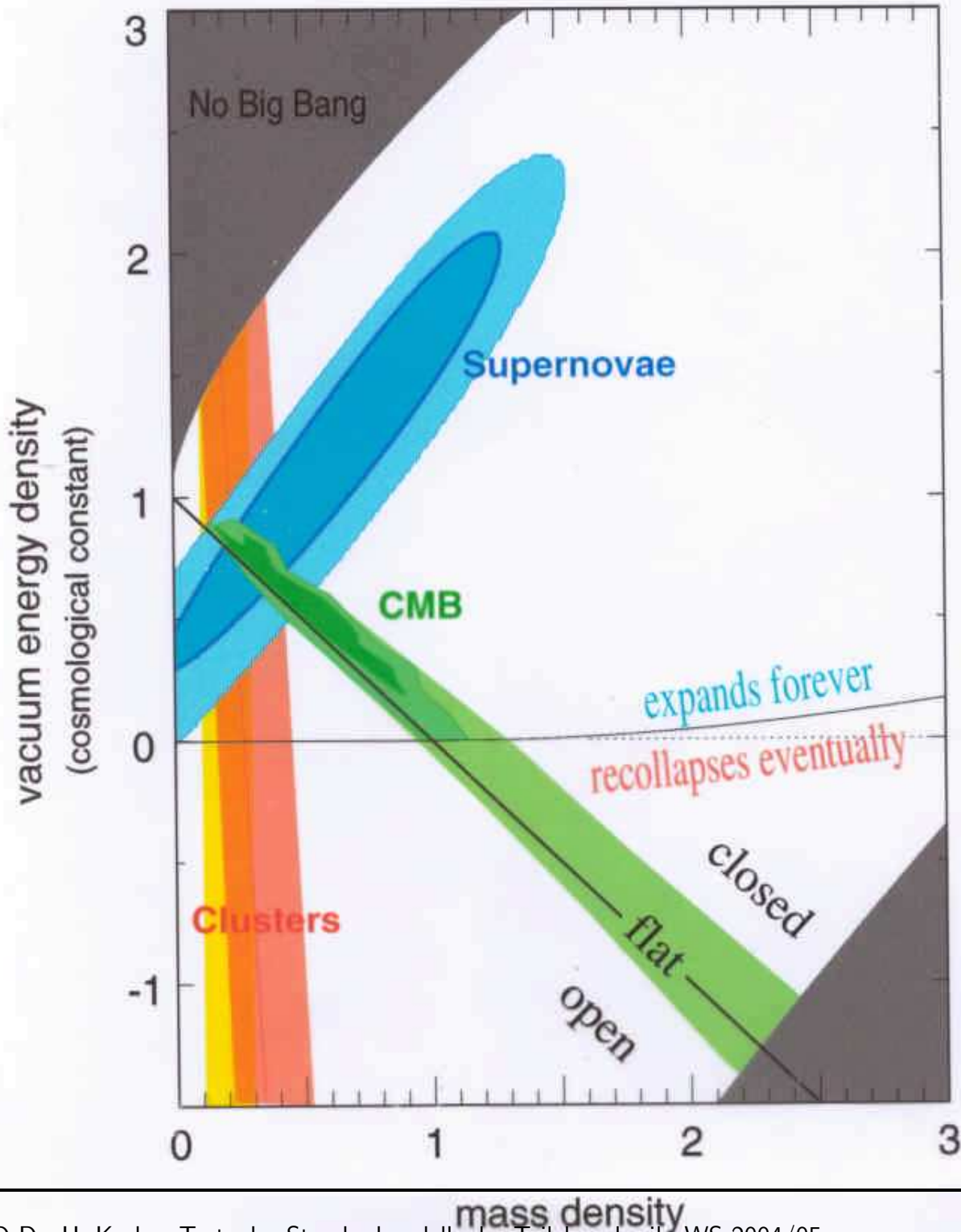
$$\Omega = \text{Energiedichte} / \text{kritische Dichte}$$

Beobachtungen:

- $\Omega_{\text{tot}} = 1$ (flaches Universum, Inflation: Isotropie der kosmischen Hintergrundstrahlung).
- Materiedichte $\Omega_M \approx 30\%$ (Gravitationseffekte: Galaxienbewegung, Gravitationslinsen).
- Baryonische Materie (Elemente) $\Omega_B \approx 5\%$ (Nukleosynthese).
- Sichtbare Materie (Sterne) $\Omega_{\text{lum}} \approx 0.4\%$.

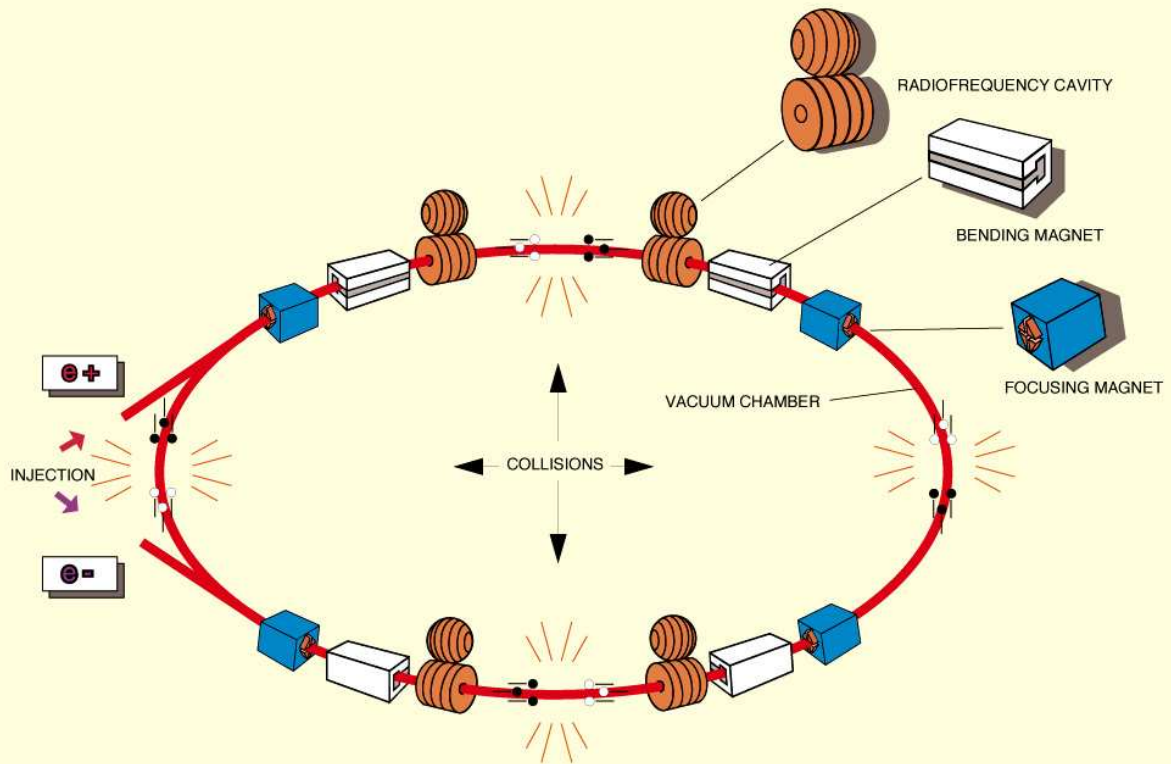
- ⇒ Nicht-baryonische
“Dunkle Materie”: $\Omega_{DM} \approx 30\%$
(massive Neutrinos, Axionen, SUSY-Teilchen,...?).
- “Dunkle Energie”: $\Omega_\Lambda \approx 70\%$
(kosmologische Konstante Λ der ART, Vakuumenergie, beschleunigte Expansion des Universums: Supernovae-Rotverschiebung).

Perlmutter, et al. (1999)
Jaffe et al. (2000)
Bahcall and Fan (1998)



Teilchenphysik mit Beschleunigern

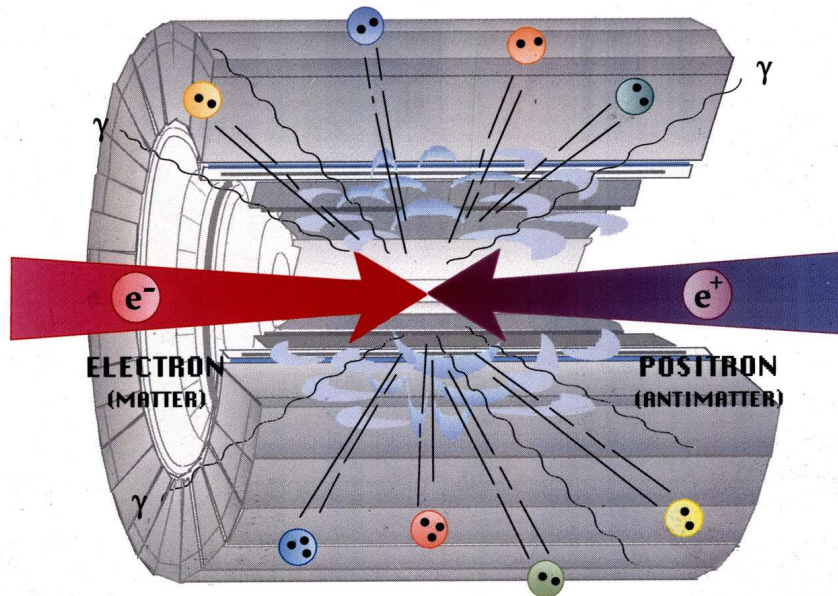
THE PRINCIPAL MACHINE COMPONENTS OF THE LEP ACCELERATOR.



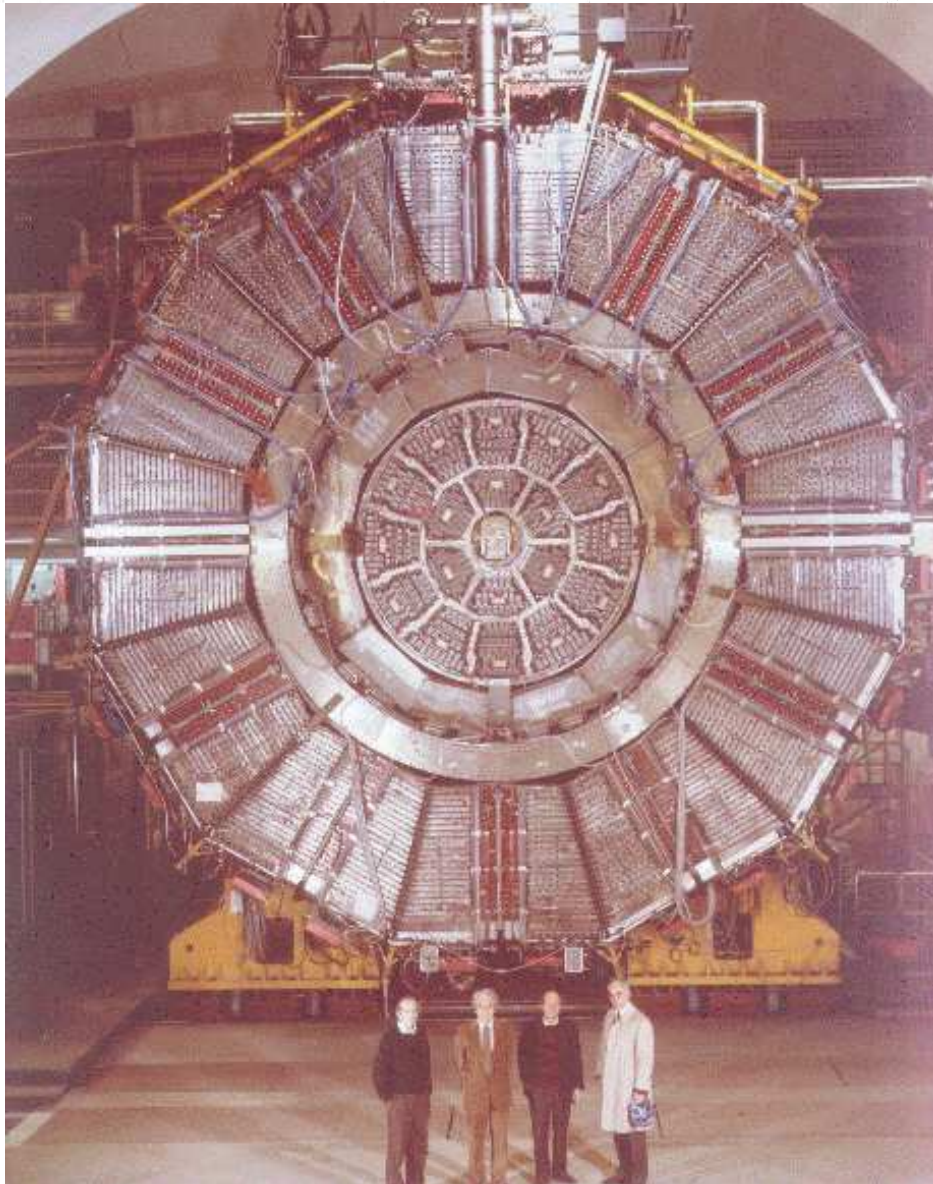
CERN AC - E509



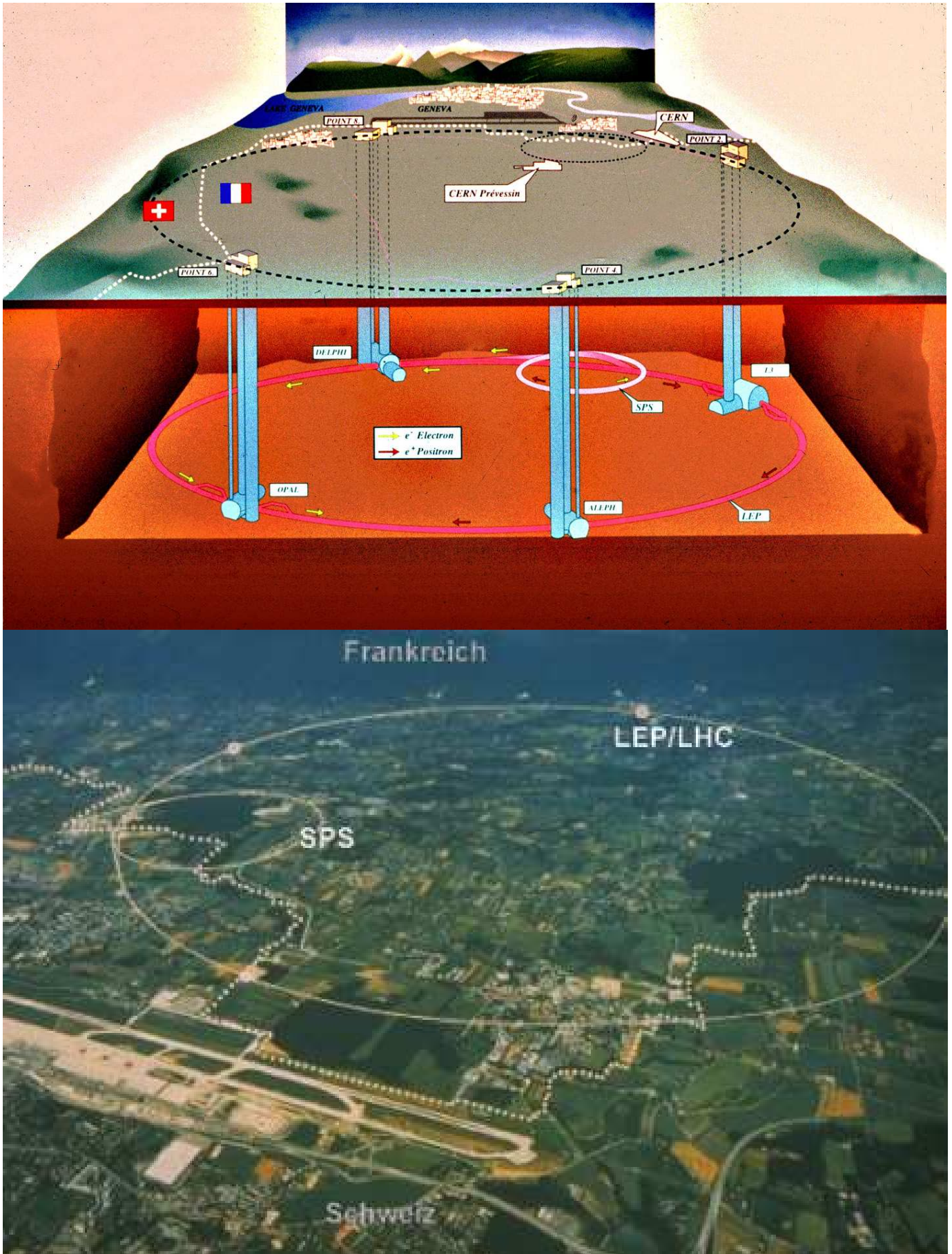
Teilchendetektoren



Eliane Onursal



Beschleunigeranlagen



Vertex
Detector



Inner Tracking
Chamber



Time Projection
Chamber



Electromagnetic
Calorimeter



Superconducting
Magnet Coil



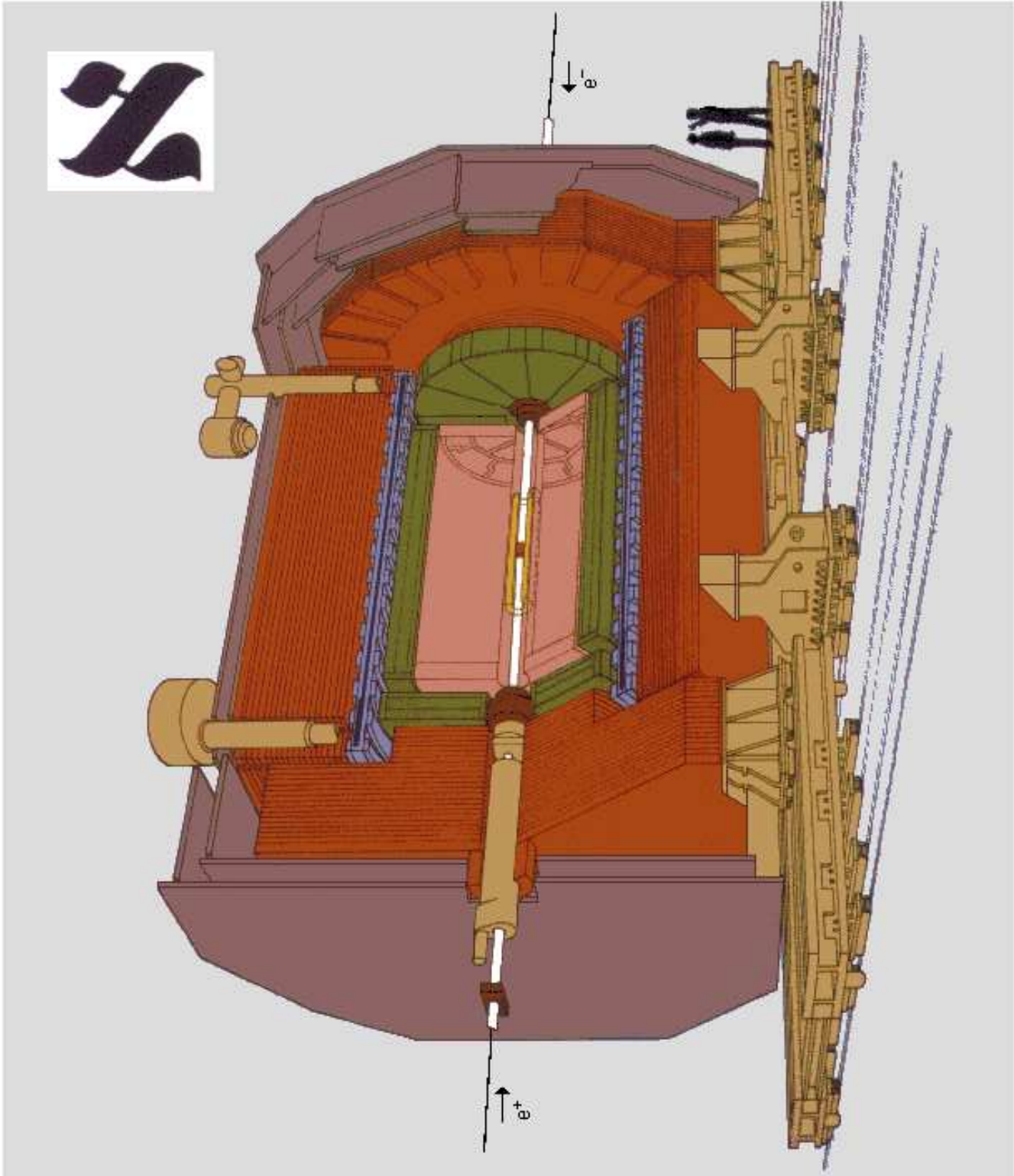
Hadron
Calorimeter



Muon
Chambers

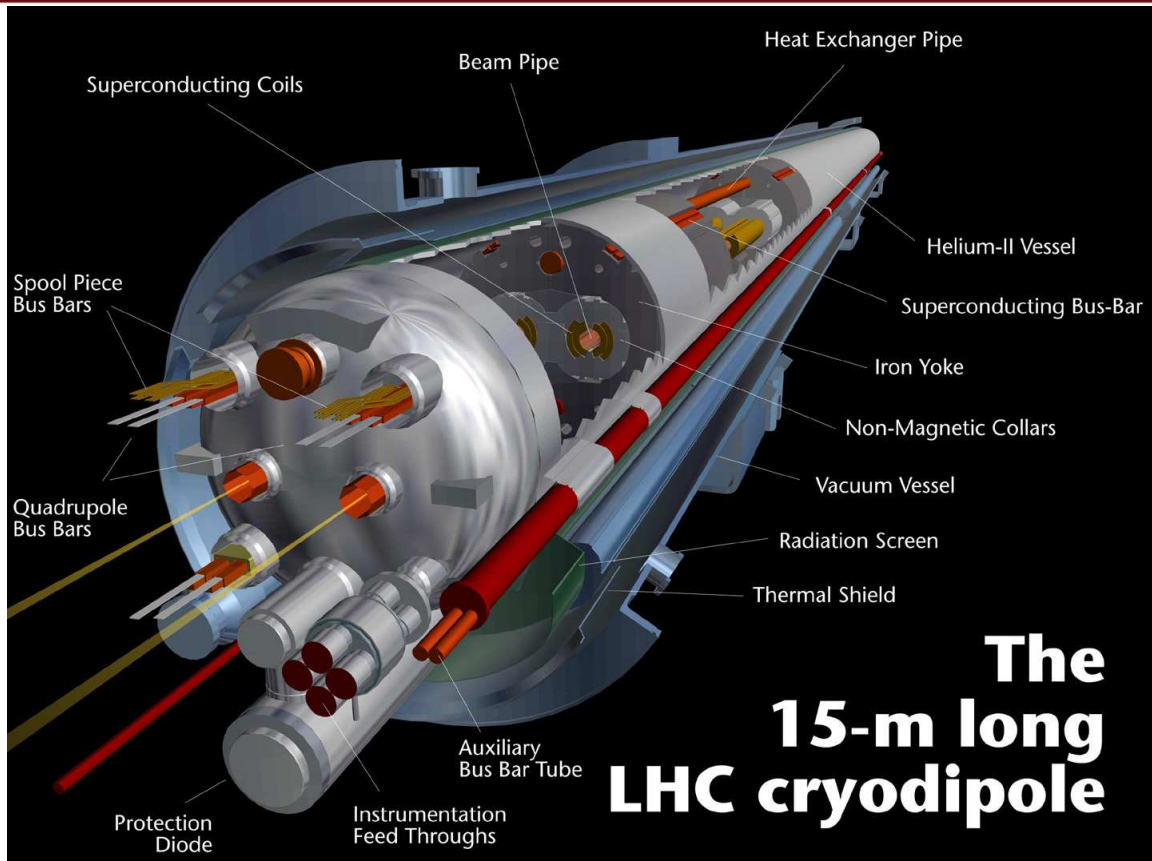
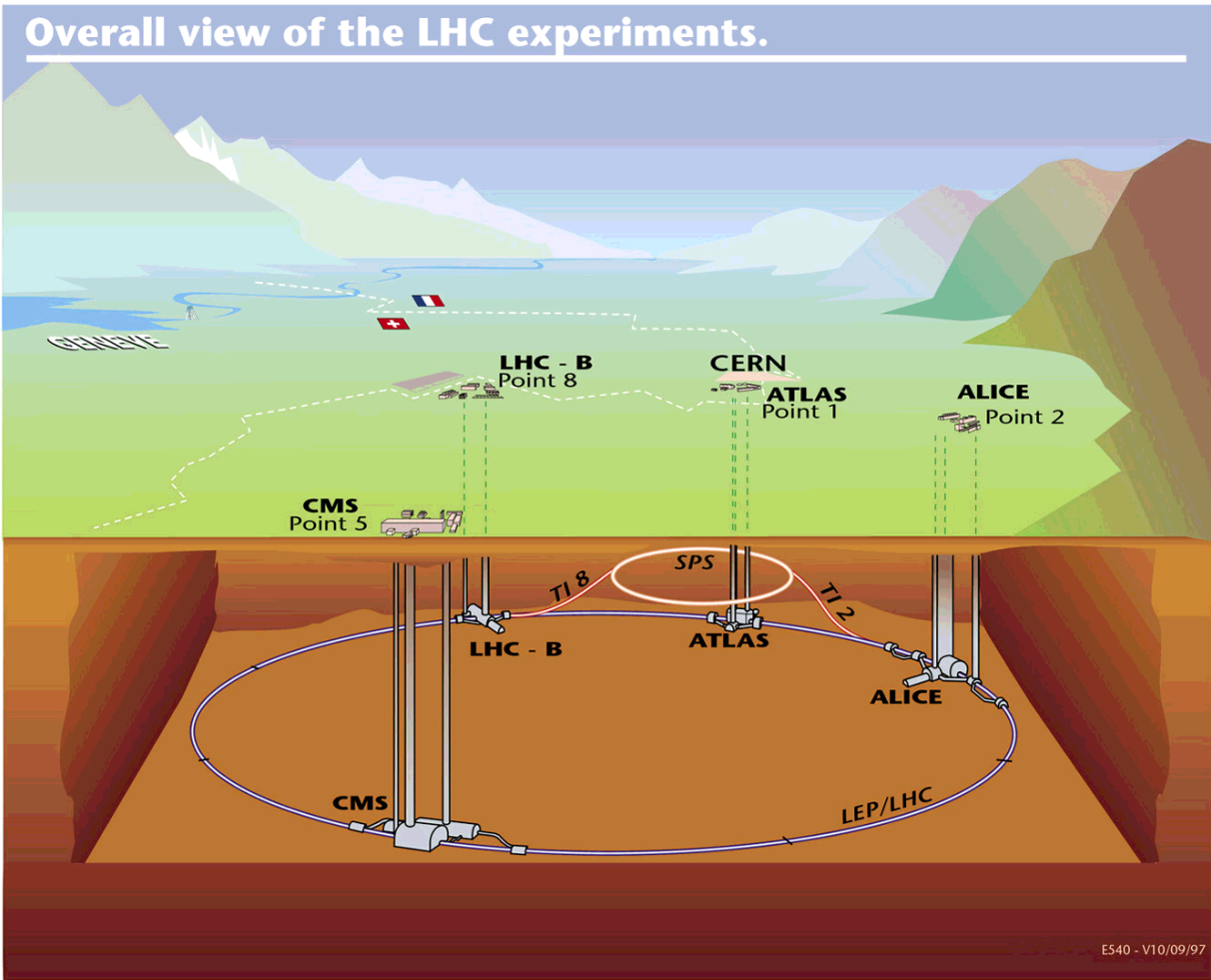


Luminosity
Monitors



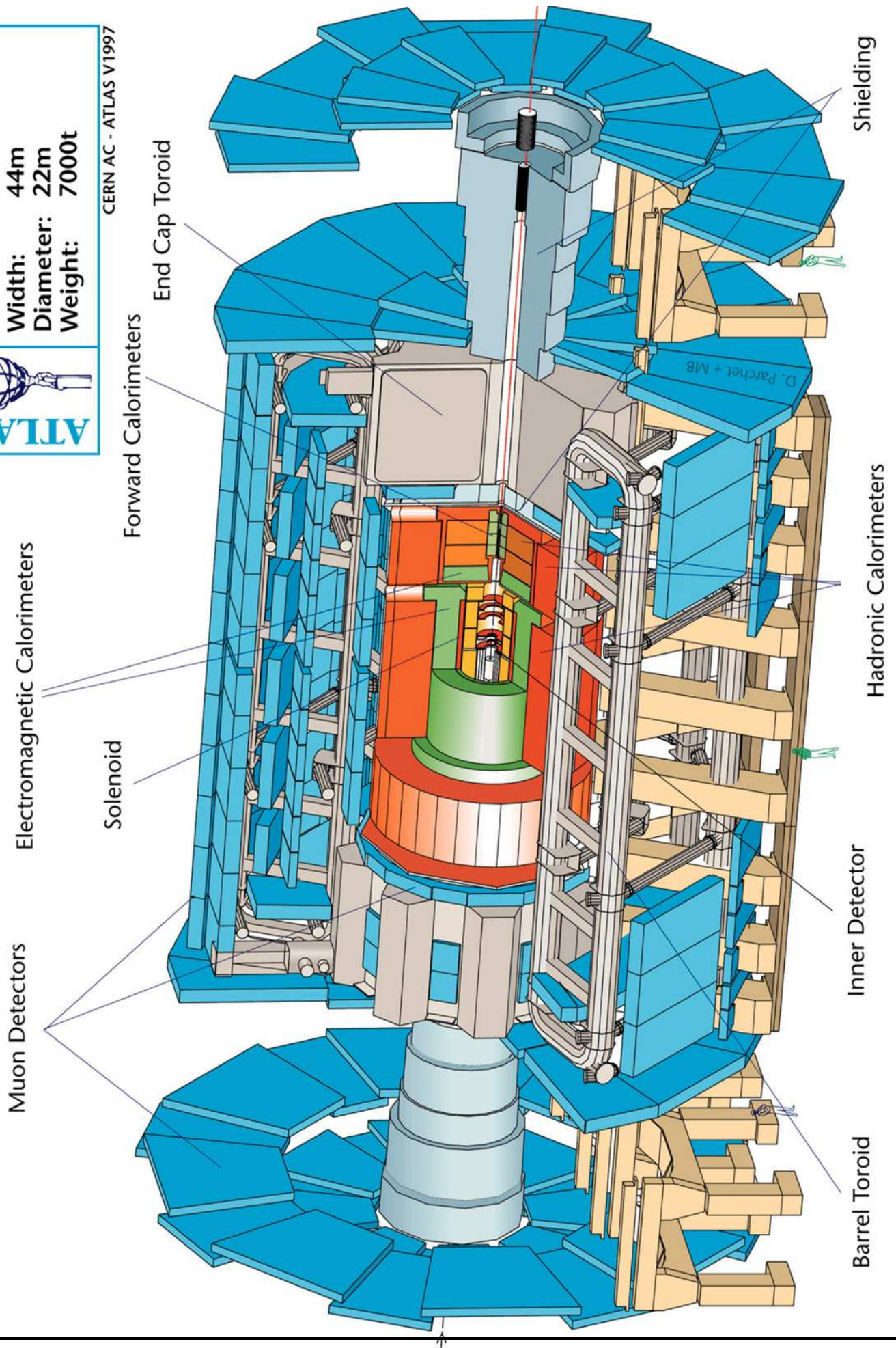
The ALEPH Detector

Der Large Hadron Collider (LHC)



Detector characteristics
Width: 44m
Diameter: 22m
Weight: 7000t

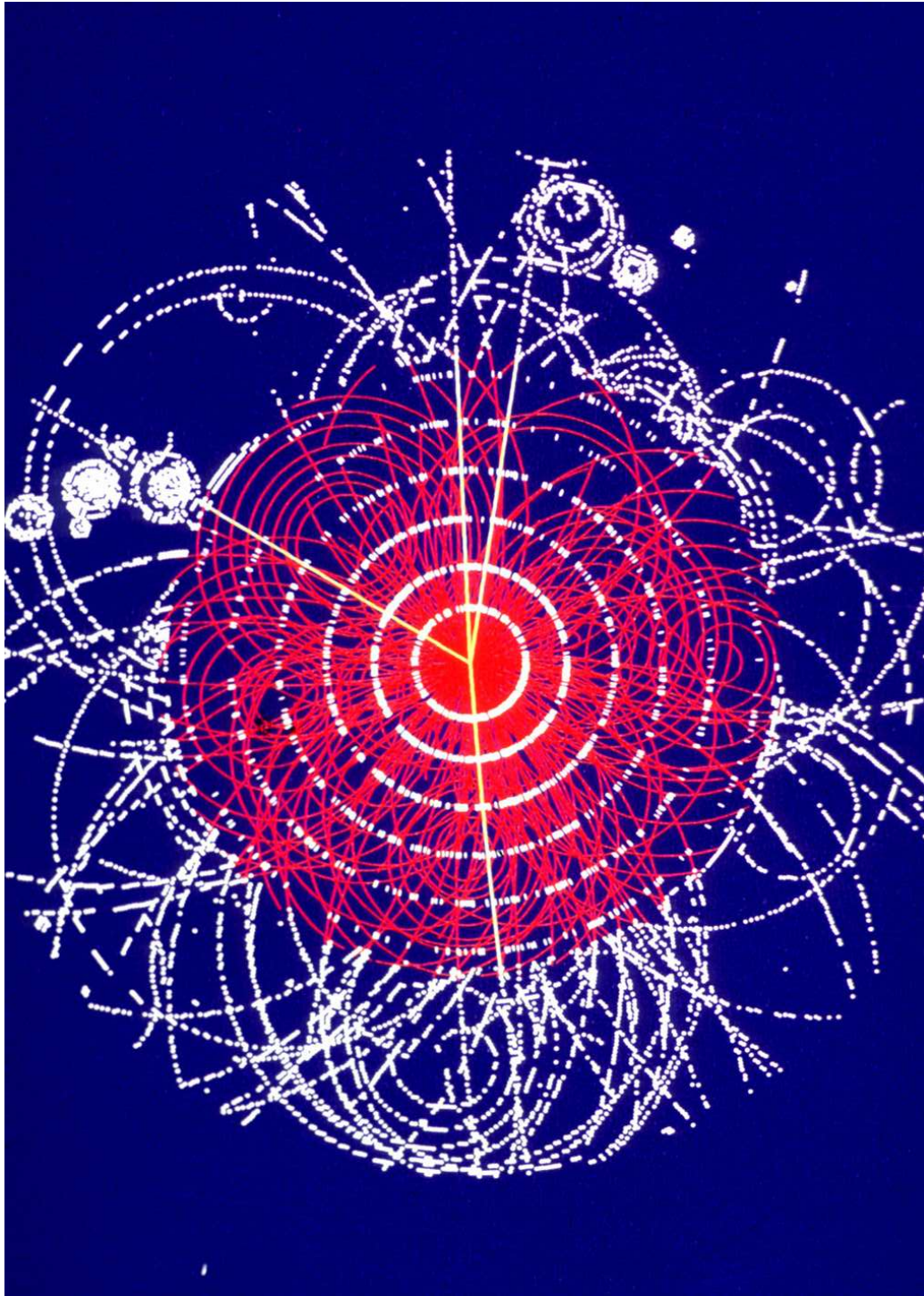
CERN AC - ATLAS V1997

Higgs-Zerfall im ATLAS Detektor

Computersimulation des Zerfalls eines Higgs-Teilchens im ATLAS Detektor am LHC:

$$\text{Higgs} \longrightarrow Z^0 Z^0 \longrightarrow (\mu^+ \mu^-)(\mu^+ \mu^-)$$



1.1 Feldtheorien der Elementarteilchen

1.1.1 Quantenmechanik und Feldtheorie

Klass. Mechanik \longrightarrow **Klass. QM** \longrightarrow **Vielteilchensysteme:**
Hamilton'sche Schrödinger- 2. Quantisierung
Bewegungs- gleichung (Vielteilchen-
gleichungen (Einteilchen- grundzustand
zustände) + Anregungen)

↓ **Lorentzinvarianz**

Relativistische \longrightarrow **Relativistische** \longrightarrow **Vielteilchensysteme:**
Mechanik **Wellen-** **Feldquantisierung**
gleichungen (Vakuum-
(\rightarrow Antiteilchen) grundzustand
+ Teilchen-
anregungen)

Die Maxwell-Gleichungen sind das erste Beispiel einer relativistischen Feldtheorie.

Die **Lorentz-Symmetrie** wurde anhand der Maxwell-Gleichungen entdeckt.

Die erste Quantenfeldtheorie war die QED mit elektromagnetisch gekoppelten Quantenfeldern für elektrisch geladene Materie und elektromagnetisches Feld (Photonen). Sie ist das Muster für alle anderen Wechselwirkungen des Standardmodells.

1.1.2 Notation

1. Wirkungsquantum $\hbar = 1$, Lichtgeschwindigkeit $c = 1$.
2. 4-Vektoren:

Raum-Zeit-Koordinaten:

Kontravariante Koordinaten:

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z).$$

Kovariante Koordinaten:

$$x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (t, -x, -y, -z),$$

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu \equiv \sum_\nu g_{\mu\nu} x^\nu.$$

mit dem metrischen Tensor der Minkowsky-Raum-Zeit:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \equiv g^{\mu\nu},$$

$$g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 4; \quad g_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu} = g_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu$$

und Summation über wiederholte Indizes.

3. Skalarprodukt (invariant):

$$x^2 \equiv x^\mu x_\mu = t^2 - \vec{x}^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2.$$

4. Energie-Impuls-Vektor:

$$\begin{aligned} p^\mu &= (E, \vec{p}) = (E, p_x, p_y, p_z), \\ p_\mu &= (E, -\vec{p}) = (E, -p_x, -p_y, -p_z), \end{aligned}$$

$$p^2 \equiv p^\mu p_\mu = E^2 - \vec{p}^2 = m^2.$$

5. Differentialoperatoren:

$$\begin{aligned} \partial_\mu &\equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right), \\ \partial^\mu &\equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right). \end{aligned}$$

6. Quantenmechanische Operatoren:

$$\text{4-Impuls: } \hat{p}^\mu = i\partial^\mu = i\frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(i\frac{\partial}{\partial t}, -i\vec{\nabla} \right),$$

$$\hat{p}^\mu \hat{p}_\mu = -\partial^\mu \partial_\mu = -\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \right) = -\square$$

mit dem d'Alembert-Operator $\square = \partial^\mu \partial_\mu$.

1.1.3 Lagrange-Formalismus in der Feldtheorie

1.1.3.1 Lagrange-Formalismus in der klassischen Mechanik

Nach dem Hamiltonschen Prinzip der kleinsten Wirkung erhält man die Bewegungsgleichungen durch **Variation des Wirkungsintegrals**

$$S \equiv \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_i, \dot{q}_i), \quad (1)$$

mit der Lagrangefunktion $L(q_i, \dot{q}_i) = T - V$ als Funktion der verallgemeinerten Koordinaten $q_i(t)$ und ihrer Ableitungen \dot{q}_i ($i = 1, \dots, n$), aus der Bedingung

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_i, \dot{q}_i) = 0, \quad (2)$$

wobei die Koordinaten an den Endpunkten t_1 und t_2 festgehalten werden.

Die Bewegungsgleichungen liefern die Trajektorien $q_i(t)$, für die die Wirkung S minimal (stationär) wird.

Die Bewegungsgleichungen sind die **Euler-Lagrange-Gleichungen**:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \quad (3)$$

Kurze Herleitung:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i(t)} \delta q(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(t)} \delta \dot{q}_i(t) \right].$$

Partielle Integration des 2. Terms mit $\delta \dot{q}_i(t) = \frac{d}{dt} \delta q_i(t)$ ergibt

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \frac{d}{dt} \delta q_i &= \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i, \end{aligned}$$

die 2. Zeile wegen der Randbedingung $\delta q_i(t_1) = 0 = \delta q_i(t_2)$,

und damit

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i(t)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i.$$

$\delta S = 0$ gilt, falls die Euler-Lagrange-Gleichungen erfüllt sind.

1.1.3.2 Anwendung des Lagrange-Formalismus in der Feldtheorie

Die Feldgleichungen ergeben sich durch Variation der klassischen Wirkung

$$S \equiv \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \quad (4)$$

mit der **Lagrangedichte** $\mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x))$ als Funktion des Feldes $\phi(x)$ (Kontinuum unendlich vieler Variabler) und seines 4-Gradienten $\partial_\mu \phi(x)$, die die Rolle der Lagrangefunktion

$$L = \int d^3x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = T - V$$

übernimmt.

Das Hamilton-Prinzip, $\delta S = 0$ mit $\delta\phi(t_1, \vec{x}) = 0 = \delta\phi(t_2, \vec{x})$, ist erfüllt, wenn die Euler-Lagrange-Bewegungsgleichungen

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi(x))} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi(x)} = 0 \quad (5)$$

erfüllt sind.

Die Feldgleichungen sind relativistisch kovariant, wenn die Lagrangedichte lorentzinvariant, also ein Lorentzskalar ist. Wegen der Randbedingung ändern sie sich nicht, wenn eine totale Divergenz $\partial_\mu A$ zur Lagrangedichte addiert wird.

Die Symmetrien der Feldgleichungen ergeben sich aus den Symmetrien der Lagrangedichte.

Die Quantenzahlen der Elementarteilchen und ihre Wechselwirkungen sind durch Symmetrien der Lagrangedichte bestimmt.

1.1.4 Feldgleichungen für freie Teilchen

Relativistische Wellengleichungen für die fundamentalen Teilchen des Standardmodells.

1.1.4.1 Rekapitulation: Schrödingergleichung

für nicht-relativistische freie Punktteilchen ohne Spin:

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m} = T.$$

Quantisierung:

$$E \longrightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}; \quad \vec{p} \longrightarrow -i\hbar \vec{\nabla}.$$

⇒ Wellengleichung:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{x}, t)}{\partial t} = \hat{H} \psi(\vec{x}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 \psi(\vec{x}, t)$$

mit den ebenen Wellenlösungen

$$\psi(\vec{x}, t) = \frac{1}{V} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$$

zu den Energie- und Impulseigenwerten $E = \hbar\omega$, $\vec{p} = \hbar\vec{k}$.

Mit den Definitionen

$$\rho = \psi^* \psi = |\psi|^2 \quad \left(= \frac{1}{V} \right),$$

$$\vec{j} = -\frac{i\hbar}{2m} (\psi^* (\nabla \psi) - (\vec{\nabla} \psi^*) \psi) \quad \left(= \frac{\hbar \vec{k}}{mV} = \rho \frac{\vec{p}}{m} = \rho \vec{v} \right)$$

für die Wahrscheinlichkeitsdichte und die Wahrscheinlichkeitsstromdichte (in Klammern für ebene Wellen) gilt die lokale Erhaltung der Wahrscheinlichkeit (Kontinuitätsgleichung):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

und damit

$$\frac{d}{dt} \int d^3x \rho = 0.$$

1.1.4.2 Skalare Bosonen: Klein-Gordon-Gleichung

(Gordon, Klein 1926; Pauli, Weisskopf 1934)

für relativistische skalare (Spin 0-) Bosonen (z.B. π^\pm , K^0/\bar{K}^0 , Higgsfeld): $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$.

Quantisierung ($\hbar = 1$):

$$p^\mu = (E, \vec{p}) \longrightarrow i\partial^\mu = \left(i\frac{\partial}{\partial t}, -i\vec{\nabla}\right).$$

\implies Wellengleichung:

$$-\frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial t^2} = (-\vec{\nabla}^2 + m^2)\phi(x),$$

$$\implies \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 + m^2\right)\phi(x) \equiv (\square + m^2)\phi(x) = 0.$$

Die gleiche Gleichung gilt für das komplex konjugierte Feld (Antiteilchen):

$$(\square + m^2)\phi^*(x) = 0.$$

Die Feldgleichungen lassen sich aus der Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = [(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi)^* - m^2 \phi \phi^*] = \mathcal{L}(\phi, \phi^*; \partial^\mu \phi, \partial^\mu \phi^*)$$

nach dem Variationsformalismus von Euler und Lagrange herleiten durch Variation der Felder:

$\delta\phi^*(x)$ ergibt Feldgleichung für $\phi(x)$.

$\delta\phi(x)$ ergibt Feldgleichung für $\phi^*(x)$.

Freie Lösungen sind ebene Wellen:

$$\phi^\pm(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} \mp \omega t)}$$

zu den Energieeigenwerten $E = \pm\omega$ mit $\omega = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$.

Die globale $U(1)$ -Eichsymmetrie der Lagrangedichte unter Phasentransformationen der Felder (s.u.) führt zu dem lokalen Erhaltungssatz (Kontinuitätsgleichung)

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

für die 4-Wahrscheinlichkeitsstromdichte $j^\mu = (\rho, \vec{j})$:

$$\begin{aligned} j^\mu &= -i \frac{1}{2m} \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \phi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} \phi^* \right) \\ &= -\frac{i}{2m} [(\partial^\mu \phi)^* \phi - (\partial^\mu \phi) \phi^*] \end{aligned}$$

mit $\rho = \pm \frac{1}{V} \cdot \frac{\omega}{m}$ und $\vec{j} = \frac{1}{V} \cdot \frac{\vec{k}}{m}$ für ebene Wellenlösungen (relativistische Verallgemeinerung der Wahrscheinlichkeitserhaltung in der klassischen Quantenmechanik).

Die Wahrscheinlichkeitsdichte ρ für Lösungen mit negativen Energieeigenwerten ist ebenfalls negativ.

Im Rahmen der Quantenfeldtheorie können die ebene Wellen mit negativer Energie als Wellenfunktionen für die Antiteilchen interpretiert werden (s.u.).

Die relativistische Invarianz erlaubt keine konsistente quantenmechanische Interpretation der Einteilchenwellengleichung. Eine Vielteilchenquantentheorie ist erforderlich. Die (klassische) Lagrangedichte ist dennoch für die Untersuchung der Symmetrien und Wechselwirkungen und die meisten Berechnungen ausreichend.

Grenzfall:

Reelle skalare Felder beschreiben Spin 0-Teilchen, die mit ihren Antiteilchen identisch sind (z.B. π^0 , Higgsboson).

Die Wellengleichung

$$(\square + m^2)\phi(x) = 0$$

entspricht der Lagrangedichte

$$\mathcal{L}(\phi, \partial^\mu \phi) = \frac{1}{2}[(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^2].$$

1.1.4.3 Fermionen: Dirac-Gleichung

(Dirac, 1928)

für relativistische Spin $\frac{1}{2}$ -Fermionen (Leptonen und Quarks):
 $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$.

Quantisierung:

$$E \longrightarrow i\frac{\partial}{\partial t}; \quad \vec{p} \longrightarrow -i\vec{\nabla}.$$

\implies Ansatz für die Wellengleichung nur mit 1. Ableitung nach der Zeit (wie Schrödingergleichung nach den Interpretationsproblemen mit der Klein-Gordon-Gleichung) und damit auch nach dem Ort (wegen relativistischer Kovarianz):

$$\begin{aligned} i\frac{\partial\psi}{\partial t} \equiv \hat{H}\psi &= (\vec{\alpha} \cdot \hat{\vec{p}} + \beta m)\psi \\ &\equiv (-i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m)\psi \end{aligned}$$

mit Parametern $\vec{\alpha}$, β , die so gewählt werden müssen, daß weiterhin (für jede Komponente des Feldes ψ) die Klein-Gordon-Gleichung erfüllt, d.h. nach 2. Ableitung des Ansatzes nach der Zeit und Einsetzen des Ansatzes für die 1. Ableitung:

$$-\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \equiv \hat{H}^2\psi = (\hat{\vec{p}}^2 + m^2)\psi \equiv (-\vec{\nabla}^2 + m^2)\psi$$

Dies ist nur erfüllbar, wenn $\alpha_{1,2,3} = \alpha_{1,2,3}^\dagger$ und $\beta = \beta^\dagger$ hermitesche Matrizen sind mit den Eigenschaften:

$$1. \quad \alpha_1^2 = \alpha_2^2 = \alpha_3^2 = \beta^2 = 1 \implies \text{Eigenwerte} = \pm 1$$

2. Antivertauschungsrelationen:

$$\alpha_j \alpha_k + \alpha_k \alpha_j = 0 \quad (j \neq k),$$

$$\alpha_j \beta + \beta \alpha_j = 0 \implies \text{Spur}(\alpha_{1,2,3}) = \text{Spur}(\beta) = 0.$$

Damit muß die Dimension der Matrizen gerade sein und mindestens $n = 4$, da es für $n = 2$ neben der Einheitsmatrix I nur 3 linear unabhängige Matrizen gibt, die **Pauli'schen Spinmatrizen**:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Für $n = 4$ gibt es 16 linear unabhängige Matrizen.

Die folgenden Kombinationen von Matrizen sind am günstigsten für eine raum-zeitlich symmetrische Formulierung der Dirac-Wellengleichung: die **Dirac'schen γ -Matrizen**:

$$\gamma^0 = \beta, \gamma^1 = \beta \alpha_1, \gamma^2 = \beta \alpha_2, \gamma^3 = \beta \alpha_3,$$

die formal einen 4-Vektor bilden,

$$\gamma^\mu = (\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3), \quad \gamma_\mu = g_{\mu\nu} \gamma^\nu = (\gamma^0, -\gamma^1, -\gamma^2, -\gamma^3),$$

bei Lorentztransformationen aber invariant bleiben.

Damit ist die relativistisch kovariante **Dirac-Gleichung**:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0$$

d.h.

$$\left[i(\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla}) - m \cdot I \right] \psi = 0.$$

Die Fermionfelder sind 4-komponentig: **4-Spinoren**.

Die γ -Matrizen haben die folgenden Eigenschaften:

- $\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \cdot I.$
- $\gamma^\mu \gamma_\mu = g_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu = 4 \cdot I.$
- $\gamma^{0\dagger} = \gamma^0, \gamma^{j\dagger} = -\gamma^j.$

Eine gebräuchliche Darstellung der γ -Matrizen ist (Pauli-Dirac-Darstellung: γ^0 diagonal):

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ -\sigma_j & 0 \end{pmatrix}.$$

Der **adjungierte Spinor**, definiert durch

$$\bar{\psi} := \psi^\dagger \gamma^0,$$

erfüllt die adjungierte Dirac-Gleichung:

$$\bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) = 0.$$

Das Produkt $\bar{\psi}\psi$ ist im Gegensatz zu $\psi^\dagger\psi$ lorentzinvariant (Lorentz-Skalar).

Die lorentzinvariante **Lagrangedichte für freie Dirac-Teilchen** ist damit:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x)$$

Variation $\delta\bar{\psi}$ liefert als Feldgleichung die Dirac-Gleichung.

Variation $\delta\psi$ liefert als Feldgleichung die adjungierte Dirac-Gleichung.

Lösungen der freien Dirac-Gleichung sind ebene Wellen mit 4 internen Spinorfreiheitsgraden,

zu zwei (positiven und negativen Energieeigenwerten $E = \pm\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ und zu zwei Spineinstellungen $s = 1, 2$ (up/down bzgl. der z -Richtung),

die ein Orthonormalsystem bilden:

$$\psi^+(x) = u_s(p)e^{-ip_\mu x^\mu}; \quad \psi^-(x) = v_s(p)e^{+ip_\mu x^\mu}$$

mit den Spinorkomponenten

$$u_1(p) = \sqrt{\frac{E+m}{V}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x+ip_y}{E+m} \end{pmatrix}; \quad u_2(p) = \sqrt{\frac{E+m}{V}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x-ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix};$$

$$v_1(p) = \sqrt{\frac{|E|+m}{V}} \begin{pmatrix} \frac{p_x-ip_y}{|E|+m} \\ \frac{-p_z}{|E|+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad v_2(p) = \sqrt{\frac{|E|+m}{V}} \begin{pmatrix} \frac{p_z}{|E|+m} \\ \frac{p_x+ip_y}{|E|+m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dabei ist $p_\mu x^\mu = Et - \vec{p} \cdot \vec{x}$ und $u_s^\dagger u_s = v_s^\dagger v_s = 2E/V$.

Interpretation der Zustände:

1) Feynman-Stückelberg-Bild:

- $u_s(p)$ ($E > 0$): in pos. Zeitrichtung einlaufendes Fermion;
- $\bar{u}_s(p)$ ($E > 0$): in pos. Zeitrichtung auslaufendes Fermion;
- $v_s(p)$ ($E < 0$): in neg. Zeitrichtung einlaufendes Anti-Fermion;
- $\bar{v}_s(p)$ ($E < 0$): in neg. Zeitrichtung auslaufendes Anti-Fermion.

2) Quantenfeldtheorie-Bild:

Freie Feldoperatoren:

- $\hat{\psi}_f(x)$: vernichtet Fermionen ($u_s(p)$),
erzeugt Antifermionen ($v_s(p)$).
- $\hat{\bar{\psi}}_f(x)$: vernichtet Antifermionen ($\bar{v}_s(p)$),
erzeugt Fermionen ($\bar{u}_s(p)$).

Bei Wahl der Spinrichtung entlang der Impulsrichtung (Spin-Quantisierungsachse) können folgende Spinzustände definiert werden:

Linkshändige Fermionen $\psi_L = P_L\psi$: Spin und Impuls antiparallel.

Rechtshändige Fermionen $\psi_R = P_R\psi$: Spin und Impuls parallel.

Die Projektionsoperatoren $P_L = P_L^2$ und $P_R = P_R^2$, mit $P_L P_R = P_R P_L = 0$ und $P_R + P_L = 1$, sind gegeben durch:

$$P_L = \frac{1 - \gamma_5}{2} = P_L^\dagger, \quad P_R = \frac{1 + \gamma_5}{2} = P_R^\dagger.$$

Dabei ist der Chiralitätsoperator γ_5 ist gegeben durch

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \gamma_5^\dagger$$

mit den Eigenzuständen (Chiralitätsspinorzustände):

$$\gamma_5 \psi_R = \psi_R, \quad \gamma_5 \psi_L = -\psi_L,$$

wobei

$$\begin{aligned}\bar{\psi}_L &= (P_L \psi)^\dagger \gamma^0 = \bar{\psi} P_R, \\ \bar{\psi}_R &= (P_R \psi)^\dagger \gamma^0 = \bar{\psi} P_L.\end{aligned}$$

Die Helizität $h = \frac{\vec{s} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|}$ hängt vom Bezugssystem ab, außer für masselose Teilchen.

Es gilt:

- $\gamma_5^2 = I.$
- $\gamma^\mu \gamma_5 + \gamma_5 \gamma^\mu = 0.$
- $\gamma_5 P_R = -P_R, \quad \gamma_5 P_L = -P_L.$
- $\gamma^\mu P_L = P_R \gamma^\mu, \quad \gamma^\mu P_R = P_L \gamma^\mu.$

In der Pauli-Dirac-Darstellung (γ^0 diagonal) hat γ_5 die Form

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}.$$

Ergänzung:

Die Weyl-Darstellung ist dadurch definiert, daß γ_5 diagonal ist mit den den Chiralitäten der Spinorzustände als Eigenwerten:

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}.$$

γ^0 hat in dieser Darstellung die Form

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{pmatrix},$$

während die anderen γ -Matrizen $\gamma_{1,2,3}$ ihre Form behalten.

1.1.4.4 Photonen: Elektromagnetisches Feld

Maxwell-Gleichungen ($c = 1$):

(Maxwell 1864)

$$(i) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0; \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad (\text{Randbedingungen})$$

$$(ii) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0; \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \quad (\text{freies Feld})$$

$$(ii') \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho; \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}. \quad (\text{mit Quellen})$$

mit der elektrischen Ladungsdichte $\rho(x)$ und der elektrischen Stromdichte $\vec{j}(x)$, für die ein Erhaltungssatz (Kontinuitätsgleichung) gilt:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0,$$

der unmittelbar aus (ii') durch Berechnung des Gradienten folgt.

Die Gleichungen (i) für die elektromagnetischen Felder $\vec{E}(x)$ und $\vec{B}(x)$ sind automatisch erfüllt, wenn diese durch ein skalares Potential $\Phi(x)$ und ein Vektorpotential $\vec{A}(x)$ ausgedrückt werden:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}; \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} \Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

Eichinvarianz der Lösungen der Maxwell-Gleichungen

unter den Transformationen

$$\Phi(x) \longrightarrow \Phi(x) - \frac{\partial \chi(x)}{\partial t}; \quad \vec{A}(x) \longrightarrow \vec{A}(x) + \vec{\nabla} \cdot \chi(x)$$

mit einem beliebigen skalaren Feld $\chi(x)$.

Die Maxwell-Gleichungen sind Lorentz-kovariant. Die Lichtgeschwindigkeit ist in allen bewegten Bezugssystemen die gleiche (Entdeckung der Speziellen Relativitätstheorie 1905).

Relativistisch kovariante Schreibweise:

Mit dem 4-Potential $A^\mu = (\Phi, \vec{A})$ und dem antisymmetrischen Feldtensor, definiert durch dessen 4-Rotation

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu = -F^{\nu\mu}$$

mit

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ -E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix},$$

erhalten die Maxwell-Gleichungen die Form:

$$(i) \quad \partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} = 0;$$

$$(ii) \quad \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0;$$

$$(ii') \quad \partial_\mu F^{\mu\nu} = -j^\nu.$$

Aus (ii') und der Definition des Feldtensors (aufgrund von (i)) folgt durch Anwendung der 4-Divergenz unmittelbar die kovariante Form der Kontinuitätsgleichung zur Ladungserhaltung:

$$\partial_\nu j^\nu = -\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$$

mit der elektrischen 4-Stromdichte $j^\mu(x) = (\rho(x), \vec{j}(x))$.

Die Erhaltung der elektrischen Ladung ist damit mit der Eichsymmetrie der elektromagnetischen Feldgleichungen verbunden.

Die Lösungen der Maxwellgleichungen für die Felder sind invariant unter der **Eichtransformation** des 4-Potentials:

$$A^\mu(x) \longrightarrow A^\mu(x) - \partial^\mu \chi(x).$$

Potentialschreibweise der Maxwell-Gleichungen

durch Einsetzen der Definition des Feldtensors:

$$\begin{aligned} \text{(ii')} \quad -\partial_\mu F^{\mu\nu} &= \partial_\mu F^{\nu\mu} \equiv \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) \\ &= \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\ &= \square A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = j^\nu; \\ \text{(ii)} \quad &\square A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = 0. \end{aligned}$$

Ohne Quellen (im Vakuum) erhält man durch geeignete Wahl der Eichung (**Lorentz-Eichung**)

$$A^\mu \longrightarrow A^{\mu'} = A^\mu - \partial^\mu \chi,$$

so daß

$$\partial_\mu A^{\mu'} \equiv 0,$$

d.h. Wahl des Feldes $\chi(x)$, so daß

$$\partial_\mu \partial^\mu \chi \equiv \square \chi = \partial_\mu A^\mu.$$

Damit gilt die bekannte **Wellengleichung** für das **elektromagnetische Potential**:

$$\square A^\nu = 0.$$

Jede Komponente von $A^\nu(x)$ erfüllt daher die **Klein-Gordon-Gleichung für ein masseloses Teilchen**.

Lösungen der freien elektromagnetischen Wellengleichung

sind ein- bzw. auslaufende ebene Wellen

$$A^{\mu+}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \varepsilon_{\mu}(k, \lambda) e^{-ik_{\mu}x^{\mu}},$$
$$A^{\mu-}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \varepsilon_{\mu}^*(k, \lambda) e^{ik_{\mu}x^{\mu}}$$

mit dem Wellenvektor $k^{\mu} = p^{\mu} / \hbar$ mit $k_{\mu}k^{\mu} = k^2 = m_{\gamma}^2 \equiv 0$ und **2 transversalen Polarisationsfreiheitsgraden**:

$$\varepsilon_{\mu}(\lambda = \pm 1) = (\varepsilon^0, \vec{\varepsilon}) = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 1, \pm i, 0)$$

(zirkulare Polarisation mit Helizitäten $\lambda = \frac{\vec{k} \cdot \vec{s}}{|\vec{k}| |\vec{s}|} = \pm 1$, $\vec{k} \parallel \hat{z}$).

Aus der Bedingung $\partial_{\nu} A^{\nu} = 0$ für die Lorentz-Eichung folgt die Randbedingung $k_{\mu} \varepsilon^{\mu} = 0$.

Die Funktion $\chi(x)$ der Lorentz-Eichung kann so gewählt werden, daß auch $\vec{k} \cdot \vec{\varepsilon} = 0$,

d.h. es gibt aufgrund der Eichinvarianz keine longitudinale Polarisation ($\lambda = 0$) der elektromagnetischen Wellen bzw. der masselosen Photonen, sie läßt sich durch Eichtransformation eliminieren.

Die Maxwell-Gleichungen beschreiben also ein **Photonfeld mit Spin 1 und Masse 0**, das nur **zwei Helizitätszustände** parallel und antiparallel zum Wellenvektor besitzt.

Die Masselosigkeit des Photons und das Verschwinden des transversalen Helizitätsfreiheitsgrads des 4-Vektorfelds des Photons sind beides miteinander verknüpfte Konsequenzen der Eichfreiheit.

Die elektrisch neutralen Photonen sind mit ihren Antiteilchen identisch.

Der Feldoperator $\hat{A}^\mu(x)$ des elektromagnetischen Feldes erzeugt und vernichtet Photonzustände, entsprechend den ein- und auslaufenden Photonen im Feynman-Stückelberg-Bild.

Das gleiche gilt für reelle, massive Bosonfelder mit Spin 0 (Higgs-Boson).

Lagrangedichte für das elektromagnetische Feld

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{4}(\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu)(\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu)\end{aligned}$$

ergibt nach den Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\nu} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}\right) = 0$$

die Feldgleichungen im Vakuum und

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - j^\nu A_\nu$$

die Feldgleichungen mit Quellen, wie leicht zu verifizieren ist.

1.1.4.5 Massive Vektorfelder

Durch Einführung eines lorentzinvarianten Masseterms in der Lagrangedichte analog zur Klein-Gordon-Gleichung,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}M^2 A^\nu A_\nu$$

erhält man die Wellengleichung (**Proca-Gleichung**) für Spin-1 Bosonen mit Masse M (z.B. W^\pm , Z^0):

$$\begin{aligned}\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + M^2 A^\nu &= 0, \\ \square A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) + M^2 A^\nu &= 0.\end{aligned}$$

Die 4-Divergenz des ersten Terms der Gleichung verschwindet, so daß für massive Vektorfelder immer gilt $\partial_\mu A^\mu \equiv 0$, d.h. die Eichfreiheit ist durch Fixierung der Eichung verloren. Damit gilt für jede Komponente des Feldes $A^\nu(x)$ die Klein-Gordon-Gleichung mit Masse:

$$[\square + M^2]A^\nu = 0$$

mit der Nebenbedingung $\partial_\mu A^\mu = 0$. Der Massenterm in \mathcal{L} ist offensichtlich nicht invariant unter der Eichtransformation des 4-Potentials.

Um die Eichinvarianz auch für massive Vektorbosonen zu retten, wird der **Higgs-Mechanismus mit spontaner Brechung der Eichsymmetrie** benötigt.

Die ebenen Wellenlösungen für freie massive Vektorbosonen besitzen im Gegensatz zum Photon 3 Polarisationsfreiheitsgrade mit zusätzlicher longitudinaler Polarisation bzw. transversaler Helizität $\lambda = 0$:

$$\begin{aligned}\varepsilon_\mu(k; \lambda = \pm 1) &= \mp \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, \pm i, 0); \\ \varepsilon_\mu(k; \lambda = 0) &= \mp \frac{1}{M}(k, 0, 0, E).\end{aligned}$$

mit $k_\mu = (E, 0, 0, k)$, $k_\mu k^\mu = E^2 - k^2 = M^2$

und $k_\mu \varepsilon^\mu = 0$.

1.2 Eichsymmetrien und Wechselwirkungen

Invarianz der Lagrange-Funktion bzw. Kovarianz der Bewegungsgleichungen unter Symmetrietransformationen führt zu Erhaltungssätzen und einer Klassifizierung der quantenmechanischen Teilchenzustände (Lösungen der Bewegungsgleichungen) nach Quantenzahlen, die zu Erhaltungsgrößen gehören (Teilchen-Multipletts).

Die Symmetrietransformationen bilden Symmetriegruppen.

Die für innere Symmetrien der Teilchen und Eichsymmetrien relevanten Symmetriegruppen sind die sog. Lie-Gruppen.

1.2.1 Symmetriegruppen: Lie-Gruppen

Gruppen von Transformationen $g(\alpha)$, die durch einen Satz kontinuierlicher Parameter α_a ($a = 1, \dots, n$) beschrieben werden und analytische Funktionen dieser Parameter sind.

Sie lassen sich aus infinitesimal kleinen Transformationen nahe der Einheitstransformation I ,

$$\delta g = g(\delta\alpha) = I + i\delta\alpha^a T^a + \mathcal{O}(\delta\alpha^2),$$

zusammensetzen. T^a ($a = 1, \dots, n$) sind die **Erzeugenden** oder **Generatoren** der Gruppe.

Alle Gruppenelemente lassen sich in der Form

$$g(\alpha) = e^{i\alpha^a T^a}$$

darstellen (Phasentransformationen der Wellenfunktion).

Die Transformationen sind **unitär**, wenn die Erzeugenden **hermitesch** sind. Alle Darstellungen endlicher (endliche Zahl von Parametern) oder kompakter (beschränkter Parameterraum) Lie-Gruppen lassen sich darauf zurückführen (geeignete Parametrisierung).

Unitarität ist wegen der Erhaltung der Wahrscheinlichkeit eine Bedingung für Symmetrietransformationen von Zuständen in der Quantenmechanik.

Die hermiteschen Generatoren sind quantenmechanische Observable und Erhaltungsgrößen.

Sie spannen einen n -dimensionalen Vektorraum hermitescher Operatoren auf.

Jeder Satz von n linear unabhängigen Generatoren einer Lie-Gruppe erfüllt die Vertauschungsrelationen

$$[T^a, T^b] = T^a T^b - T^b T^a = i f^{abc} T^c$$

mit den i.a. komplexen **Strukturkonstanten** f^{abc} und $[T^a, T^b] = -[T^b, T^a]$.

Mit der Vertauschung als zusätzlicher Operation bilden die Generatoren eine sog. **Lie-Algebra**. Die Strukturkonstanten sind spezifisch für die Lie-Algebra. Sie hängen aber von der Wahl der unabhängigen Generatoren und damit der Parameter der Gruppe ab.

Verschiedene Lie-Gruppen können die gleiche Lie-Algebra besitzen (z.B. die Drehimpulsgruppen $SO(3)$ und $SU(2)$).

Aufgrund der Vertauschungsrelation und der Jacobi-Identität für Kommutatoren,

$$[T^a, [T^b, T^c]] + [T^b, [T^c, T^a]] + [T^c, [T^a, T^b]] \equiv 0,$$

muß für die Strukturkonstanten gelten:

$$f^{ade} f^{bcd} + f^{bde} f^{cad} + f^{cde} f^{abd} = 0.$$

Die Zahl der unabhängigen Parameter (Ladungen) bzw. der Generatoren ist die **Ordnung** n einer Lie-Gruppe.

Die maximale Anzahl der miteinander vertauschenden und damit simultan diagonalisierbaren Generatoren ist der **Rang** r der Gruppe.

Klassifizierung der Lie-Gruppen:

A) Die einzige **kommutative** oder **Abelsche Lie-Gruppe** ist die **Gruppe $U(1)$** der unitären 1-dimensionalen Phasentransformationen

$\psi \rightarrow e^{i\alpha}\psi$ (entspricht Drehungen in der Ebene $SO(2)$).

B) Allgemeine Lie-Algebren lassen sich als direkte Produkte aus **einfachen** Lie-Algebren, die nicht weiter in Produkte von Untergruppen zerlegt werden können, sowie der kommutativen Lie-Algebra $U(1)$ darstellen.

C) Die **einfachen** und kompakten (s.o.) Lie-Algebren lassen sich in 4 Klassen einteilen, die durch Transformationsgruppen definiert sind:

1. **Spezielle unitäre Transformationen U N-dimensionaler Vektoren: $SU(N)$ ($N \geq 2$)**

mit $U^\dagger U = 1$ und $\text{Det}(U) = 1$. Sie erhalten das komplexe Betragsquadrat der Vektoren.

Die Generatoren $T = T^\dagger$ lassen sich darstellen als hermitesche $N \times N$ -Matrizen mit $\text{Spur}(T) = 0$, die auf einem N-dimensionalen Vektorraum transformieren.

Dabei handelt es sich um eine **fundamentale Darstellung**, die die niedrigste Dimension N besitzt (s.u.).

Es gibt $2N^2 - N^2 - 1 = N^2 - 1$ unabhängige Matrizen dieser Art und damit Generatoren und unabhängige Parameter der Gruppe. $SU(N)$ hat den Rang $N - 1$.

2. Reelle orthogonale Transformationen O N -dimensionaler Vektoren: $SO(N)$

mit $O^T O = 1$ und $\text{Det}(O) = 1$. Sie erhalten das reelle Betragsquadrat der Vektoren.

$SO(N)$ besitzt $N(N - 1)/2$ Generatoren und hat den Rang $r = N/2$ bzw. $(N - 1)/2$ (ganzzahlig).

3. Symplektische Transformationen $Sp(2N)$ ($N \geq 3$):

darstellbar durch reelle $2N \times 2N$ Matrizen, die die Matrix M mit $M_{i,i-1} = -M_{i-1,i}$ und sonst $M_{ij} = 0$ invariant lassen mit Ordnung $n = N(2N + 1)$ und Rang $r = N$.

4. Exzeptionelle Lie-Algebren ($n =$ Ordnung, $r =$ Rang):

$$G_2 (n = 14, r = 2)$$

$$F_4 (n = 52, r = 4)$$

$$E_6 (n = 78, r = 6)$$

$$E_7 (n = 133, r = 7)$$

$$E_8 (n = 248, r = 8).$$

1.2.2 Darstellungen von Gruppen

Die **Darstellung einer Gruppe G** ist definiert als die Abbildung

$$\theta : G \longrightarrow T$$

auf eine Gruppe T **linearer Transformationen** auf einem N -dimensionalen Vektorraum V .

Mit den linearen Transformationen $D(s) \in T$ gilt:

$$s \cdot t \longrightarrow D(s) \cdot D(t)$$

und damit $D(e) = I$ und $D(s^{-1}) = D^{-1}(s)$.

Der Vektorraum V ist der Darstellungsraum. Seine Dimension N ist die Dimension der Darstellung.

Nach Wahl einer Basis im Darstellungsraum können die linearen Transformationen als $N \times N$ -Matrizen dargestellt werden.

Die **fundamentalen Darstellungen** sind diejenigen mit der niedrigsten Dimension (> 1 für nicht-Abelsche Gruppen, da 1-dimensionale Matrizen immer kommutieren).

Bei **reduziblen Darstellungen** kann der Darstellungsraum in invariante Unterräume zerlegt werden, die zueinander orthonormale Basen besitzen.

Irreduzible Darstellungen transformieren auf invarianten Darstellungsräumen, die nicht in kleinere invariante Unterräume zerlegt werden können.

Die Suche nach Eigenvektoren und Eigenwerten der Symmetrieeoperatoren entspricht der Konstruktion irreduzibler Darstellungen der Symmetriegruppen.

Die Teilchenfelder müssen nach unitären Darstellungen der Symmetriegruppen der Lagrangefunktion transformieren. Sie gehören sog. **Multipletts** an, den N -dimensionalen irreduziblen Eigenräumen der Symmetrietransformationen.

Der Rang der Gruppe gibt die Zahl der gleichzeitig diagonalisierbaren Symmetrieeoperatoren (Generatoren) an und damit die Zahl der Parameter, die die Multipletts beschreiben, z.B. J_z für die Drehimpuls- oder Isospin-Gruppe $SU(2)$ (Rang $r = 2 - 1 = 1$) und $(I_3, Y = 2(Q - I_3))$ für die $SU(3)$ -Symmetrie der Quark-flavours u, d, s (Rang $r = 3 - 1 = 2$).

Für $SU(N)$ gilt: der Rang der Gruppe = $N - 1$ = Zahl der fundamentalen Darstellungen.

Da der Hamilton-Operator mit dem Drehimpuls und den Operatoren für andere innere Symmetrien vertauscht, müssen alle Teilchenzustände eines Multipletts einer inneren Symmetrie die **gleiche Masse und den gleichen Spin** besitzen; andernfalls ist die Symmetrie mehr oder minder stark gebrochen.

1.2.3 Symmetrien in der Quantenmechanik

Symmetrietransformationen der Wellenfunktion lassen die Schrödingergleichung

$$i\frac{\partial\psi(\vec{x}, t)}{\partial t} = \hat{H}\psi(\vec{x}, t)$$

invariant, d.h. die transformierten Zustände

$$\psi'(\vec{x}, t) = \hat{U}\psi(\vec{x}, t)$$

erfüllen die gleiche Schrödingergleichung, wenn \hat{U} nicht von der Zeit abhängt und der Hamiltonoperator \hat{H} invariant ist unter den Transformationen:

$$\hat{U}\hat{H}\hat{U}^\dagger \equiv \hat{H},$$

d.h. Hamiltonoperator und Transformationsoperator \hat{U} vertauschen:

$$[\hat{H}, \hat{U}] = 0.$$

Die Transformationsoperatoren auf dem Hilbertraum der Wellenfunktionen sind unitäre Transformationen, $UU^\dagger = U^\dagger U = 1$, damit die Erhaltung der Wahrscheinlichkeit gewährleistet ist, d.h. der Betrag der Wellenfunktion ändert sich nicht.

Beispiele für Symmetrietransformationen der Wellenfunktion ("Rotationen" im Hilbertraum: Phasentransformationen):

1. Zeittranslationen: $\hat{U} = e^{-i\hat{H}t}$

Infinitesimal:

$$\psi'(\vec{x}, t) = (1 - i\hat{H}\delta t)\psi(\vec{x}, t) = \psi(\vec{x}, t) + \frac{\partial\psi(\vec{x}, t)}{\partial t}\delta t.$$

2. Räumliche Translationen: $\hat{U} = e^{-i\hat{p}\cdot\vec{x}}$

Infinitesimal:

$$\psi'(\vec{x}, t) = (1 - i\hat{p}\cdot\delta\vec{x})\psi(\vec{x}, t) = \psi(\vec{x}, t) - \delta\vec{x}\cdot\vec{\nabla}\psi(\vec{x}, t).$$

3. Rotationen im Raum: $\hat{U} = e^{-i\hat{J}\cdot\vec{\alpha}}$

Infinitesimal:

$$\psi'_{\beta}(\vec{x}, t) = (1 - i\hat{J}_{\beta\gamma}\cdot\delta\vec{\alpha})\psi_{\gamma}(\vec{x}, t).$$

Die infinitesimalen (unitären) Transformationen werden durch die (hermiteschen) Operatoren der konjugierten Observablen (Energie \leftrightarrow Zeit, Impuls \leftrightarrow Ort, Drehimpuls \leftrightarrow Drehwinkel) "erzeugt": **Generatoren** der Transformationen von (nicht-kompakten) Lie-Gruppen.

- Die unitären Symmetrietransformationen auf dem Hilbertraum (Phasentransformationen der Wellenfunktion) haben Gruppeneigenschaften mit der Hintereinanderausführung als Gruppenoperation.

Sie sind spezielle **Darstellungen** der (kontinuierlichen) Symmetriegruppen der Raum- und Zeittranslationen, der räumlichen Rotationen usw.

- Operatoren \hat{O} , die mit dem Hamiltonoperator vertauschen, sind Konstanten der Bewegung und entsprechen erhaltenen Observablen, d.h.

$$i\frac{d\hat{O}}{dt} = [\hat{H}, \hat{O}] = 0.$$

- Observable, die mit dem Hamiltonoperator vertauschen, lassen sich **gleichzeitig mit ihm diagonalisieren**, d.h. die Eigenzustände von \hat{H} (stationäre Lösungen der Schrödingergleichung) sind gleichzeitig Eigenzustände von Impuls, Drehimpuls usw. mit festen Eigenwerten.

Symmetrieoperationen, die mit dem Hamiltonoperator vertauschen, führen zur **Entartung** der Energieeigenzustände des Hamiltonoperators, d.h. die Eigenzustände zu festen Energieeigenwerten bilden unter den Symmetrietransformationen invariante Unterräume des Hilbertraums (**Eigenräume** zu den Darstellungen der Symmetrietransformationen mit bestimmter Dimension).

Die Symmetrieeigenschaften des Hamiltonoperators und Erhaltungssätze erleichtern damit die Lösung der Schrödingergleichung und die Bestimmung der Eigenzustände.

Beispiel: Drehimpulserhaltung:

- $[\vec{J}, H] = 0$

- $$\left. \begin{aligned} [J_x, J_y] &= iJ_z \\ [J_y, J_z] &= iJ_x \\ [J_z, J_x] &= iJ_y \end{aligned} \right\} [J_i, J_j] = i \sum_k \varepsilon_{ijk} J_k \quad (i, j, k = x, y, z)$$

mit den Strukturkonstanten

$$\varepsilon_{i,j,k} = \begin{cases} 0, & 2 \text{ gleiche Indizes} \\ +1, & \text{Indizes gerade Permutation von } x, y, z \\ -1, & \text{Indizes ungerade Permutation von } x, y, z. \end{cases}$$

Mit $\vec{J}^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$ gilt:

- $[\vec{J}, \vec{J}^2] = 0,$

d.h. gemeinsame Eigenzustände von J_i und \vec{J}^2 . Spezielle Wahl: J_z und \vec{J}^2 bei Spinquantisierungsrichtung in z -Richtung.

J_x, J_y, J_z sind die **Erzeugenden (Generatoren) der Drehgruppe $SO(3)$** , d.h. der Gruppe aller Drehungen im dreidimensionalen Raum, die aus Drehungen um drei unabhängige Achsen zusammengesetzt werden können (3 Euler-Winkel).

Eine Darstellung (Realisierung) der Drehgruppe $SO(3)$ sind reelle orthogonale 3×3 -Drehmatrizen, die die Vektoren im Raum drehen, ohne ihren Betrag zu ändern, und durch $9 - 6 = 3$ unabhängige Parameter (z.B. die Euler-Winkel) beschrieben werden.

Die Gruppe $SU(2)$ läßt sich auf die Gruppe $SO(3)$ im Verhältnis 2:1 abbilden. Beide Gruppen sind äquivalent in dem Sinne, daß die infinitesimalen Transformationen und die Generatoren identisch sind. $SU(2)$ besitzt im Gegensatz zu $SO(3)$ auch Darstellungen zu halbzahligen Spineigenwerten und damit geradzahlig Dimensionen.

Die definierende und fundamentale Darstellung der $SU(2)$ -Gruppe sind die komplexen unitären 2×2 -Matrizen mit Determinante = 1, die ebenfalls durch $3 = 8 - 5$ unabhängige Parameter beschrieben werden.

Alternative Erzeugende der Drehimpulsgruppe:

- $J^+ = J_x + iJ_y, \quad J^- = J_x - iJ_y$

mit

- $[J_z, J^+] = J^+, \quad [J_z, J^-] = -J^-$

- $[J^+, J^-] = 2J_z$

und damit

- $[\vec{J}^2, J^\pm] = 0.$

Es gilt: $\vec{J}^2 = \frac{1}{2}(J^+J^- + J^-J^+) + J_z^2.$

Eigenzustände der Drehimpulsoperatoren:

Simultane Diagonalisierung:

$$\begin{aligned}\vec{J}^2|j, m\rangle &= j(j+1)|j, m\rangle, \\ J_z|j, m\rangle &= m|j, m\rangle.\end{aligned}$$

Definiert $(2j+1)$ -dimensionale Eigenräume des Drehimpulses (und damit auch des Hamiltonoperators) zu den Eigenwerten $j = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots$ und $m = -j, -j+1, \dots, j-1, j$ von \vec{J}^2 und J_z (Singulets, Dubletts, Tripletts usw.).

J^\pm sind Auf- und Absteigeoperatoren in jedem Eigenraum:

$$\begin{aligned}J^+|j, m\rangle &= |j, m+1\rangle & (m < j), \\ &= 0 & (m = j), \\ J^-|j, m\rangle &= |j, m-1\rangle & (m > -j), \\ &= 0 & (m = -j).\end{aligned}$$

Beispiel:

Spin $\frac{1}{2}$ -Zustände mit Eigenwerten $j = 1/2, m = \pm 1/2$.

3 unabhängige hermitesche 2×2 -Spinmatrizen mit Spur = 0 (entspricht Determinante = 1 für die von ihnen erzeugten Rotationsmatrizen), die **Pauli'schen Spinmatrizen**:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$
$$\vec{\sigma}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot I.$$

in der Pauli-Darstellung, in der die Eigenwerte (s.o.) zur Eigenvektorbasis

$$\left| \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$\left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

evident sind, d.h. mit $\vec{J} \equiv \frac{1}{2}\vec{\sigma}$ gilt

$$\vec{J}^2 \left| \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2} \right\rangle = \frac{3}{4} \left| \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2} \right\rangle,$$
$$J_z \left| \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2} \right\rangle = \pm\frac{1}{2} \left| \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2} \right\rangle.$$

Die Auf- und Absteigeoperatoren reduzieren sich auf Projektionsoperatoren auf die beiden Zustände Spin up/down:

$$J^+ = \frac{1}{2}(\sigma_x + i\sigma_y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$J^- = \frac{1}{2}(\sigma_x - i\sigma_y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Addition von Drehimpulsen:

Die Drehimpulszustände von Teilchen mit Bahndrehimpuls und Spin oder von zusammengesetzten Teilchen mit mehreren Komponenten mit Spin entsprechen **Produkt Darstellungen** aus den Drehimpulsdarstellungen der Komponenten, die im allgemeinen **reduzibel** sind.

Die Zustände des Gesamtdrehimpulses $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$ mit $j = j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1, \dots, |j_1 - j_2|$ und $j_z = j_{z1} + j_{z2}$ bilden $2j + 1$ -dimensionale **irreduzible** Darstellungen der $SU(2)$ -Gruppe, die man durch Zerlegung (**Ausreduzieren**) der reduzierbaren Produkt Darstellungen erhält; z.B.:

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & & & & \\ \cdot & \cdot & & & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$$3_{j=1} \otimes 2_{j=1/2} = 2_{j=1/2} \oplus 4_{j=3/2}$$

$$2_{j=1/2} \otimes 2_{j=1/2} = 1_{j=0} \oplus 3_{j=1}$$

$$(2 \otimes 2) \otimes 2 = (1 \otimes 2) \oplus (3 \otimes 2) = 1 \oplus (2 \oplus 4)$$

Beispiele innerer Symmetrien:

1. $U(1)$ -Phasentransformationen der Wellenfunktionen:
führen zur Wahrscheinlichkeitserhaltung und Erhaltung der elektrischen Ladung (s.u.).
2. **Isospinsymmetrie** $SU(2)$ der starken Wechselwirkung,
analog zur räumlichen Drehimpulssymmetrie.

Fundamentale Dublettdarstellung:

$$\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \text{ bzw. } \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}.$$

3. Schwache Isospinsymmetrie $SU(2)_W$, Eichsymmetrie der schwachen Wechselwirkung:

Fundamentale Dublettdarstellung: Quark- und Lepton-Dubletts.

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}.$$

Fermionen und Antifermionen befinden sich in der gleichen Darstellung und besitzen daher die gleichen schwachen Ladungen.

Die Eichbosonen (W^+, Z^0, W^-) bilden ein Multipllett der 3-dimensionalen adjungierten Darstellung entsprechend den drei Generatoren (I^+, I^0, I^-) der $SU(2)$ -Gruppe. Die Isospin-Triplett-Darstellung entspricht der Spin 1-Darstellung der räumlichen $SU(2)$ -Gruppe.

4. $SU(3)$ flavour-Symmetrie der starken Wechselwirkung: das Quarkmodell

Es gibt zwei verschiedene fundamentale Triplettdarstellungen: (u, d, s) und $(\bar{u}, \bar{d}, \bar{s})$.

Quarks und Antiquarks sind in verschiedenen (zueinander konjugierten) Multipletts.

Die Multipletts der Mesonen und Baryonen werden durch Produkte der fundamentalen Darstellungen und Zerlegen in irreduzible Unterräume (Ausreduzieren) gewonnen, z.B.

$$3 \otimes \bar{3} = 1 \oplus 8$$

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10$$

$$\bar{3} \otimes \bar{3} \otimes \bar{3} = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10$$

Baryonen und Antibaryonen (qqq) befinden sich in unterschiedlichen Multipletts, während Mesonen und Antimesonen ($q\bar{q}$) in den gleichen Multipletts auftreten.

1.2.4 Diskrete Symmetrien

Symmetrien der freien Teilchen (Beispiel: Fermionen) und der elektromagnetischen und starken, nicht der schwachen Wechselwirkung:

1. Parität P (Raumspiegelung):

$$\vec{x} \longrightarrow -\vec{x}, \vec{p} \longrightarrow -\vec{p}.$$

$$\psi(t, \vec{x}) \longrightarrow \psi^P(t, -\vec{x}) = \eta_P \gamma^0 \psi(t, \vec{x})$$

erfüllt die raumgespiegelte Dirac-Gleichung.

2. Zeitinversion T: $t \longrightarrow -t$.

$$\psi(t, \vec{x}) \longrightarrow \psi^T(-t, \vec{x}) = i\gamma^1 \gamma^3 \psi^*(t, \vec{x})$$

erfüllt die zeitgespiegelte Dirac-Gleichung.

3. Ladungskonjugation C:

Teilchen \longrightarrow Antiteilchen, $Q_f \longrightarrow -Q_f$.

$$\psi(t, \vec{x}) \longrightarrow \psi^C(t, \vec{x}) = i\eta_C \gamma^2 \psi^*(t, \vec{x})$$

erfüllt die konjugierte Dirac-Gleichung.

⇒ CPT-Symmetrie,

⇒ gleiche Lebensdauern und Massen von Teilchen und Antiteilchen.

CPT-Erhaltung gilt allgemein für jede lokale, lorentzinvariante Feldtheorie mit $\mathcal{L}^\dagger = \mathcal{L}$ und Spin-Statistik-Relation (und damit für alle Wechselwirkungen).

(Schwinger 1951, Pauli 1955, Lüders 1957).

Skalare wie $\bar{\psi}\psi$ sind invariant unter Raumspiegelung.

Pseudoskalare wie $\bar{\psi}\gamma^5\psi$ wechseln das Vorzeichen unter Raumspiegelung.

(4-) Vektoren wie $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ (Strom): Zeitkomponente erhalten, Richtungsumkehr der Raumkomponente bei Raumspiegelung.

(4-) Axialvektoren wie $\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi$: Raumkomponente erhalten, Vorzeichenwechsel der Zeitkomponente bei Raumspiegelung.

1.2.5 Symmetrien und Erhaltungssätze

Mit Hilfe des Lagrange-Formalismus kann man leicht die Verbindung zwischen Symmetrien der Feldgleichungen und erhaltenen physikalischen Observablen bzw. Quantenzahlen der Teilchen herstellen.

Das ist der Inhalt des **Noether-Theorems** (E. Noether, 1918):

Mit jeder kontinuierlichen Symmetrietransformation der Lagrangefunktion (Invarianz bis auf totale Ableitung) ist ein Erhaltungssatz verbunden.

Invarianz unter Raum/Zeittranslationen führt z.B. zur Energie/Impulserhaltung, Invarianz unter Drehungen zu Drehimpulserhaltung (Jacobi, 1842).

1.2.5.1 Der Energieerhaltungssatz in der klassischen Mechanik

folgt nach dem Noether-Theorem aus der Homogenität der Zeit, d.h. aus der Kovarianz der Bewegungsgleichungen und der Invarianz der Lagrange-Funktion unter Zeittranslationen (Schütz, 1897):

$$t \longrightarrow t' = t + \delta t.$$

Damit ist die Variation der Lagrange-Funktion für ein abgeschlossenes System ohne explizite Zeitabhängigkeit:

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dt} &= \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \\ &= \sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right)\end{aligned}$$

unter Benutzung der Euler-Lagrange-Gleichungen.

Damit gilt der Erhaltungssatz

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \right) = 0$$

für die Gesamtenergie

$$E = H = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = \sum_i p_i \dot{q}_i - L.$$

Da $L(q_i, \dot{q}_i) = T(q_i, \dot{q}_i) - V(q_i)$ für abgeschlossene Systeme und $T \sim \dot{q}_i^2$, gilt

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T$$

und damit

$$E = T + V = H.$$

1.2.5.2 Erhaltungssätze in der Feldtheorie

1) Phasentransformation der skalaren (komplexen) Felder:
U(1)-Eichsymmetrie:

$$\begin{aligned}\phi(x) &\longrightarrow \phi'(x) = e^{iQ\alpha}\phi(x), \\ \phi^*(x) &\longrightarrow \phi^{*'}(x) = e^{-iQ\alpha}\phi^*(x).\end{aligned}$$

Führt zu infinitesimalen Variationen der Felder

$$\begin{aligned}\phi(x) &\longrightarrow \phi'(x) = \phi(x) + \delta\phi(x) = \phi(x) + iQ(\delta\alpha)\phi(x), \\ \phi^*(x) &\longrightarrow \phi^{*'}(x) = \phi^*(x) + \delta\phi^*(x) = \phi^*(x) - iQ(\delta\alpha)\phi^*(x)\end{aligned}$$

und es gilt $\delta(\partial_\mu\phi) = iQ(\delta\alpha)\partial_\mu\phi$, da $\delta\alpha$ eine nicht ortsabhängige Konstante ist.

Falls die Lagrangedichte $\mathcal{L}(\phi, \phi^*, \partial_\mu\phi, \partial_\mu\phi^*)$ eichinvariant ist, gilt mit den Euler-Lagrange-Gleichungen für beliebige $\delta\alpha$:

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^*}\delta\phi^* + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^*)}\delta(\partial_\mu\phi^*) \\ &= \left[\partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right] iQ(\delta\alpha)\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} iQ(\delta\alpha)\partial_\mu\phi + c.c. \\ &= iQ(\delta\alpha)\partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\phi \right] - iQ(\delta\alpha)\partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^*)}\phi^* \right] \equiv 0,\end{aligned}$$

d.h. es gilt die Kontinuitätsgleichung für die 4-Stromdichte $j^\mu = (\rho, \vec{j})$ der Ladung $Q = \int d^3x \rho$

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{\partial}{\partial t}\rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad (1)$$

mit

$$j^\mu \equiv -iQ \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \phi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} \phi^* \right), \quad (2)$$

so daß die Ladung Q in einem abgeschlossenen System eine Erhaltungsgröße ist:

$$\frac{d}{dt} Q = 0.$$

Innere (globale) Eichsymmetrien der Teilchenfelder führen zu erhaltenen Ladungen, internen Quantenzahlen.

Erhaltene Quantenzahlen unter der elektromagnetischen und starken Wechselwirkung ($U(1)$ -Eichsymmetrien):

- Leptonflavour,
- Quarkflavour,

und auch bei der schwachen Wechselwirkung:

- Leptonzahl,
- Leptongenerationenzahl (außer bei Neutrinooszillationen),
- Baryonenzahl (Quarks).

2) Raum-Zeit-Translation (o.E. infinitesimal):

$$x_\mu \longrightarrow x'_\mu = x_\mu + \delta x_\mu.$$

Falls \mathcal{L} forminvariant unter der Transformation ist, ändert sich \mathcal{L} um

$$\delta\mathcal{L} = \mathcal{L}[x'] - \mathcal{L}[x] = \delta x^\nu \frac{d\mathcal{L}}{dx^\nu} = \delta x^\nu \partial_\nu \mathcal{L} \equiv \delta x_\mu g^{\mu\nu} \partial_\nu \mathcal{L}. \quad (3)$$

Mit

$$\delta\phi = \phi(x') - \phi(x) = \delta x^\mu \partial_\mu \phi(x).$$

und

$$\delta(\partial_\mu \phi) = \partial_\mu \phi(x') - \partial_\mu \phi(x) = \delta x^\nu \partial_\nu \partial_\mu \phi(x)$$

gilt außerdem bei Abhängigkeit der Lagrangedichte von den Raum-Zeit-Koordinaten nur über die Felder $\phi(x)$:

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} \delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta(\partial_\mu\phi).$$

Mit den Euler-Lagrange-Gleichungen kann man $\partial\mathcal{L}/\partial\phi$ eliminieren, so daß

$$\delta\mathcal{L} = \left[\partial_\nu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi)} \right] \delta x^\mu \partial_\mu\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi)} \delta x^\mu \partial_\mu \partial_\nu\phi \quad (4)$$

$$= \partial_\nu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi)} \delta x^\mu \partial_\mu\phi \right]. \quad (5)$$

Nach Gleichsetzen der Ausdrücke (3) und (5) für $\delta\mathcal{L}$ gilt für beliebige δx^μ :

$$\delta x_\mu \partial_\nu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi)} \partial^\mu\phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \right] = 0, \quad (6)$$

d.h. es gilt die Kontinuitätsgleichung

$$\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = 0 \quad (7)$$

für den **Energie-Impuls-Spannungsdichte-Tensor** (in eckigen Klammern in Gl.(6)):

$$\Theta^{\mu\nu} \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi)} \partial^\mu\phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (8)$$

Es folgt u.a. die Kontinuitätsgleichung für die Energieflußdichte:

$$\partial_\mu \Theta^{\mu 0} \equiv \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{H} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{P}} = 0, \quad (9)$$

wobei

$$\Theta^{00} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} \partial^0 \phi - \mathcal{L} = 2\mathcal{T} - \mathcal{L} = \mathcal{T} + \mathcal{V} = \mathcal{H} \quad (10)$$

die Energiedichte \mathcal{H} und entsprechend $\Theta^{0\nu} \equiv \mathcal{P}^\nu$ die 4-Impulsdichte sind.

Damit gelten nach (9) für die Gesamtenergie (Hamiltonfunktion) $H \equiv \int d^3x \Theta^{00}$ bzw. für den 4-Impuls $P^\nu \equiv \int d^3x \Theta^{0\nu}$ in einem abgeschlossenen System die Erhaltungssätze

$$\frac{d}{dt} H = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt} P^\nu = 0. \quad (11)$$

Auf analoge Weise führt die Rotationssymmetrie des Raums zur Drehimpulserhaltung und erhaltenen internen Spinquantenzahlen ($SO(3)$ - bzw. $SU(2)$ -Symmetrie des Raums).

Rotationen der Raum-Zeit entsprechen der Lorentz-Invarianz (Relativitätstheorie).

1.2.6 Eichsymmetrien und Wechselwirkungen

1.2.6.1 Globale Eichinvarianz

Für Quantenfelder können die Gesetze der elektromagnetischen Wechselwirkung aus einem Eichprinzip hergeleitet werden (H. Weyl 1921, 1929).

Die Erwartungswerte quantenmechanischer Observabler (einschließlich der Lagrangefunktion!)

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \int \psi^* \mathcal{O} \psi$$

sind invariant unter **globalen Phasenrotationen** der Wellenfunktion

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = e^{i\alpha} \psi(x).$$

Nur relative Phasen zwischen Zuständen sind meßbar.

Die Invarianz der Lagrangefunktion (Forminvarianz der Wellengleichung) unter Phasenrotationen entspricht einer **globalen U(1)-Symmetrie**, genannt "Eichsymmetrie", die nach dem Noether'schen Theorem zur Erhaltung der Wahrscheinlichkeit und von Ladungen führt.

U(1) ist die Gruppe der unitären Transformationen mit der niedrigsten Dimension 1; Phasenrotationen der komplexen Wellenfunktionen sind eine Darstellung der Gruppe auf dem Hilbertraum.

1.2.6.2 Lokale Eichsymmetrie

Die quantenmechanischen Erwartungswerte sollen invariant sein unter lokaler Phasenwahl der Wellenfunktionen oder Felder, d.h. unabhängig an verschiedenen Raum-Zeit-Punkten:

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = e^{iQ\alpha(x)}\psi(x).$$

Ortsabhängige Phasentransformationen (lokale Eichtransformationen) bedeuten für die Ableitungen der Felder in den Wellengleichungen:

$$\partial_\mu\psi(x) \longrightarrow \partial_\mu\psi'(x) = e^{iQ\alpha(x)}[\partial_\mu\psi(x) + iQ(\partial_\mu\alpha(x))\psi(x)].$$

Invarianz der Lagrangedichte und Forminvarianz der Wellengleichungen kann erreicht werden, indem die gewöhnliche Ableitung durch eine **eich-kovariante Ableitung** ersetzt wird:

$$\partial_\mu \longrightarrow D_\mu \equiv \partial_\mu + ieQA_\mu(x),$$

wobei $q = eQ$ die elektrische Ladung des Feldes $\psi(x)$ ist ($e = \text{Elementarladung}$, $Q = \text{Ladungsquantenzahl}$) und $A_\mu(x)$ das 4-Potential des elektromagnetischen Feldes, das sog. Eichvektorfeld zur Eichgruppe $U(1)$ mit Spin 1, das unter den Phasenrotationen transformiert wie

$$A_\mu(x) \longrightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x)$$

(\equiv Eichtransformation des elektromagnetischen Feldes).

Damit gilt

$$\begin{aligned} D_\mu \psi(x) &= \partial_\mu + ieQA_\mu \longrightarrow \\ D'_\mu \psi'(x) &= (\partial_\mu + ieQA'_\mu(x))e^{iQ\alpha(x)}\psi(x) \\ &= e^{iQ\alpha(x)}[\partial_\mu + iQ\partial_\mu\alpha(x) + ieQA_\mu(x) - iQ\partial_\mu\alpha(x)]\psi \\ &= e^{iQ\alpha(x)}[\partial_\mu + ieQA_\mu(x)]\psi(x) \equiv e^{iQ\alpha(x)}D_\mu\psi(x) \end{aligned}$$

und $\psi^* D_\mu \psi$ ist invariant unter lokalen Phasentransformationen.

Dies wurde durch die Einführung einer Wechselwirkung für das Feld ψ , der elektromagnetischen Wechselwirkung für die U(1)-Phasentransformationen, erreicht.

Die globale U(1)-Symmetrie der Feldgleichungen für $\psi(x)$ führt zur Erhaltung der elektrischen Ladung, der Quellen des Eichfeldes, auch bei Wechselwirkung mit dem elektromagnetischen Feld. Die Eichfeldgleichungen mit der zugehörigen Eichinvarianz enthalten automatisch Ladungserhaltung.

Die Wechselwirkung (Kopplungsterme zwischen Materiefeld $\psi(x)$ und Eichwechselwirkungsfeld $A_\mu(x)$) ist (eindeutig) festgelegt durch die Forderung der lokalen Phaseninvarianz, das **lokale Eichprinzip**, d.h. durch die **kovariante Ableitung**

$$D_\mu \psi(x) = \partial_\mu \psi(x) + ieQA_\mu(x)\psi(x)$$

(minimale eichinvariante Kopplung).

Die Ersetzung

$$i\partial_\mu \longrightarrow iD_\mu = i\partial_\mu - qA_\mu$$

entspricht $(p_\mu \longrightarrow i\partial_\mu)$ der Ersetzung

$$P_\mu \longrightarrow P_\mu - qA_\mu$$

für den kanonischen Impuls bei Einführung der Wechselwirkung mit dem elektromagnetischen Feld in der klassischen Mechanik.

Beispiel 1:

Elektromagnetische Wechselwirkung zwischen Fermionen (Elektronen) und dem Photonfeld (QED):

Die Lagrangedichte für das freie Dirac-Feld

$$\mathcal{L}_{\text{frei}} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi$$

wird ersetzt durch die lokal eichinvariante Form mit minimaler Kopplung

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi \\ &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - eQA_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \\ &= \mathcal{L}_{\text{frei}} - j^\mu A_\mu\end{aligned}$$

mit dem (erhaltenen) elektromagnetischen Strom
 $j^\mu = eQ\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$.

Zusammen mit der Lagrangedichte für das freie elektromagnetische Feld ist die Lagrangedichte der Quantenelektrodynamik:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{QED} &= \mathcal{L}_{\text{frei}}^{\text{Photon}} + \mathcal{L}_{\text{frei}}^{\text{Fermion}} + \mathcal{L}_{\text{WW}} \\ &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - j^\mu A_\mu \\ &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}i\gamma^\mu \partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi - j^\mu A_\mu \\ &= \mathcal{L}_{\text{kin}}^{\text{Photon}} + \mathcal{L}_{\text{kin}}^{\text{Fermion}} + \mathcal{L}_{\text{Masse}}^{\text{Fermion}} + \mathcal{L}_{\text{WW}} = T - V.\end{aligned}$$

Die Beiträge zur gesamten Lagrangedichte sind additiv und erfüllen die U(1)-Eichinvarianz.

Beispiel 2:

Elektromagnetische Wechselwirkung zwischen geladenen Spin-0-Bosonen und dem Photonfeld:

Die Lagrangedichte für das freie Klein-Gordon-Feld

$$\mathcal{L}_{\text{frei}} = \partial_{\mu}\phi^* \partial^{\mu}\phi - m^2\phi^* \phi$$

wird ersetzt durch die lokal eichinvariante Form mit minimaler Kopplung ($q = eQ$)

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (D_{\mu}\phi)^* D^{\mu}\phi - m^2\phi^* \phi \\ &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \partial_{\mu}\phi^* \partial^{\mu}\phi - m^2\phi^* \phi \\ &\quad -iq[\phi^* \partial^{\mu}\phi - (\partial^{\mu}\phi^*)\phi]A_{\mu} + q^2 A_{\mu}A^{\mu}\phi^* \phi \\ &= \mathcal{L}_{\text{frei}} - j^{\mu}A_{\mu} + q^2 A_{\mu}A^{\mu}\phi^* \phi \\ &= \mathcal{L}_{\text{kin}}^{\text{Photon}} + \mathcal{L}_{\text{kin}}^{\text{Boson}} + \mathcal{L}_{\text{Masse}}^{\text{Boson}} + \mathcal{L}_{\text{WW}}.\end{aligned}$$

Dabei ist $j^{\mu} = iq[\phi^* \partial^{\mu}\phi - (\partial^{\mu}\phi^*)\phi]$ der erhaltene elektromagnetische Strom für die freien Bosonen.

Nach dem Noether-Theorem hat der erhaltene Strom für die an das Photonfeld koppelnden Bosonen eine andere Form. Der Wechselwirkungsterm erhält einen zusätzlichen Beitrag in der Form einer Kontaktwechselwirkung zwischen Photonen und Materie-Bosonen (eich- und lorentzinvariant).

1.2.6.3 Nicht-Abelsche Eichsymmetrien

Erweiterung der Isospinsymmetrie $SU(2)$ zu einer lokalen Eichsymmetrie

(Yang, Mills 1954):

Freie Lagrangefunktion für Nukleonen (Proton, Neutron):

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi} I (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi.$$

Proton und Neutron bilden dabei ein Isotospindublett (2-dimensionale Darstellung der Isospingruppe).

$$\psi = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}.$$

Beide Fermionfelder $p(x)$ und $n(x)$ sind jeweils 4-Spinoren.

Die freie Lagrangefunktion ohne Wechselwirkung ist diagonal im 2-dimensionalen Isospinraum (2-dim. Einheitsmatrix I) und invariant unter globalen Isospinrotationen

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = e^{i\vec{\alpha} \cdot \vec{I}} \psi(x) = e^{i\vec{\alpha} \cdot \vec{\tau}/2} \psi(x),$$

wobei $\vec{\tau}$ der 3-Isovektor der Pauli'schen 2×2 Spinmatrizen ist (die drei Generatoren der Isospingruppe $SU(2)$, $\vec{I} = \vec{\tau}/2$, in der fundamentalen 2-dimensionalen Darstellung; Bezeichnung $\vec{\tau}$ statt $\vec{\sigma}$ für den Isospin).

Wie bei der $U(1)$ -Symmetrie der elektromagnetischen Wechselwirkung:

Übergang zu einer **lokalen $SU(2)$ -Eichsymmetrie**, d.h. Forderung nach Invarianz der Lagrangefunktion und Feldgleichungen unter **lokalen Eichtransformationen**

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = e^{i\vec{\alpha}(x)\cdot\vec{\tau}/2}\psi(x) \equiv G(x)\psi(x).$$

Damit transformiert der 4-Gradient des Feldes wie

$$\partial_\mu\psi(x) \longrightarrow G(x)(\partial_\mu\psi(x)) + (\partial_\mu G(x))\psi(x).$$

\implies Einführen einer **kovarianten Ableitung** (kovariant unter den lokalen Eichtransformationen $G(x)$):

$$D_\mu(x) = I\partial_\mu + igB_\mu(x)$$

mit der 2×2 -Einheitsmatrix I auf dem Isospinraum und einer Kopplungskonstanten g , die die Stärke der Eichwechselwirkung angibt.

Das Eichvektorfeld $B_\mu(x)$ ist eine 2×2 -Matrix auf dem Isospinraum, definiert durch ($a = 1, 2, 3$):

$$\begin{aligned} B^\mu(x) &= \frac{1}{2} \vec{\tau} \cdot \vec{b}^\mu(x) = \frac{1}{2} \tau_a b_a^\mu(x) \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} b_3^\mu(x) & b_1^\mu(x) - ib_2^\mu(x) \\ b_1^\mu(x) + ib_2^\mu(x) & -b_3^\mu(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit dem Isektor $\vec{b}_\mu = (b_1^\mu, b_2^\mu, b_3^\mu)$ der **drei Eichvektorfelder** $b_i(x)$, die den **drei Generatoren (Ladungsoperatoren)** der **$SU(2)$ -Eichsymmetrie** $\vec{I} = \vec{\tau}/2$ entsprechen.

Um die lokale nicht-Abelsche $SU(2)$ -Eichsymmetrie zu erhalten, müssen also 3 neue Eichvektorpotentiale eingeführt werden, die 3 Eichbosonfeldern entsprechen, die die Eichwechselwirkungen vermitteln.

(Dies erinnert an die 3 Austauscheteilchen W^\pm und Z^0 der schwachen Wechselwirkung, die ebenfalls globale $SU(2)$ -Symmetrie besitzt, aber an Quark- und Leptonfelder koppelt.)

Die kovariante Ableitung soll unter lokalen Eichtransformationen ebenso transformieren wie die Felder, um die lokale Eichinvarianz der Lagrangefunktion zu gewährleisten, d.h.

$$D_\mu \psi \longrightarrow D'_\mu \psi' = G(x)(D_\mu \psi).$$

Diese Forderung definiert das Transformationsverhalten der Eichvektorfelder:

$$\begin{aligned}
 D'_\mu \psi' &= (\partial_\mu + igB'_\mu)\psi' \\
 &= G(\partial_\mu \psi) + (\partial_\mu G)\psi + igB'_\mu(G\psi) \\
 &\equiv G(\partial_\mu + igB_\mu)\psi \\
 &= G(\partial_\mu \psi) + igG(B_\mu \psi)
 \end{aligned}$$

und damit

$$igB'_\mu(G\psi) = igG(B_\mu \psi) - (\partial_\mu G)\psi$$

für beliebige Werte des Nukleonfelds ψ , d.h. nach Multiplizieren mit G^{-1} :

$$\begin{aligned}
 B'_\mu &= GB_\mu G^{-1} + \frac{i}{g}(\partial_\mu G)G^{-1} \\
 &= G \left[B_\mu + \frac{i}{g}G^{-1}(\partial_\mu G) \right] G^{-1}.
 \end{aligned}$$

Dies ist die nicht-Abelsche Verallgemeinerung der $U(1)$ -Eichtransformation des elektromagnetischen Potentials (Isoskalar), die analog lautet:

$$\begin{aligned}
 A'_\mu &= G_{EM}A_\mu G_{EM}^{-1} + \frac{i}{eQ}(\partial_\mu G_{EM})G_{EM}^{-1} \\
 &\equiv A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu \alpha(x)
 \end{aligned}$$

mit der lokalen $U(1)$ -Eichtransformation

$$G_{EM}(x) = e^{iQ\alpha(x)}.$$

1.3 Das Standardmodell der Teilchenphysik: Die fundamentalen Wechselwirkungen und ihre Vereinheitlichung

Lokale Eichfeldtheorien (Yang-Mills-Theorien; Yang und Mills 1954) erlauben eine einheitliche Beschreibung aller bekannten Wechselwirkungen der fundamentalen Materiebausteine (Leptonen und Quarks) basierend auf einem Symmetrieprinzip.

Die Eichsymmetriegruppen legen die Eigenschaften der Wechselwirkungen vollständig fest. Die elementaren Fermionen (Spin $\frac{1}{2}$) besetzen die Multipletts der fundamentalen Darstellungen der Eichsymmetrien.

Die Generatoren der Eichsymmetriegruppen (Lie-Gruppen) sind die verallgemeinerten Ladungsoperatoren der Wechselwirkungen (hermitesch). Die Wechselwirkung wird vermittelt durch den Austausch von Vektorbosonen (Spin 1), den Eichfeldquanten.

Die elektromagnetische, die schwache und die starke Wechselwirkung lassen sich durch die einfachsten speziellen unitären Symmetriegruppen beschreiben:

Wechselwirkung	El. magn.	Schwach	Stark
Eichsymmetrie	$U(1)$	$SU(2)$	$SU(3)$
Theorie	QED	GSW	QCD
Ladungen	elektrische Ladung	3 schwache Ladungen	8 Farbladungen
Eichbosonen	Photon	W^\pm, Z^0	8 Gluonen

Die Zahl der unabhängigen Parameter und damit der Generatoren (verallgemeinerte Ladungen) der Gruppe $SU(N)$ ist $N^2 - 1$ (Ordnung der Gruppe).

Die Dimension der fundamentalen Darstellung ist $N =$ Zahl der inneren Freiheitsgrade der Teilchenzustände.

Die Eichsymmetriegruppe des Standardmodells ist das Produkt der Lie-Gruppen

$$U(1) \otimes SU(2) \otimes SU(3)$$

Die freien Fermionenzustände des Standardmodells sind daher ($f = e, \mu, \tau, \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau, u, d, s, c, b, t$):

. Teilchen :

$$\psi_f^+(x; E > 0) = u(p)e^{-ip_\mu x^\mu} \times e^{iQ_f \alpha} \times \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L \times \begin{pmatrix} r \\ g \\ b \end{pmatrix}_q$$

. Antiteilchen :

$$\psi_f^-(x; E < 0) = v(p)e^{ip_\mu \cdot x^\mu} \times e^{-iQ_f \alpha} \times \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_R \times \begin{pmatrix} \bar{r} \\ \bar{g} \\ \bar{b} \end{pmatrix}_{\bar{q}}$$

Vorbild für die moderne Beschreibung der Teilchenphysik durch Eichtheorien ist die Quantenelektrodynamik.

1.3.1 Die Quantenelektrodynamik (QED)

Eichfeldtheorie mit der Symmetriegruppe $U(1)$ (elektrische Ladung).

Eichfeld (Photonfeld): 4-Vektorpotential $A_\mu(x)$.

Eichboson (Photon): Spin 1, masselos aufgrund der Eichsymmetrie.

Lagrangedichte für Kopplung an elementare Fermionen ($f = e, \mu, \tau, u, d, s, c, b, t$):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{QED} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \sum_f \bar{\psi}_f(i\gamma^\mu D_\mu - m_f)\psi_f \\ &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \sum_f \bar{\psi}_f(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_f)\psi_f \\ &\quad - e \left(\sum_f Q_f \bar{\psi}_f \gamma^\mu \psi_f \right) A_\mu \\ &= \mathcal{L}_{\text{frei}} + \mathcal{L}_{WW}\end{aligned}$$

mit der kovarianten Ableitung

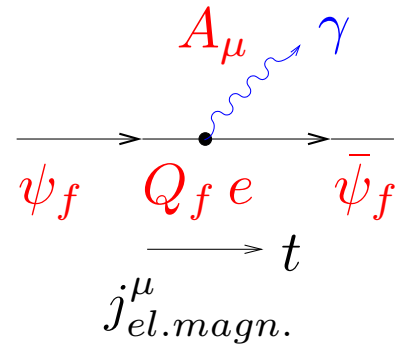
$$D_\mu = \partial_\mu + ieQ_f A_\mu(x)$$

und dem Feldtensor

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\nu A_\mu(x) - \partial_\mu A_\nu(x).$$

Strom-Eichfeld-Kopplung:

$$\mathcal{L}_{WW} = -e j_{\text{el.magn.}}^\mu A_\mu$$



mit dem elektromagnetischen Strom

$$j_{\text{el.magn.}}^\mu = \sum_f Q_f \bar{\psi}_f \gamma^\mu \psi_f.$$

Die Kopplungsstärke ist gegeben durch die Elementarladung e .

Q_f ist Eigenwert des Ladungsoperators (Generator der $U(1)$ -Eichsymmetriegruppe).

Lokale $U(1)$ -Eichtransformationen:

$$\begin{aligned} \psi_f(x) &\longrightarrow e^{iQ_f\alpha(x)}\psi_f(x) \\ \bar{\psi}_f(x) &\longrightarrow e^{-iQ_f\alpha(x)}\bar{\psi}_f(x) \\ A_\mu(x) &\longrightarrow A_\mu(x) - \partial_\mu\alpha(x) \\ D_\mu\psi_f(x) &\longrightarrow e^{iQ_f\alpha(x)}D_\mu\psi_f(x). \end{aligned}$$

d.h. $\bar{\psi}_f\gamma_\mu\psi_f$ und $\bar{\psi}_f D_\mu\psi_f$ sind invariant.

Globale U(1)-Eichsymmetrie \implies Erhaltung der elektrischen Ladung (Noether-Theorem):

Kontinuitätsgleichung:

$$\partial_\mu j_{el.magn.}^\mu = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0.$$

$$\implies \frac{dQ}{dt} = \int d^3x \frac{\partial \rho}{\partial t} = - \int d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = - \oint d\vec{\sigma} \cdot \vec{j} = 0.$$

Die Eichinvarianz verlangt $m_\gamma = 0$.

Experimentell:

$m_\gamma < 4.5 \cdot 10^{-16}$ eV aus der Vermessung des Magnetfelds des Jupiter durch die Pioneer 10-Sonde und

$m_\gamma < 3 \cdot 10^{-27}$ eV aus der Vermessung des galaktischen Magnetfelds.

Die Eichwechselwirkungen müssen unendliche Reichweite besitzen!

Weitere Symmetrien der QED:

- Lorentzinvarianz + Invarianz unter Raum-Zeit-Translationen (Homogenität und Isotropie der Raum-Zeit)

⇒ Energie-Impuls- und Drehimpulserhaltung (Noether-Theorem).

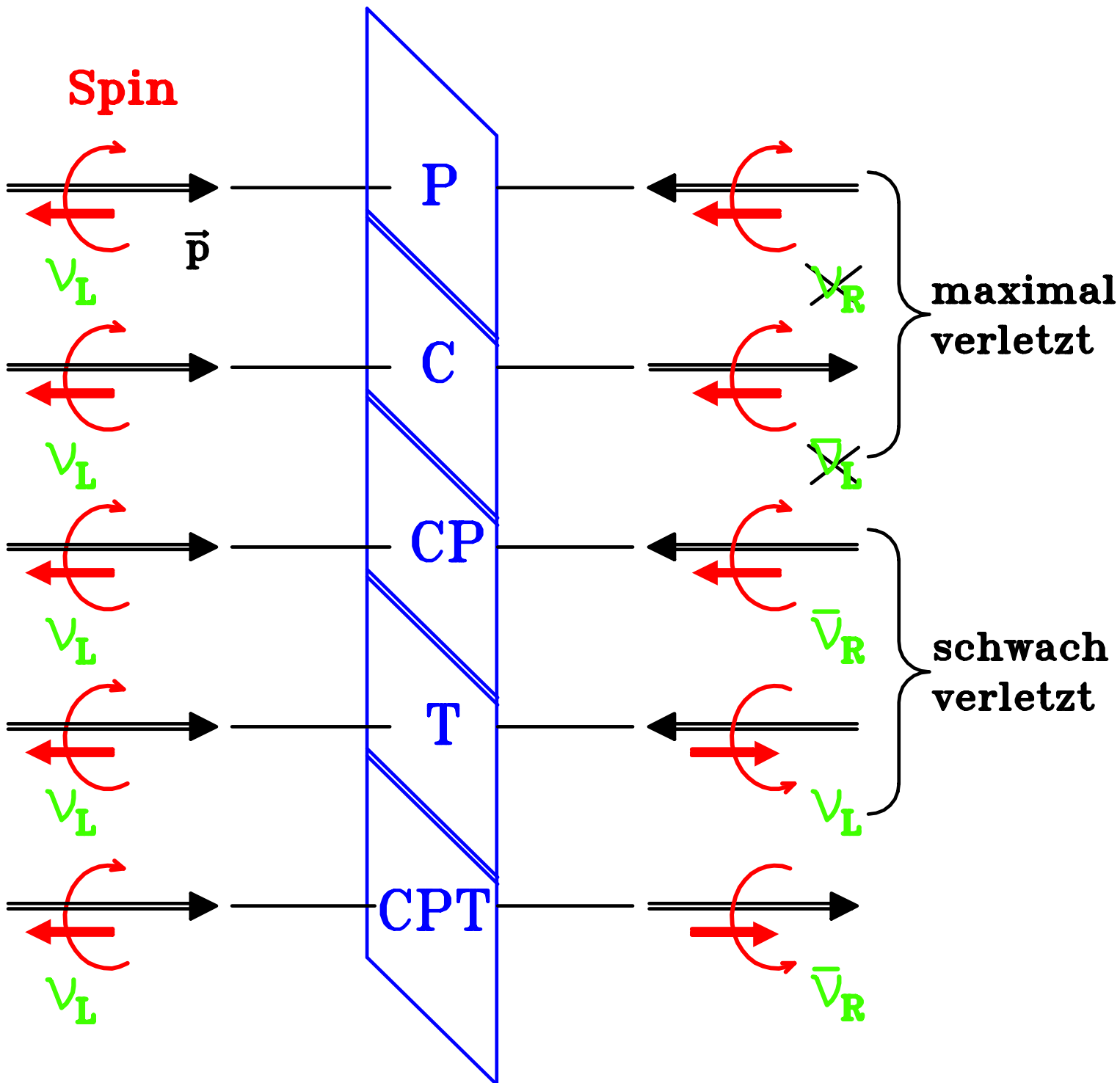
- Diskrete Symmetrien:

1. Lepton- und Quarkflavour-Erhaltung.

2. Parität P (Raumspiegelung): $\vec{x} \longrightarrow -\vec{x}$, $\vec{p} \longrightarrow -\vec{p}$.

3. Zeitinversion T: $t \longrightarrow -t$.

4. Ladungskonjugation C: $Q_f \longrightarrow -Q_f$.



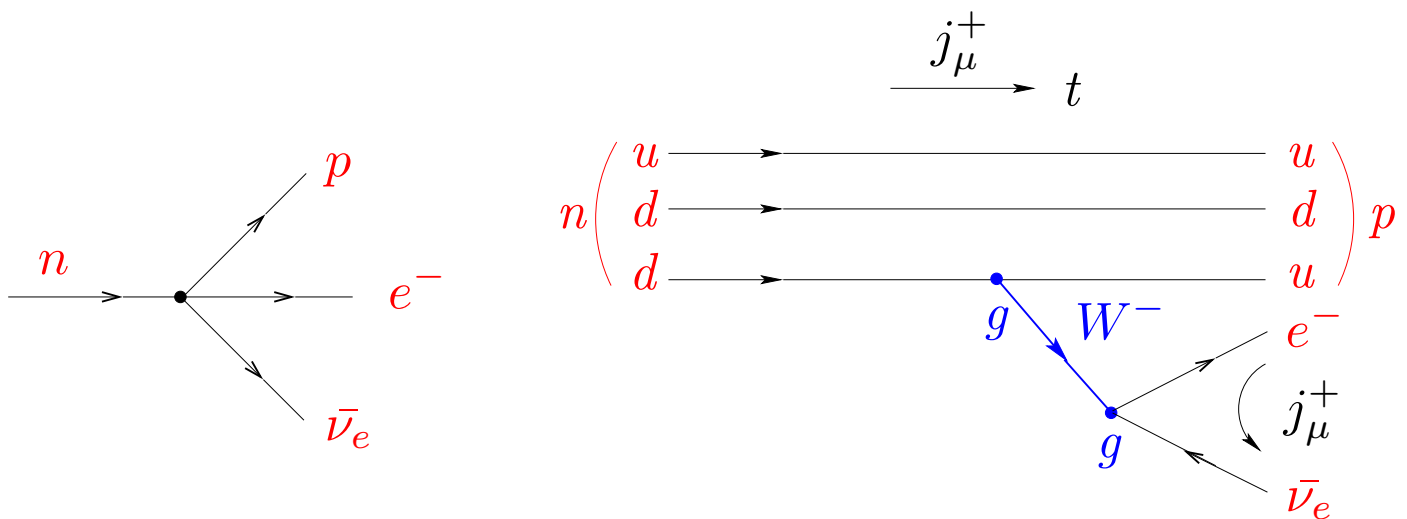
1.3.2 Die Schwache Wechselwirkung

Beschreibung in Analogie zur QED mit Kopplung schwacher Ströme an massive, elektrisch geladene Feldquanten W^\pm :

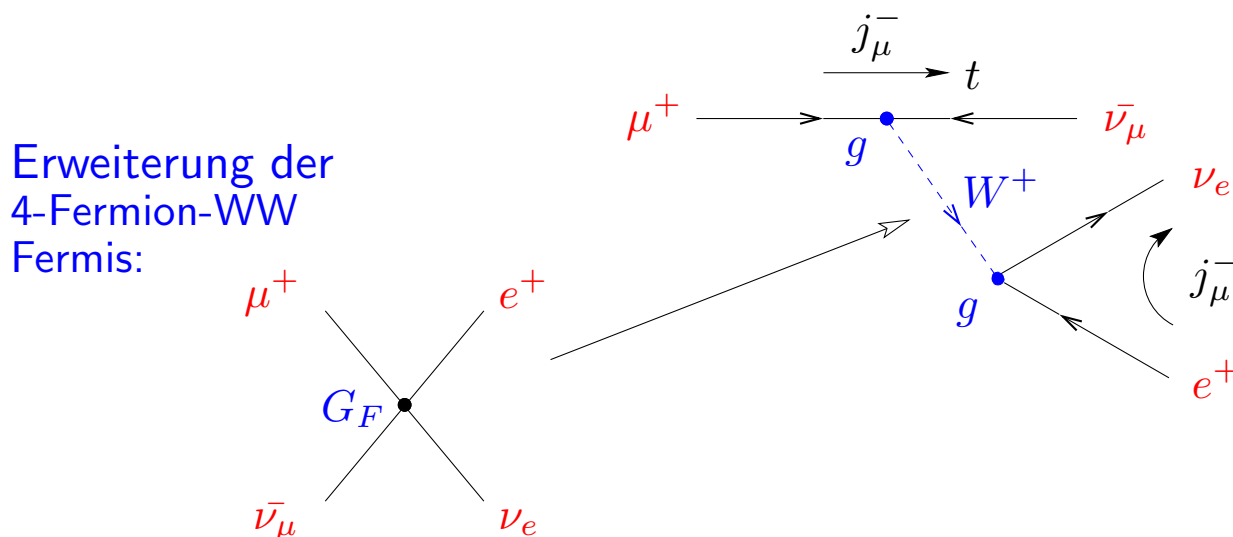
$$j^{\mu-} W_\mu^+ + j^{\mu+} W_\mu^-$$

Kurzreichweitige Wechselwirkung mit Änderung der Lepton- und Quark-Flavour.

Nuklearer β -Zerfall: $n \longrightarrow p e^- \bar{\nu}_e$



Myonzerfall: $\mu^+ \longrightarrow e^+ \nu_e \bar{\nu}_\mu$



Schwache Übergänge legen Paarung der elementaren Fermionen in Dubletts nahe, der fundamentalen Darstellung der SU(2)-Gruppe (in Analogie zu Spin und Isospin).

Linkshändige Zustände in SU(2)-Dubletts:

$$\begin{array}{ccccccc}
 L_\ell : & \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L & \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}_L & \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix}_L & Q_f & Y_f & I_f^0 \\
 & & & & 0 & -1 & +\frac{1}{2} \\
 & & & & -1 & -1 & -\frac{1}{2} \\
 \\
 L_q : & \begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}_L & \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix}_L & \begin{pmatrix} t \\ b' \end{pmatrix}_L & +\frac{2}{3} & +\frac{1}{3} & +\frac{1}{2} \\
 & & & & -\frac{1}{3} & +\frac{1}{3} & -\frac{1}{2}
 \end{array}$$

Rechtshändige Zustände in SU(2) – Singulettts :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \nu_{eR} & \nu_{\mu R} & \nu_{\tau R} & 0 & 0 & 0 \\
 e_R^- & \mu_R^- & \tau_R^- & -1 & -2 & 0 \\
 u_R & c_R & t_R & +\frac{2}{3} & +\frac{4}{3} & 0 \\
 d_R & s_R & b_R & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0
 \end{array}$$

$$Q = I^0 + Y/2$$

Die schwache Wechselwirkung bewirkt flavour-ändernde Übergänge innerhalb der Fermion-Dubletts L_ℓ (Leptonen) und L_q (Quarks).

Nur linkshändige Fermionen ψ_L bzw. rechtshändige Anti-Fermionen $\bar{\psi}_R$ nehmen an der schwachen WW teil.

\iff beobachtete maximale Paritätsverletzung durch die schwache WW ($V - A$ -Form der schwachen Ströme).

Paritätsverletzung in der schwachen Wechselwirkung:

- $K^+ \rightarrow \pi^+\pi^0$ und $K^+ \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+$ (Lee, Yang 1956).
- Elektronpolarisation im Kern- β -Zerfall (Wu 1957).

Projektion der Chiralitätszustände:

$$\begin{aligned}\psi_L &= P_L\psi = \left(\frac{1 - \gamma_5}{2}\right)\psi \\ \psi_R &= P_R\psi = \left(\frac{1 + \gamma_5}{2}\right)\psi \\ \bar{\psi}_L &= (P_L\psi)^\dagger\gamma^0 = \bar{\psi}P_R \\ \bar{\psi}_R &= (P_R\psi)^\dagger\gamma^0 = \bar{\psi}P_L\end{aligned}$$

mit $P_L + P_R = 1$, $P_L^2 = P_L$, $P_R^2 = P_R$, $\gamma^\mu P_L = P_R\gamma^\mu$.

Chiralität $\gamma_5 = \gamma_5^\dagger$:

$$\begin{aligned}\gamma_5 \psi_L &= -\psi_L \\ \gamma_5 \psi_R &= \psi_R\end{aligned}$$

für masselose Teilchen.

Die Helizität $h = \frac{\vec{s} \cdot \vec{p}}{|\vec{s} \cdot \vec{p}|}$ ist abhängig vom Bezugssystem (Impulsrichtung), außer für masselose Teilchen. Für masselose Teilchen haben Helizität und Chiralität den gleichen Wert.

Schwache Fermion-Ströme:

$$\begin{aligned}j_{\text{schwach}}^\mu &= \overline{\psi_L} \gamma^\mu \psi_L \\ &= (P_L \psi)^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu P_L \psi = \psi^\dagger P_L \gamma^0 \gamma^\mu P_L \psi \\ &= \overline{\psi} \gamma^\mu P_L \psi = \underline{\underline{\frac{1}{2} \overline{\psi} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi}}\end{aligned}$$

d.h. Vektor (γ^μ)-Axialvektor ($\gamma^\mu \gamma_5$)-, $V - A$ -Strom.

Lokale schwache Isospin-Eichsymmetrie $SU(2)_L$:

$$SU(2)\text{-Dubletts (L): } L_f \longrightarrow e^{i\vec{I}\cdot\vec{\beta}(x)} L_f.$$

$$SU(2)\text{-Singulets (R): } \psi_R \longrightarrow \psi_R.$$

3 Parameter (z.B. Euler-Winkel), 3 Generatoren (Ladungen):

- Isospinvektor $\vec{I} = \begin{pmatrix} I_x \\ I_y \\ I_z \end{pmatrix}$
- Lie-Algebra: $[I_i, I_j] = i\varepsilon_{ijk}I_k$
mit Strukturkonstanten ε_{ijk} .
- Auf- und Absteigeoperatoren: $I^\pm = \frac{1}{2}(I_x \pm iI_y)$; $I^0 = I_z$.

Fundamentale $SU(2)$ -Darstellung (2-dimensional):

- Fermion-Dubletts mit $|\vec{I}| = \frac{1}{2}$, $I_z = \pm\frac{1}{2}$.
- $\vec{I} = \frac{\vec{\tau}}{2}$ mit Pauli'schen Spin-Matrizen τ_i ($i = 1, 2, 3$).
 $[\tau_i, \tau_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\tau_k$, $\tau^\pm = \frac{1}{2}(\tau_1 \pm i\tau_2)$.

$$\tau^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \tau^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.5.2.1 Die Elektroschwache Wechselwirkung (Glashow-Salam-Weinberg-Theorie)

Gemeinsamer Ansatz mit lokaler $SU(2)_L$ - und $U(1)_Y$ -Eichsymmetrie

(Glashow 1961, Salam 1968, Weinberg 1967).

Die elektromagnetische Wechselwirkung muß wegen der elektrisch geladenen schwachen Eichbosonen W^\pm miteingeschlossen werden.

Y ist die schwache Hyperladung mit $[I_z, Y] = 0$ (direktes Produkt der Symmetriegruppen).

Deshalb ist Y_f gleich für die beiden Mitglieder eines $SU(2)_L$ -Dubletts und $Q \neq Y$.

Die elektromagnetischen Ladungen in den Multipletts ergeben sich konsistent aus der Beziehung $Q = I_3 + Y/2$.

Damit entsteht eine vereinheitlichte Eichtheorie der schwachen und der elektromagnetischen Wechselwirkung, die aber noch zwei verschiedene Kopplungskonstanten g (schwacher Isospin) und g' (schwache Hyperladung) enthält:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{SU(2) \times U(1)} = & -\frac{1}{4} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^i F^{i\mu\nu} \\ & + \sum_f (\bar{\psi}_{fR} i \gamma^\mu D_{\mu R}) \psi_{fR} + \sum_L (\bar{L}_f i \gamma^\mu D_{\mu L}) L_f \end{aligned}$$

mit den linkshändigen $SU(2)$ -Dubletts L_f , den $SU(2)$ -Singulets ψ_f und den kovarianten Ableitungen:

$$\begin{aligned}
 D_{\mu L} &= \partial_\mu \cdot 1 + ig' \frac{Y_{fL}}{2} B_\mu(x) \cdot 1 + ig \vec{I} \cdot \vec{W}_\mu(x) \\
 &= \partial_\mu \cdot 1 + i \frac{g'}{2} Y_{fL} B_\mu(x) \cdot 1 + i \frac{g}{2} \vec{T} \cdot \vec{W}_\mu(x) \\
 D_{\mu R} &= \partial_\mu + ig' \frac{Y_{fR}}{2} B_\mu(x),
 \end{aligned}$$

\implies minimale eichinvariante Kopplung an 4 masselose Eichfelder für $U(1)_Y$ und $SU(2)_L$:

$$B_\mu(x) \text{ und } \vec{W}_\mu(x) = \begin{pmatrix} W_\mu^x(x) \\ W_\mu^y(x) \\ W_\mu^z(x) \end{pmatrix}$$

mit den Definitionen der Feldtensoren

$$\begin{aligned}
 f_{\mu\nu} &= \partial_\nu B_\mu(x) - \partial_\mu B_\nu(x) \\
 &\cdot \\
 F_{\mu\nu}^i &= \partial_\nu W_\mu^i(x) - \partial_\mu W_\nu^i(x) + g \varepsilon^{ijk} W_\mu^j(x) W_\nu^k(x).
 \end{aligned}$$

so daß die Form der Lagrangedichte für die freien Eichfelder wie für die QED ist (s.o.).

Alle Fermion-Massen = 0 wegen globaler $SU(2)_L$ -Invarianz:

Unterschiedliche Massen in den Fermion-Dubletts verletzen die $SU(2)$ -Symmetrie. Ein Dirac-Massenterm $m\bar{\psi}\psi = m(\bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L)$ ist nicht invariant.

\implies Massen der elektroschwachen Eichbosonen (außer γ) und der Fermionen durch spontane Brechung der lokalen $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ -Eichsymmetrie (Higgs-Mechanismus, s.u.).

Lokale SU(2)-Eichtransformationen $U(x)$:

$$L \longrightarrow L' = U(x) \cdot L = e^{ig\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\beta}(x)} L$$

Damit die Lagrange-Dichte invariant bleibt, ist die die Transformation der kovarianten Ableitung nach Definition:

$$D'_\mu L' = (\partial_\mu + ig\frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{W}'_\mu) L' \equiv U(D_\mu L)$$

(d.h. $D'_\mu = U D_\mu U^{-1}$).

$$\begin{aligned} \implies U(\partial_\mu L) &+ \left(\partial_\mu U \right) L + ig\frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{W}'_\mu (U \cdot L) \\ &\equiv U(\partial_\mu L) + igU \left(\frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{W}_\mu \right) L \end{aligned}$$

$$\implies \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{W}'_\mu (U \cdot L) = U \left(\frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{W}_\mu \right) L - \frac{1}{ig} (\partial_\mu U) L.$$

Damit ist die Eichtransformation der nicht-Abelschen Eichfelder definiert durch:

$$\vec{\tau} \cdot \vec{W}_\mu \longrightarrow \vec{\tau} \cdot \vec{W}'_\mu = U(\vec{\tau} \cdot \vec{W}_\mu)U^{-1} + \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^{-1}$$

Für infinitesimale Eichtransformationen,

$$U(x) = 1 + ig\frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{\beta}(x),$$

gilt:

$$W_\mu^i(x) \longrightarrow W_\mu^{i'}(x) = W_\mu^i(x) - \frac{1}{g}\partial_\mu\beta^i(x) - \varepsilon^{ijk}\beta^j(x)W_\mu^k(x)$$

Für Abelsche $U(1)_Y$ -Eichtransformationen,

$$U_Y(x) = e^{i\frac{Y}{2}\alpha(x)},$$

gilt allgemein:

$$\begin{aligned} B_\mu(x) \longrightarrow B'_\mu(x) &= U_Y B_\mu U_Y^{-1} + \frac{2i}{g'Y}(\partial_\mu U_Y)U_Y^{-1} \\ &\equiv B_\mu(x) - \frac{1}{g'}\partial_\mu\alpha(x) \end{aligned}$$

Umformung der Lagrange-Funktion:

unter Benutzung von

$$\begin{aligned}\underline{\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi} &= \bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu(P_L^2 + P_R^2)\psi \\ &= \bar{\psi}P_R\gamma^\mu\partial_\mu P_L\psi + \bar{\psi}P_L\gamma^\mu\partial_\mu P_R\psi \\ &= \underline{\bar{\psi}_L\gamma^\mu\partial_\mu\psi_L + \bar{\psi}_R\gamma^\mu\partial_\mu\psi_R}\end{aligned}$$

mit $\gamma^\mu P_{L,R} = P_{R,L}\gamma^\mu$, $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$
und $\bar{\psi}_L = (P_L\psi)^\dagger\gamma^0 = \psi^\dagger P_L\gamma^0 = \bar{\psi}P_R$.

$$\begin{aligned}\cdot \quad \mathcal{L}_{SU(2)\times U(1)} &= \\ - \quad &\frac{1}{4}f_{\mu\nu}f^{\mu\nu} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^i F^{i\mu\nu} + \sum_f \bar{\psi}_f (i\gamma^\mu\partial_\mu)\psi_f \\ - \quad &g' \sum_f \left(\bar{\psi}_f \gamma^\mu \frac{Y_f}{2} \psi_f \right) B_\mu - g \sum_L \left(\bar{L}_f \gamma^\mu \frac{\vec{T}}{2} \cdot L_f \right) \vec{W}_\mu \\ = \quad &\mathcal{L}_{\text{frei}} + \mathcal{L}_{\text{WW}}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{WW}} &= -g' j_Y^\mu B_\mu - g \vec{j}_I^\mu \cdot \vec{W}_\mu \\ &= -g' j_Y^\mu B_\mu - g j_I^{\mu 0} W_\mu^0 - \frac{g}{\sqrt{2}} (j_I^{\mu -} W_\mu^+ + j_I^{\mu +} W_\mu^-) \\ &= \mathcal{L}_{\text{NC}} + \mathcal{L}_{\text{CC}}\end{aligned}$$

mit dem flavour-ändernden geladenen schwachen Strom (CC):

$$j_I^{\mu\pm} = \sum_L \bar{L}_f \gamma^\mu \tau^\pm L_f = j_I^{\mu 1} \pm i j_I^{\mu 2}$$

und den geladenen schwachen Eichbosonen (siehe β -Zerfälle):

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 \pm iW_\mu^2)$$

Denn es gilt:

$$\begin{aligned} & \cdot (j_I^{\mu-} W_\mu^+ + j_I^{\mu+} W_\mu^-) = \\ &= (j_I^1 - i j_I^2) \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 + iW_\mu^2) + (j_I^{\mu 1} + i j_I^{\mu 2}) \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 - iW_\mu^2) \\ &= \sqrt{2} (j_I^{\mu 1} W_\mu^1 + j_I^{\mu 2} W_\mu^2). \end{aligned}$$

Die flavour-erhaltenden neutralen elektroschwachen Ströme j_Y^μ und $j_I^{\mu 0}$ koppeln an die neutralen Eichbosonfelder $B_\mu(x)$ und W_μ^0 .

Fragen:

Wie läßt sich der elektromagnetische Strom der QED identifizieren?

Gibt es einen neutralen schwachen Strom?

Die erhaltenen Ladungen aufgrund der globalen SU(2)-Eichsymmetrie sind:

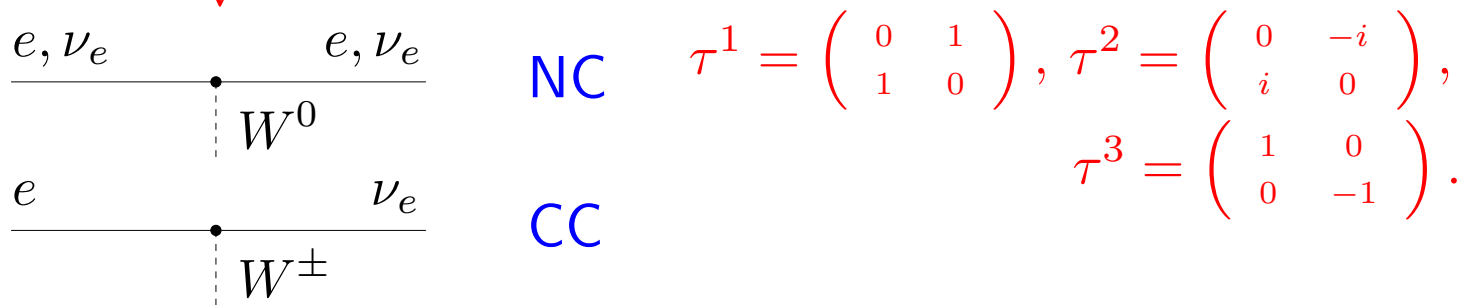
$$I^i = \int d^3x \bar{L} \gamma^0 \frac{\tau^i}{2} L; \quad \frac{dI^i}{dt} = 0$$

mit $[I^i, I^j] = i\epsilon^{ijk} I^k$.

Beispiel:

Die erste Lepton-Familie $L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L$:

$$\begin{aligned}
 \cdot \quad \mathcal{L}_{WW}(SU(2)) &= -g\bar{L} \left(\gamma^\mu \frac{\tau^i}{2} W_\mu^i \right) L \\
 &= -\frac{g}{2} (\bar{\nu}_{eL}, \bar{e}_L) \gamma^\mu \begin{pmatrix} W_\mu^3 & W_\mu^1 - iW_\mu^2 \\ W_\mu^1 + iW_\mu^2 & -W_\mu^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix} \\
 &= -\frac{g}{2} (\bar{\nu}_{eL}, \bar{e}_L) \gamma^\mu \begin{pmatrix} W_\mu^0 & \sqrt{2}W_\mu^- \\ \sqrt{2}W_\mu^+ & -W_\mu^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix} \\
 &= -\frac{g}{2} [\bar{\nu}_e \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \nu_e W_\mu^0 - \bar{e} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) e W_\mu^0] \\
 \cdot \quad & -\frac{g}{\sqrt{2}} [\bar{\nu}_e \gamma^\mu (1 - \gamma_5) e W_\mu^- + \bar{e} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \nu_e W_\mu^+].
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{WW}(U(1)) &= -g' \sum_f \left(\bar{\psi}_f \gamma^\mu \frac{Y_f}{2} \psi_f \right) B_\mu \\
 &= -\frac{g'}{2} Y_L [\bar{\nu}_{eL} \gamma^\mu \nu_{eL} + \bar{e}_L \gamma^\mu e_L] B_\mu \\
 \cdot \quad & -\frac{g'}{2} [Y_{\nu_R} \bar{\nu}_{eR} \gamma^\mu \nu_{eR} + Y_{eR} \bar{e}_R \gamma^\mu e_R] B_\mu.
 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} Y_L &= -1 \\ Y_{e_R} &= -2 \\ Y_{\nu_R} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ mit } Q = I_0 + \frac{1}{2} Y.$$

⇒ Neutrale Ströme:

$$\mathcal{L}_{NC} = -\frac{1}{2}(gW_\mu^0 + g'Y_L B_\mu)(\bar{\nu}_{eL}\gamma^\mu\nu_{eL}) - \frac{g'}{2}Y_{\nu R}B_\mu(\bar{\nu}_{eR}\gamma^\mu\nu_{eR}) \\ + \frac{1}{2}(gW_\mu^0 - g'Y_L B_\mu)(\bar{e}_L\gamma^\mu e_L) - \frac{g'}{2}Y_{eR}B_\mu(\bar{e}_R\gamma^\mu e_R).$$

Neutrale Ströme der ungeladenen Neutrinos können nur durch die schwache Wechselwirkung vermittelt werden.

Sie wurden 1973 am CERN entdeckt in der Reaktion: $\nu_\mu p \rightarrow \nu_\mu p$ (kein Myon im Endzustand).

Nach orthonormaler Transformation (Rotation) der neutralen Eichbosonfelder

$$\begin{pmatrix} B_\mu \\ W_\mu^0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_W & \sin\theta_W \\ -\sin\theta_W & \cos\theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_\mu \\ W_\mu^0 \end{pmatrix}$$

mit dem sog. Weinberg-Winkel θ_W und

$$\cos\theta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2 Y_L^2}}; \quad \sin\theta_W = \frac{g' Y_L}{\sqrt{g^2 + g'^2 Y_L^2}}$$

erhält man das Photonfeld

$$A_\mu = \frac{gB_\mu - g'Y_L W_\mu^0}{\sqrt{g^2 + g'^2 Y_L^2}}$$

und ein neues neutrales schwaches Eichbosonfeld (orthogonal zum el.magn. Feld):

$$Z_\mu^0 = \frac{gW_\mu^0 + g'Y_L B_\mu}{\sqrt{g^2 + g'^2 Y_L^2}}.$$

Sowohl das Z^0 -Boson als auch die W^\pm -Bosonen wurden 1983 am CERN in $p\bar{p}$ -Reaktionen direkt erzeugt und nachgewiesen (s.u.).

Die neutrale schwache Wechselwirkung, Kopplung neutraler schwacher Fermionströme an das Z^0 -Eichboson, wird durch die GSW-Theorie vorhergesagt (schon früher vermutet) und wurde 1973 in Neutrinostreuung an Protonen in einem Blasenkammerexperiment am CERN nachgewiesen (s.u.).

Durch Invertieren der Transformation,

$$B_\mu = \frac{gA_\mu + g'Y_L Z_\mu^0}{\sqrt{g^2 + g'^2 Y_L^2}},$$

$$W_\mu^0 = \frac{gZ_\mu^0 - g'Y_L A_\mu}{\sqrt{g^2 + g'^2 Y_L^2}},$$

und Einsetzen in \mathcal{L}_{NC} ergibt sich:

$$\begin{aligned} \cdot \mathcal{L}_{NC} = & \\ - & \frac{\sqrt{g^2 + g'^2 Y_L^2}}{2} Z_\mu^0 (\bar{\nu}_{eL} \gamma^\mu \nu_{eL}) \\ - & \frac{gg'Y_L}{\sqrt{g^2 + g'^2 Y_L^2}} A_\mu (\bar{e}_L \gamma^\mu e_L) - \frac{gg'Y_R}{2\sqrt{g^2 + g'^2 Y_L^2}} A_\mu (\bar{e}_R \gamma^\mu e_R) \\ - & \frac{g'^2 Y_L^2 - g^2}{2\sqrt{g^2 + g'^2 Y_L^2}} Z_\mu^0 (\bar{e}_L \gamma^\mu e_L) - \frac{g'^2 Y_L Y_R}{2\sqrt{g^2 + g'^2 Y_L^2}} Z_\mu^0 (\bar{e}_R \gamma^\mu e_R) \end{aligned}$$

\implies Neutrinos koppeln nicht an das elektromagnetische Feld A_μ .

Nur die linkshändigen Neutrinos wechselwirken durch die neutrale schwache Kraft über Z_μ^0 .

Rechtshändige Neutrinos haben keine Wechselwirkung, da auch ihre schwache Ladung $Y(\nu_R) = 0$.

Die elektromagnetische WW wird identifiziert durch die Festlegung:

$$Y_L = -e \frac{\sqrt{g^2 + g'^2} Y_L^2}{gg'} = -1 \quad \text{und} \quad Y_R = 2Y_L.$$

Damit ist

$$\sqrt{g^2 + g'^2} = \frac{e}{\cos \theta_W \sin \theta_W}$$

$$e = \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} = g' \cos \theta_W = g \sin \theta_W$$

$$\frac{g'^2 - g^2}{2\sqrt{g^2 + g'^2}} = \frac{e}{\cos \theta_W \sin \theta_W} \left(-\frac{1}{2} + \sin^2 \theta_W \right)$$

$$-\frac{g'^2}{\sqrt{g^2 + g'^2}} = \frac{e}{\cos \theta_W \sin \theta_W} \left(-\sin^2 \theta_W \right)$$

und die neutrale Stromwechselwirkung erhält die Form:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{NC} = & - \frac{g}{2 \cos \theta_W} (\bar{\nu}_{eL} \gamma^\mu \nu_{eL}) Z_\mu^0 \\
 & - \frac{e}{\cos \theta_W \sin \theta_W} \left[\left(-\frac{1}{2} + \sin^2 \theta_W \right) (\bar{e}_L \gamma^\mu e_L) \right. \\
 & \left. + (-\sin^2 \theta_W) (\bar{e}_R \gamma^\mu e_R) \right] Z_\mu^0 \\
 & - e \sum_f (Q_f \bar{\psi}_f \gamma^\mu \psi_f) A_\mu
 \end{aligned}$$

Allgemein gilt:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{NC} = & - \frac{e}{\cos \theta_W \sin \theta_W} \cdot \\
 & \cdot \sum_{f_R, f_L} [(I_{fL,R}^3 - Q_{fL,R} \sin^2 \theta_W) (\bar{\psi}_{fL,R} \gamma^\mu \psi_{fL,R})] Z_\mu^0 \\
 & - e \sum_f (Q_f \bar{\psi}_f \gamma^\mu \psi_f) A_\mu.
 \end{aligned}$$

$$\frac{e}{\cos \theta_W \sin \theta_W} (I_f^3 - Q_f \sin^2 \theta_W)$$

ist die schwache neutrale Kopplung aller links- und rechtshändigen Fermionenzustände an das Z^0 -Boson.

1.3.3 Die Starke Wechselwirkung: Quantenchromodynamik (QCD)

SU(3)-Eichfeldtheorie der starken Wechselwirkung zwischen Quarks mit 8 Ladungen (Generatoren) λ^a ($a = 1, \dots, 8$):

$$[\lambda^a, \lambda^b] = 2if^{abc}\lambda^c$$

mit den Strukturkonstanten f_{abc} der SU(3)-Lie-Algebra.

Lokale Eichtransformation:

$$\Psi_q(x) \longrightarrow \Psi'_q(x) = U(x)\Psi_q(x) = e^{ig_s\frac{\lambda^a}{2}\gamma^a(x)}\Psi_q(x).$$

Lagrange-Funktion:

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \sum_q \bar{\Psi}_q(i\gamma^\mu D_\mu - m_q)\Psi_q$$

mit der kovarianten Ableitung (mit $D'_\mu\Psi' = U(D_\mu\Psi)$):

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_s\frac{\lambda^a}{2}G_\mu^a,$$

den 8 masselosen Eichbosonfeldern $G_\mu^a(x)$ ($a = 1, \dots, 8$)

und den Feldtensoren (mit $\lambda^a F_{\mu\nu}^{a'} = U \lambda^a F_{\mu\nu}^a U^\dagger$):

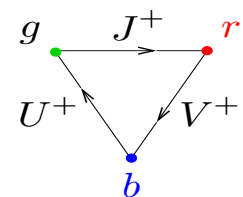
$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\nu G_\mu^a - \partial_\mu G_\nu^a + g_s f^{abc} G_\mu^b G_\nu^c.$$

In der fundamentalen $SU(3)$ -Darstellung bilden die Quarkfelder Triplets mit einer neuen inneren Quantenzahl "Farbe" oder Colour (rot, grün, blau): $\Psi_q = \psi_q \cdot \chi_C$:

$$\chi_C = \begin{pmatrix} q_r \\ q_g \\ q_b \end{pmatrix}; \quad \chi_r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \chi_g = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \chi_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Antiquarks befinden sich in der konjugierten fundamentalen Darstellung und besitzen Antifarben (\bar{r} , \bar{g} , \bar{b}).

Einführung von Schiebeoperatoren in den $SU(3)_C$ Farb-Tripletts:



$$I_C^\pm = \frac{1}{2}(\lambda_1 \pm i\lambda_2); \quad (\text{Transformation } g \longleftrightarrow r),$$

$$V_C^\pm = \frac{1}{2}(\lambda_4 \mp i\lambda_5); \quad (\text{Transformation } r \longleftrightarrow b),$$

$$U_C^\pm = \frac{1}{2}(\lambda_6 \pm i\lambda_7); \quad (\text{Transformation } b \longleftrightarrow g).$$

Ihre Funktion in Analogie zu τ^\pm für $SU(2)$ ist offensichtlich mit der 3-dim. Darstellung der λ -Matrizen (Gell-Mann-Matrizen):

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (g \longleftrightarrow r)$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (r \longleftrightarrow b)$$

$$\lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad (b \longleftrightarrow g)$$

$$\lambda_3 = \begin{matrix} & r & g & b \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \bar{r} \\ & \bar{g} \\ & \bar{b} \end{matrix} \quad (\text{koppelt } r\bar{r}, -g\bar{g})$$

$$\lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{matrix} & r & g & b \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} & \bar{r} \\ & \bar{g} \\ & \bar{b} \end{matrix} \quad (\text{koppelt } r\bar{r}, g\bar{g}, -2b\bar{b}).$$

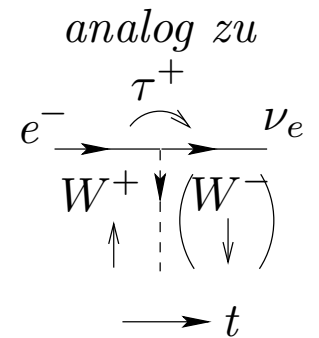
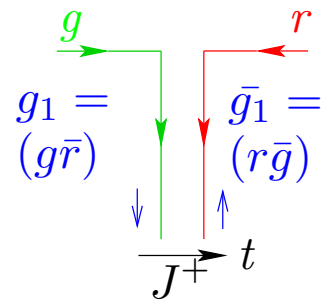
⇒ Wechselwirkungsterm der QCD-Lagrangedichte:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{WW}(SU(3)_C) &= -g_s (\bar{\Psi} \gamma^\mu \frac{\lambda^a}{2} \Psi) G_\mu^a = j_c^{\mu,a} \cdot G_\mu^a \\
 &= -\frac{g_s}{\sqrt{2}} \left[\underbrace{\bar{\Psi} \gamma^\mu I_C^+ \Psi (g\bar{r})_\mu + \bar{\Psi} \gamma^\mu I_C^- \Psi (r\bar{g})_\mu}_{\substack{\uparrow \text{erhaltener} \\ \text{Farbstrom}}} \right. \\
 &\quad + \bar{\Psi} \gamma^\mu V_C^+ \Psi (r\bar{b})_\mu + \bar{\Psi} \gamma^\mu V_C^- \Psi (b\bar{r})_\mu \\
 &\quad + \bar{\Psi} \gamma^\mu U_C^+ \Psi (b\bar{g})_\mu + \bar{\Psi} \gamma^\mu U_C^- \Psi (g\bar{b})_\mu \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\Psi} \gamma^\mu \lambda^3 \Psi G_\mu^3 + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\Psi} \gamma^\mu \lambda^8 \Psi G_\mu^8 \right]
 \end{aligned}$$

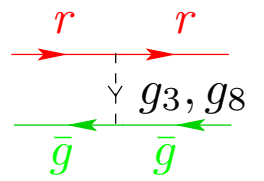
mit den 8 Gluonfeldern

Farbströme

$$\begin{aligned}
 \left(\begin{array}{l} g_{\mu 1} = (g\bar{r})_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(G_\mu^1 - iG_\mu^2), \\ g_{\mu 2} = (r\bar{g})_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(G_\mu^1 + iG_\mu^2) = \bar{g}_{\mu 1}, \end{array} \right. & \text{Anti-} \\
 & \text{gluon} \\
 \left(\begin{array}{l} g_{\mu 4} = (r\bar{b})_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(G_\mu^4 + iG_\mu^5), \\ g_{\mu 5} = (b\bar{r})_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(G_\mu^4 - iG_\mu^5) = \bar{g}_{\mu 4}, \end{array} \right. & \\
 \left(\begin{array}{l} g_{\mu 6} = (b\bar{g})_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(G_\mu^6 - iG_\mu^7), \\ g_{\mu 7} = (g\bar{b})_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(G_\mu^6 + iG_\mu^7) = \bar{g}_{\mu 6}, \end{array} \right. &
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \text{Gluon} & \left(\begin{array}{l} g_{\mu 3} = \frac{1}{\sqrt{2}}(r\bar{r} - g\bar{g}) = G_\mu^3 \quad (\text{farbneutral}), \\ g_{\mu 8} = \frac{1}{\sqrt{2}}(r\bar{r} + g\bar{g} - 2b\bar{b}) = G_\mu^8 \quad (\text{farbneutral}). \end{array} \right. \\
 \text{Anti-} & \text{gluon}
 \end{aligned}$$



zu 8 erhaltenen Farbladungsoperatoren, die sich in der $N^2 - 1 = 8$ -dim. adjungierten Darstellung befinden:

$$3_C \otimes \bar{3}_C = 1_C + 8_C.$$

Gluonaustausch ändert die Farb-, nicht die Flavour-Quantenzahlen der Quarks.

Keine colour-Singulett-Gluonen in $SU(3)_C$ mit $\det U = 1$ (im Gegensatz zu $U(3)$):

würden an farbneutrale Zustände, Mesonen und Baryonen, koppeln und starke Kernkräfte mit langer Reichweite, wie elektromagnetische Felder, hervorrufen.

“Farbige” Teilchen (Quarks und Gluonen) sind in farbneutralen colour-Singulett-Zuständen (Mesonen $q\bar{q}$ und Baryonen qqq) gebunden und treten nicht als freie Zustände auf (Confinement-Hypothese).

Beispiel:

$$\pi^+ = \frac{1}{\sqrt{3}}(u_r \bar{d}_{\bar{r}} + u_g \bar{d}_{\bar{g}} + u_b \bar{d}_{\bar{b}}).$$

(Farbsingulettzustand 1_C aus der Darstellung

$$3_C \otimes \bar{3}_C = 1_C + 8_C).$$

Kernkräfte sind Van-der-Waalssche Restwechselwirkung zur Farbwechselwirkung der Quarks und Gluonen.

Motivation der Farbquantenzahl:

- Die neuen inneren Freiheitsgrade der $SU(3)_C$ -Farbsymmetrie erlauben die Konstruktion einer antisymmetrischen Wellenfunktion für das Baryon $\Delta^{++} = (u \uparrow u \uparrow u \uparrow)$ mit $J^P = \frac{3}{2}^+$ und $L = 0$:

$$\chi_C(\Delta^{++}) = \frac{1}{\sqrt{6}} \varepsilon_{ijk} u_i u_j u_k$$

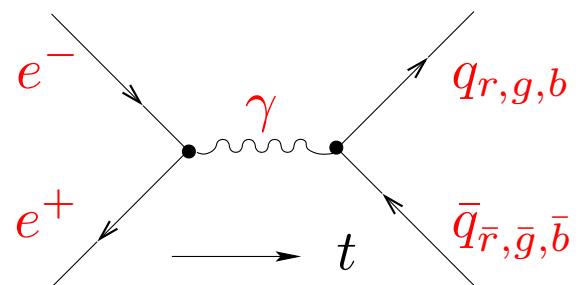
(Farbsingulettzustand 1_C aus der Darstellung

$$3_C \otimes 3_C \otimes 3_C = 1_C + 8_C + 8_C + 10_C).$$

- Hadronischer Wirkungsquerschnitt in der e^+e^- -Vernichtung:

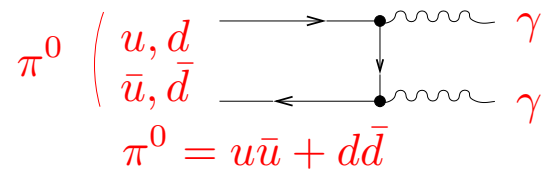
$$R = \sigma(e^+e^- \rightarrow \sum_{q(E_{CM} > 2m_q)} q\bar{q}) / \sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)$$

$$= N_C \cdot \sum_{q(E_{CM} > 2m_q)} Q_q^2$$



mit $N_C = 3 =$ Zahl der Farbfreiheitsgrade der Quarks im Gegensatz zu Leptonen.

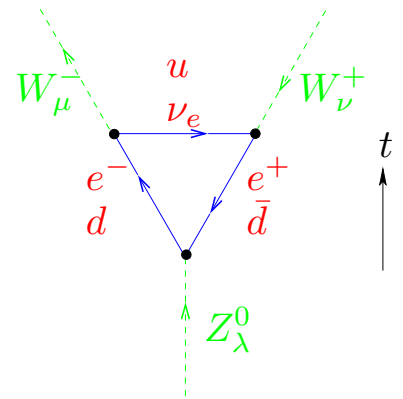
3. $\Gamma(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma) \sim N_C^2.$



4. Renormierbarkeit der GSW-Eichfeldtheorie der elektroschwachen Wechselwirkung:

Aufhebung divergenter Terme in höherer Ordnung der Störungstheorie, bei denen 2 Vektorströme und 1 Axialvektorstrom koppeln (sog. Dreiecks-Anomalien), zwischen Lepton- und Quark-Beiträgen, falls gilt:

$$\sum_f Q_f (L - \text{Dubletts}) = 0.$$



Dies ist möglich, wenn Lepton- und Quark-Dubletts der schwachen WW in jeder Familie gepaart sind, d.h. gleiche Anzahl, und die Quarks jeweils in 3 Farben auftreten:

$$\sum_f Q_f = \sum_\ell Q_\ell + N_C \cdot \sum_q Q_q = 3 \cdot \left(-1 + N_C \cdot \frac{1}{3}\right) = 0.$$

D.h. Verknüpfung zwischen Leptonen und Quarks und zwischen den Eichtheorien der elektroschwachen und der starken WW: $SU(2)_L$ und $SU(3)_C$!

1.4 Ursprung der Massen der Elementarteilchen

- Nur ein masseloses Spin-1 Teilchen beobachtet: Photon
→ $U(1)_Q$ -Eichsymmetrie.
- Die schwache Wechselwirkung ist kurzreichweitig.
⇒ schwere Feldquanten.
- Explizite Massenterme für Eichbosonen (Proca-Gleichung) verletzen die lokale Eichsymmetrie der Lagrange-Funktion, explizite Massenterme für die Fermionen (Dirac-Gleichung) brechen die globale $SU(2)_L$ -Eichsymmetrie.
- Die Eichsymmetrie ist aber verantwortlich und notwendig für die Aufhebung von Divergenzen in jeder Ordnung der Störungstheorie, d.h. die Renormierbarkeit der elektroschwachen Theorie (wie in der QED).

Ausweg:

Sog. **spontane Brechung der Symmetrie des Grundzustands (des Vakuums der Feldtheorie)**,

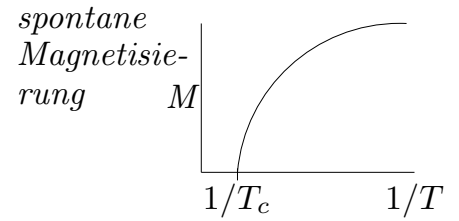
während die volle Eichsymmetrie der Lagrange-Funktion und der Feldgleichungen erhalten bleibt:

$$SU(2)_L \otimes U(1)_Y \xrightarrow{SSB} U(1)_Q$$

(**“verborgene Eichsymmetrie”**).

Motivation:

Konstruktion in Analogie zu Phasenübergängen 2. Ordnung in der Festkörperphysik: SSB unterhalb der kritischen Temperatur.



Ordnungsparameter (z.B. Magnetisierung) nimmt spontan und diskontinuierlich einen von Null verschiedenen Wert im Grundzustand an.

In der Teilchenphysik: Volle Symmetrie des Vakuums wiederhergestellt bei hohen Energien,

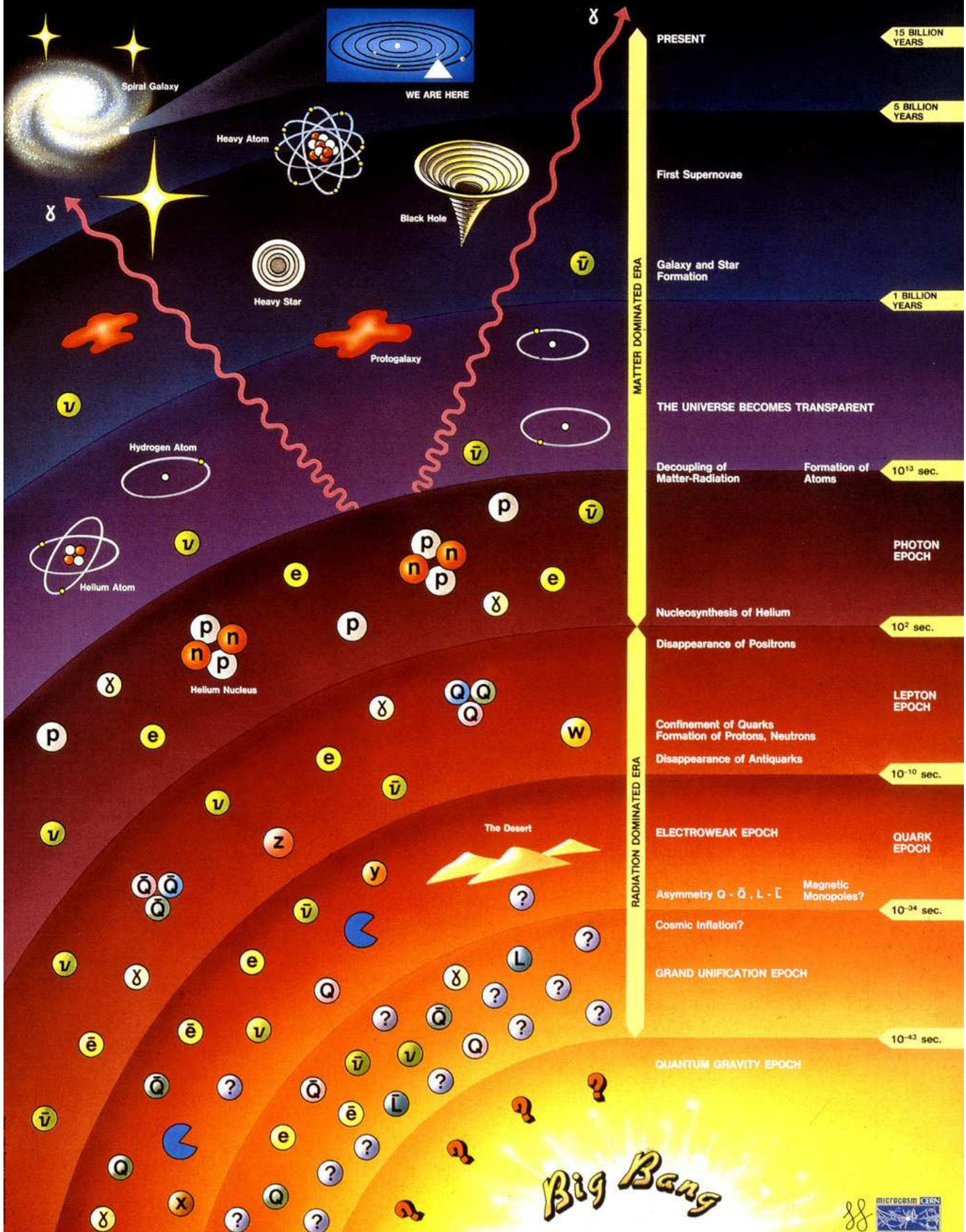
d.h. Phasenübergänge mit spontaner Symmetriebrechung bei Abkühlung des expandierenden frühen Universums.

In der Theorie der Phasenübergänge (**Ginzburg-Landau-Theorie**) entspricht der Ordnungsparameter einem selbstwechselwirkenden skalaren Feld, das im Grundzustand einen von Null verschiedenen Erwartungswert annimmt.

Goldstone-Theorem:

Für jeden Generator einer globalen kontinuierlichen Symmetrie der Bewegungsgleichungen, die im Grundzustand gebrochen ist, tritt ein masseloses skalares Teilchen (Goldstone-Boson) auf.

History of the Universe



Goldstone-Bosonen sind (wegen der Eichsymmetrie) energielose Anregungen, die durch die gebrochenen Symmetriegeneratoren erreichbaren (ineinander transformierbaren) Grundzustände verbinden (Quasiteilchenanregungen in der Festkörperphysik, z.B. Phononen).

Als Elementarteilchen wurden sie nicht beobachtet.

Bei lokaler Eichsymmetrie transformieren die Goldstone-Bosonen mittels Eichtransformationen zu den gebrochenen Generatoren als longitudinale Polarisationsfreiheitsgrade der Eichbosonen, die dadurch eine Masse erhalten (Higgs-Mechanismus).

Analogie zum Supraleiter im Magnetfeld:

Durch lokal eichinvariante, elektromagnetische Wechselwirkung mit den Cooper-Paarkondensat im kohärenten supraleitenden Grundzustand (Ordnungsparameterfeld) wird das Photonfeld aus dem Supraleiter abgeschirmt und erhält eine effektive Masse (endliche Reichweite, Eindringtiefe).

Die lokale $U(1)$ -Phasensymmetrie (Teilchenzahlerhaltung) wird im kohärenten Grundzustand gebrochen.

1.4.1 Der Higgs-Mechanismus im Standardmodell

Zusätzliches komplexes, skalares Feld, $SU(2)_L$ -Dublett,

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi^+ \\ \Phi^0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{ccc} Q & I^0 & Y = 2(Q - I^0) \\ +1 & +\frac{1}{2} & +1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & +1 \end{array}$$

mit schwacher und elektromagnetischer Wechselwirkung (4 Freiheitsgrade).

Erfüllt die Klein-Gordon-Gleichung mit $SU(2)_L \times U(1)_Y$ -eichinvarianter Lagrange-Dichte:

$$\mathcal{L}_{\text{Skalar}} = (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - V(\Phi^\dagger \Phi) = T - V$$

mit

$$D_\mu = \partial_\mu \cdot 1 + i\frac{g'}{2}Y B_\mu \cdot 1 + i\frac{g}{2}\vec{\tau} \cdot \vec{W}_\mu$$

und dem Selbstwechselwirkungspotential ($\lambda > 0$):

$$V(\Phi^\dagger \Phi) = \mu^2(\Phi^\dagger \Phi) + \lambda(\Phi^\dagger \Phi)^2.$$

$|\Phi|$ ist der Ordnungsparameter in Analogie zur Ginzburg-Landau-Theorie (freie Energie ersetzt Lagrangedichte).

Für $\mu^2 < 0$ ist der Grundzustand (kin. Energie $T = 0$, $V = V_{\min.}$) bei einem von Null verschiedenen Betrag des Skalarfelds (Vakuumerwartungswert $|\Phi_0| = v/\sqrt{2}$):

$$\frac{\partial V}{\partial |\Phi|} = 2\mu^2|\Phi_0| + 4\lambda|\Phi_0|^3 = 0.$$

$$\implies |\Phi_0| = \sqrt{\frac{-\mu^2}{2\lambda}} =: \frac{v}{\sqrt{2}}.$$

Die Mannigfaltigkeit (Unterraum) im Φ -Raum, auf der $V(\Phi^\dagger\Phi)$ minimal wird, ist $SU(2)_L \times U(1)_Y$ -invariant.

Durch Auswahl eines der möglichen Grundzustände,

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

wird die $SU(2)_L \times U(1)_Y$ -Symmetrie spontan gebrochen.

Eine $U(1)_Q$ -Phasensymmetrie des Vakuums, entsprechend der Erhaltung der elektrischen Ladung bleibt, wie beobachtet, ungebrochen zurück:

$$SU(2)_L \otimes U(1)_Y \xrightarrow{SSB} U(1)_Q.$$

Generatoren T , die den Grundzustand Φ_0 invariant lassen:

$$e^{iT\alpha}\Phi_0 = \Phi_0 \implies T\Phi_0 = 0.$$

Für die gebrochenen $SU(2)_L \times U(1)_Y$ -Generatoren gilt:

$$\begin{aligned}
 \tau_1 \Phi_0 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{v}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0; \\
 \tau_2 \Phi_0 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \frac{v}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0; \\
 \tau_3 \Phi_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{v}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0; \\
 Y \Phi_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \neq 0; \\
 \frac{(\tau_3 - Y)}{2} \Phi_0 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \neq 0;
 \end{aligned}$$

während die elektrische Ladung erhalten bleibt:

$$Q \Phi_0 = \frac{1}{2}(\tau_3 + Y) \Phi_0 = 0.$$

(orthogonal zum Generator $(\tau_3 - Y)/2$, der dem Z_μ^0 -Eichfeld entspricht).

Eine Parametrisierung von Feldanregungen aus dem Grundzustand Φ_0 (Quasiteilchenanregungen):

$$\Phi(x) = e^{i\frac{\vec{\tau}\vec{\zeta}(x)}{2v}} \begin{pmatrix} 0 \\ (v + H(x))/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

mit der **reellen radialen Anregung** $H(x)$ (**skalares Higgs-Boson**: massiv, gegen die Rückstellkraft des Potentials V) und den **reellen Winkelanregungen** $\zeta_i(x)$ ($i = 1, \dots, 3$), die die verschiedenen Grundzustände verbinden.

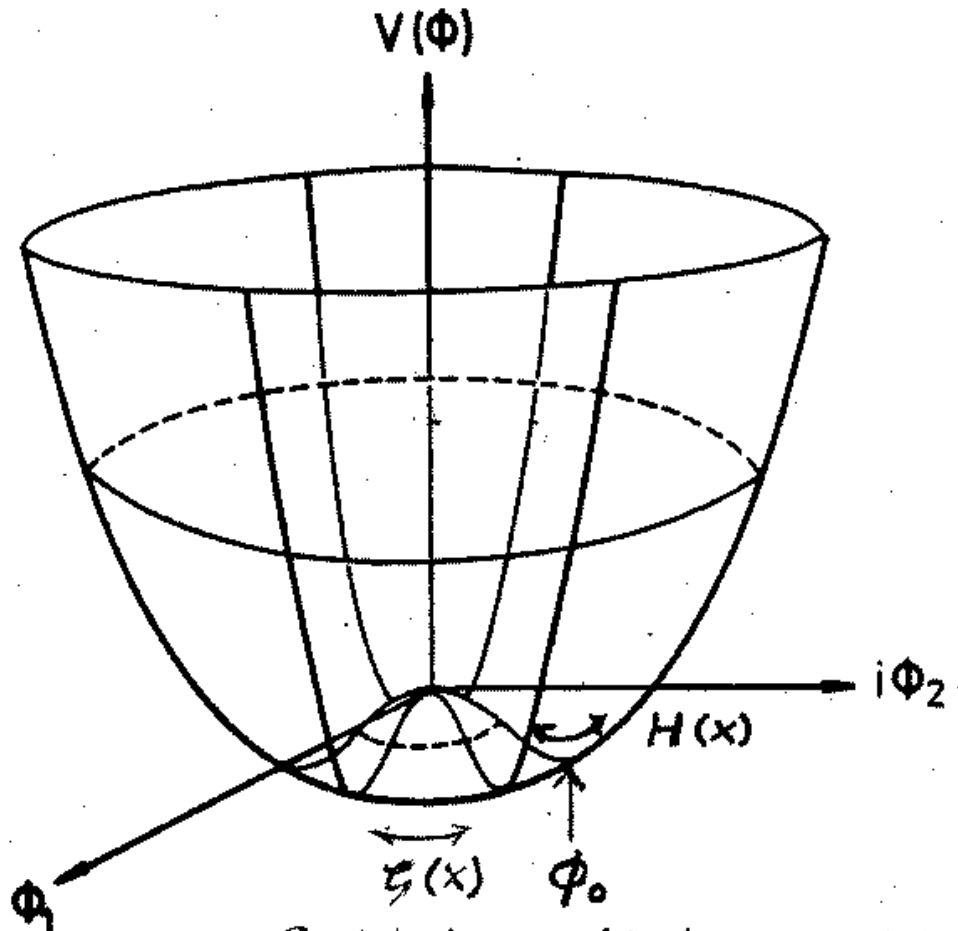
Die **masselosen Goldstone-Moden** ζ_i werden von den Eichbosonen “absorbiert”, die den **gebrochenen Generatoren** entsprechen.

Dies geschieht durch die lokale $SU(2)_L$ -Eichtransformation:

$$\begin{aligned} \Phi(x) &\longrightarrow \Phi'(x) = e^{-i\frac{\vec{\tau}\vec{\zeta}(x)}{2v}} \Phi(x), \\ L_f(x) &\longrightarrow L'_f(x), \\ R_f(x) &\longrightarrow R_f(x), \\ \vec{W}_\mu(x) &\longrightarrow \vec{W}'_\mu(x), \\ B_\mu(x) &\longrightarrow B_\mu(x) \end{aligned}$$

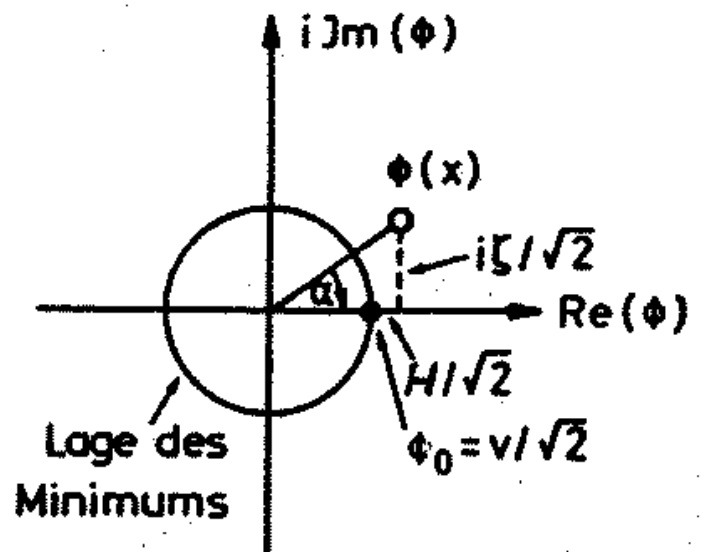
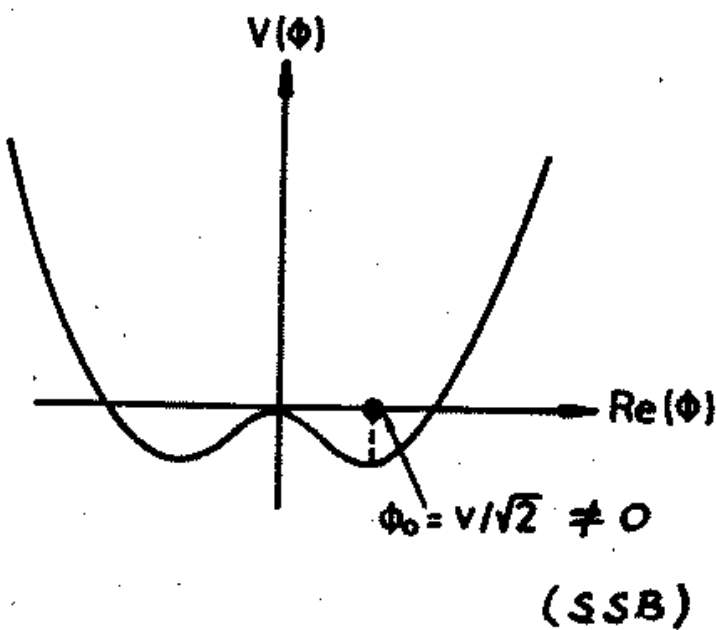
(sog. “unitäre Eichung”).

Higgs - Potential:



Goldstone Moden \leftrightarrow $U(1)$ -Transf

Beispiel: $U(1)$ - Symmetrie des Vakuums gebrochen



Mit $Y_\Phi = +1$ gilt danach:

$$\begin{aligned}
 (D_\mu \Phi)' &= (\partial_\mu 1 + ig \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{W}'_\mu + ig' B_\mu 1) \frac{1}{\sqrt{2}} (v + H) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_\mu H \end{pmatrix} + \frac{ig}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (W_\mu^{1'} - iW_\mu^{2'}) (v + H) \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &\quad + \frac{i}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ (g' B_\mu - gW_\mu^{3'}) (v + H) \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Einsetzen von $\Phi'(x)$ und $(D_\mu \Phi)'$ in $\mathcal{L}_{\text{Skalar}} = T - V$ ergibt:

$$\begin{aligned}
 T &= (D^\mu \Phi)'^\dagger (D_\mu \Phi)' \\
 &= \frac{1}{2} \partial^\mu H \partial_\mu H + \frac{g^2 (v + H)^2}{8} |W_\mu^{1'} - iW_\mu^{2'}|^2 \\
 &\quad + \frac{(v + H)^2}{8} |g' B_\mu - gW_\mu^{3'}|^2 \\
 &= \frac{1}{2} \partial^\mu H \partial_\mu H + \frac{g^2 v^2}{8} (W_\mu^+ W^{\mu+} + W_\mu^- W^{\mu-}) \\
 &\quad + \frac{g^2 v^2}{8 \cos^2 \theta_W} Z_\mu^0 Z^{0\mu} \\
 &\quad + \frac{g^2}{4} (H^2 + 2vH) \left[W_\mu^+ W^{\mu-} + \frac{1}{2 \cos^2 \theta_W} Z_\mu^0 Z^{0\mu} \right]. \\
 V &= \mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2 \\
 &= \frac{\mu^2}{2} (v + H)^2 + \frac{\lambda}{4} (v + H)^4 = -\mu^2 H^2 + \lambda v H^3 + \frac{\lambda}{4} H^4.
 \end{aligned}$$

Alle Wechselwirkungsterme werden genau so benötigt, damit die elektroschwache Theorie **störungstheoretisch berechenbar** ("renormierbar") ist (durch Eichsymmetrie!).

$$\begin{aligned} \text{mit } (W_\mu^{1'} + iW_\mu^{2'})(W^{1'\mu} - iW^{2'\mu}) &\equiv 2W_\mu^+ W^{-\mu} \\ &= W_\mu^+ W^{\mu+} + W_\mu^- W^{\mu-} \end{aligned}$$

und Rotation mit **Weinberg-Winkel** θ_W wie beim neutralen Strom (Diagonalisierung der Massenmatrix der neutralen Eichbosonen):

$$Z_\mu^0 = \frac{g' B_\mu - g W_\mu^{3'}}{\sqrt{g^2 + g'^2}} = \frac{g}{\cos \theta_W} (g' B_\mu - g W_\mu^{3'}).$$

$$\begin{aligned} \implies \mathcal{L}_{\text{Skalar}} &= \frac{1}{2} \left(\partial^\mu H \partial_\mu H - M_H^2 H^2 \right) - \lambda v H^3 - \frac{\lambda}{4} H^4 \\ &+ \frac{g^2}{4} (H^2 + 2vH) \left[W_\mu^+ W^{-\mu} + \frac{1}{2 \cos^2 \theta_W} Z_\mu^0 Z^{0\mu} \right] \\ &+ \frac{1}{2} M_W^2 (W_\mu^+ W^{\mu+} + W_\mu^- W^{\mu-}) + \frac{1}{2} M_Z^2 Z_\mu^0 Z^{0\mu}. \end{aligned}$$

mit

$$\text{Eichbosonen : } M_W = \frac{gv}{2}; \quad M_Z = \frac{gv}{2 \cos \theta_W} = \frac{M_W}{\cos \theta_W};$$

$$\text{Higgsboson : } M_H = \sqrt{-2\mu^2} = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} v.$$

$$\text{und } \sin^2 \theta_W = 1 - \cos^2 \theta_W = 1 - \frac{M_W^2}{M_Z^2}.$$

1.4.2 Massen der Fermionen

Eichinvariante Kopplung der links- und rechtshändigen Fermionen an das Skalarfeld $\Phi(x)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{WW}^{\text{Yukawa}} = & - \sum_{f(\text{up})} g_f \left[\left(\bar{L}_f \bar{\Phi}^* \right) \psi_{fR} + \bar{\psi}_{fR} \left(\bar{\Phi}^T L_f \right) \right] \\ & - \sum_{f(\text{down})} g_f \left[\left(\bar{L}_f \Phi \right) \psi_{fR} + \bar{\psi}_{fR} \left(\Phi^\dagger L_f \right) \right] \end{aligned}$$

(Yukawa-Kopplung vom Typ $-g(\bar{\psi}\psi)\phi$ zuerst für Nukleon-Pion-Kernwechselwirkung eingeführt.)

mit dem $SU(2)_L$ -Dublett ($Y_{\bar{\Phi}} = 2(Q - I^0) = -1 = -Y_{\Phi}$):

$$\bar{\Phi} := i\tau_2 \Phi^* = \begin{pmatrix} \bar{\Phi}^0 \\ -\bar{\Phi}^- \end{pmatrix} \xrightarrow{SSB} \begin{pmatrix} (v + H)/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wegen der speziellen Eigenschaft der $SU(2)$ -Gruppe, daß $\tau_2 \vec{\tau}^* = -\vec{\tau} \tau_2$, gilt unter $SU(2)_L \times U(1)_Y$ -Eichtransformationen:

$$\begin{aligned} \bar{\Phi} &= i\tau_2 \Phi^* \longrightarrow (i\tau_2 \Phi^*)' = i\tau_2 (U\Phi)^* \\ &= i\tau_2 e^{-i\frac{\vec{\tau}^* \cdot \vec{\beta}}{2}} e^{-i\frac{Y_{\Phi}}{2}\alpha} \Phi^* \\ &= e^{i\frac{\vec{\tau} \cdot \vec{\beta}}{2}} e^{i\frac{Y_{\bar{\Phi}}}{2}\alpha} (i\tau_2 \Phi^*) = U\bar{\Phi}. \end{aligned}$$

$\implies SU(2)_L$ -Invarianz von $\mathcal{L}_{WW}^{\text{Yukawa}}$:

$$\begin{aligned}(\bar{L}\Phi)\psi_R &\longrightarrow (\bar{L}U^\dagger U\Phi)\psi_R = (\bar{L}\Phi)\psi_R, \\ \bar{\psi}_R(\Phi^\dagger L) &\longrightarrow \bar{\psi}_R(\Phi^\dagger U^\dagger UL) = \bar{\psi}_R(\Phi^\dagger L).\end{aligned}$$

(und ebenso für die 'up'-Terme mit $\bar{\Phi}$),

wobei

$$\begin{aligned}L &\longrightarrow UL, \quad \bar{L} \longrightarrow \bar{L}U^\dagger, \quad \psi_R \longrightarrow \psi_R, \quad \Phi \longrightarrow U\Phi \text{ und} \\ \bar{\Phi} &\longrightarrow U\bar{\Phi}.\end{aligned}$$

$U(1)_Y$ -Invarianz von $\mathcal{L}_{WW}^{\text{Yukawa}}$:

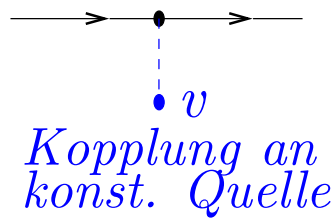
durch Aufhebung der Phasenfaktoren der L- und R-Fermionen und des Skalarfelds wegen

$$\begin{aligned}Y_{\bar{L}} + Y_{\bar{\Phi}} + Y_R &= +1 - 1 + 0 = 0 \quad (\text{up - Leptonen}) \\ Y_{\bar{L}} + Y_{\Phi} + Y_R &= +1 + 1 - 2 = 0 \quad (\text{down - Leptonen}).\end{aligned}$$

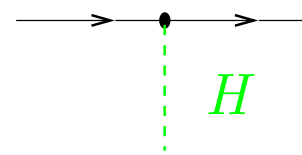
Einsetzen von $\Phi'(x)$ ergibt:

$$\mathcal{L}_{WW}^{\text{Yukawa}} = - \sum_f g_f \frac{v + H}{\sqrt{2}} \left(\bar{\psi}_{fL} \psi_{fR} + \bar{\psi}_{fR} \psi_{fL} \right)$$

$$\equiv - \sum_f \frac{g_f v}{\sqrt{2}} \bar{\psi}_f \psi_f - \sum_f \frac{g_f}{\sqrt{2}} (\bar{\psi}_f \psi_f) H.$$



Higgs-Fermion-WW



Damit Dirac-Massenterm mit

$$m_f = \frac{g_f v}{\sqrt{2}}$$

und Yukawa-Kopplung der Fermionen an das Higgsfeld H

$$\frac{g_f}{\sqrt{2}} = \frac{m_f}{v} \sim m_f.$$

Damit $H \rightarrow f \bar{f}$ bevorzugt in schwerste Fermionen mit $2m_f \leq M_H$.

Beachte: für Quarks gilt:

Massen- (und flavour-) Eigenzustände \neq schwache Eigenzustände von $SU(2)_L$.

1.4.3 Schwache Wechselwirkung und Massen der Quarks

Experimentelle Beobachtung (schwache Zerfälle von K-, D-, B-Mesonen mit s -, c -, b -Quarks): (*Generationenmischung*)

Die Masseneigenzustände der Quarks (Massenoperator diagonal; feste Massen) sind verschieden von den schwachen Eigenzuständen der Quarks, den linkshändigen $SU(2)$ -Dubletts und den rechtshändigen $SU(2)$ -Singulets (schwache Ladungsoperatoren, $SU(2)$ -Generatoren diagonal; feste schwache Ladungen).

Deshalb ist der Quark-Massenterm in der elektroschwachen Lagrange-Funktion nach der spontanen Symmetriebrechung statt

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{Masse}} &= - \sum_q \frac{g_q v}{\sqrt{2}} (\bar{\psi}_{qL} \psi_{qR} + \bar{\psi}_{qR} \psi_{qL}) \\ &\equiv - \sum_q \frac{g_q v}{\sqrt{2}} \bar{\psi}_q \psi_q = - \sum_q m_q \bar{\psi}_q \psi_q\end{aligned}$$

(vereinfacht durch Annahme einer diagonalen Massenmatrix) allgemeiner von der Form

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{Masse}} &= - \frac{v}{\sqrt{2}} \sum_{i,j} [\bar{\Gamma}_{ij} \bar{u}_{iL} u_{jR} + \overset{\text{hermitesch konjugiert}}{\bar{\Gamma}_{ji}^*} \bar{u}_{jR} u_{iL} \\ &\quad + \Gamma_{ij} \bar{d}_{iL} d_{jR} + \Gamma_{ji}^* \bar{d}_{jR} d_{iL}] \\ &= - \sum_{i,j} [M_{ij}^{(u)} \bar{u}_{iL} u_{jR} + M_{ji}^{(u)*} \bar{u}_{jR} u_{iL} \\ &\quad + M_{ij}^{(d)} \bar{d}_{iL} d_{jR} + M_{ji}^{(d)*} \bar{d}_{jR} d_{iL}]\end{aligned}$$

mit den allgemeinen komplexen Massenmatrizen

$$M_{ij}^{(d)} = \Gamma_{ij} \frac{v}{\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad M_{ij}^{(u)} = \bar{\Gamma}_{ij} \frac{v}{\sqrt{2}}$$

Oder mit der Definition für die up (u)- und down (d)-artigen Quark-Eigenzustände des schwachen Isospins

$$D = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix}$$

in Matrixschreibweise:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Masse}}^{\text{Quarks}} = & - \bar{D}_L M^{(d)} D_R - \bar{D}_R M^{(d)\dagger} D_L \\ & - \bar{U}_L M^{(u)} U_R - \bar{U}_R M^{(u)\dagger} U_L. \end{aligned}$$

(Es gilt $\mathcal{L}^\dagger = \mathcal{L}$ wie verlangt fuer eine Observable.)

Die separaten Massenmatrizen für up- und down-artige Quarks lassen sich diagonalisieren durch separate unitäre Transformationen jeweils für die links- und die rechtshändigen Quark-Zustände:

$$\begin{aligned}
 U_{d,d}^\dagger M^{(d)} V_d &= M_{\text{diag.}}^{(d)}; & U_u^\dagger M^{(u)} V_u &= M_{\text{diag.}}^{(u)}; \\
 V_d^\dagger M^{(d)\dagger} U_d &= (U_d^\dagger M^{(d)} V_d)^\dagger = M_{\text{diag.}}^{(d)*}; \\
 V_u^\dagger M^{(u)\dagger} U_u &= (U_u^\dagger M^{(u)} V_u)^\dagger = M_{\text{diag.}}^{(u)*};
 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
 D'_L &= U_d^\dagger D_L; & U'_L &= U_u^\dagger U_L; \\
 D'_R &= V_d^\dagger D_R; & U'_R &= V_u^\dagger U_R.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \mathcal{L}_{\text{Masse}}^{\text{Quarks}} &= \\
 &- \overline{D}_L \overbrace{U_d U_d^\dagger}^{=1} M^{(d)} \overbrace{V_d V_d^\dagger}^{=1} D_R - \overline{D}_R \overbrace{V_d V_d^\dagger}^{=1} M^{(d)\dagger} \overbrace{U_d U_d^\dagger}^{=1} D_L \\
 &- \overline{U}_L U_u \underbrace{U_u^\dagger M^{(u)} V_u V_u^\dagger}_{=1} U_R - \overline{U}_R V_u \underbrace{V_u^\dagger M^{(u)\dagger} U_u}_{=1} U_u^\dagger U_L \\
 &= -\overline{D}'_L M_{\text{diag.}}^{(d)} D'_R - \overline{D}'_R M_{\text{diag.}}^{(d)*} D'_L \\
 &\quad -\overline{U}'_L M_{\text{diag.}}^{(u)} U'_R - \overline{U}'_R M_{\text{diag.}}^{(u)*} U'_L \\
 &= -\overline{D}' M_{\text{diag.}}^{(d)} D' - \overline{U}' M_{\text{diag.}}^{(u)} U'. \quad \text{mit } \bar{\psi}\psi = \bar{\psi}_L \psi_R + \bar{\psi}_R \psi_L
 \end{aligned}$$

Die letzte Zeile gilt nach einer $U(1)$ -Phasentransformation der Quarkfelder, so daß die Masseneigenwerte reell werden.

Die Lagrange-Funktion für die schwache geladene Stromwechselwirkung der Quarks läßt sich folgendermaßen durch die Masseneigenzustände ausdrücken:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{CC}^{\text{Quarks}} &= && \text{CC: up down} \\
 &= -\frac{g}{\sqrt{2}} [j_{CC}^{\mu+} W_{\mu}^{-} + j_{CC}^{\mu-} W_{\mu}^{+}] && \begin{matrix} U \\ D \end{matrix} \\
 &= -\frac{g}{\sqrt{2}} \sum_{i=1}^3 \left[(\bar{U}_{Li} \gamma^{\mu} D_{Li}) W_{\mu}^{-} + (\bar{D}_{Li} \gamma^{\mu} U_{Li}) W_{\mu}^{+} \right] \\
 &= -\frac{g}{\sqrt{2}} \left[(\bar{U}_L \gamma^{\mu} 1 D_L) W_{\mu}^{-} + (\bar{D}_L \gamma^{\mu} 1 U_L) W_{\mu}^{+} \right] && \begin{matrix} \text{diagonal für} \\ \text{schwache EZ} \\ U, D \end{matrix} \\
 &\equiv -\frac{g}{\sqrt{2}} \left[(\bar{U}'_L \underbrace{U_u^{\dagger} \gamma^{\mu} U_d}_{\downarrow} D'_L) W_{\mu}^{-} + (\bar{D}'_L \underbrace{U_d^{\dagger} \gamma^{\mu} U_u}_{\swarrow} U'_L) W_{\mu}^{+} \right] \\
 &\equiv -\frac{g}{\sqrt{2}} \left[\underbrace{(\bar{U}'_L \gamma^{\mu} V_{CKM} D'_L)}_{=j_{CC}^{\mu+}} W_{\mu}^{-} + \underbrace{(\bar{D}'_L V_{CKM}^{\dagger} \gamma^{\mu} U'_L)}_{=j_{CC}^{\mu-}} W_{\mu}^{+} \right] && \begin{matrix} \text{nichtdiagonal für} \\ \text{Massen-EZ} \\ U', D' \end{matrix}
 \end{aligned}$$

mit der unitären Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM)-Matrix
 $V_{CKM} = U_u^{\dagger} U_d$.

$$V_{CKM}^{\dagger} V_{CKM}^{-1} = U_d^{\dagger} U_u$$

1.4.3.1 Mischung der Quark-Flavours

Die “Quark-Mischungsmatrix” V_{CKM} führt zu **geladenen schwachen Übergängen zwischen den Quarkgenerationen**, definiert als die Masseneigenzustände der Quarks, die an die elektromagnetische und starke Wechselwirkung koppeln, und gibt verschiedene Gewichte für die Wahrscheinlichkeit der schwachen CC-Übergänge zwischen den up- und down-artigen Masseneigenzuständen der Quarks:

$$\begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} d_C \\ s_C \\ b_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}.$$

Z.B.: $u \longleftrightarrow d_C = V_{ud}d + V_{us}s + V_{ub}b.$

Die Elemente der CKM-Matrix werden vom Standardmodell nicht vorhergesagt, sondern müssen experimentell bestimmt werden. Dies ist ein aktiver Forschungszweig, insbesondere für die Übergänge mit schweren Quarks (c, b, t).

Zahl der unabhängigen Parameter der CKM-Matrix:

Für $n = 2$ Generationen:

Bis zur Entdeckung des bottom-Quarks.

Reelle orthogonale 2×2 Matrix mit **1 reellen Parameter, keine komplexe Phase:**

$$\text{Cabibbo - Matrix : } V = \begin{pmatrix} \cos \theta_c & \sin \theta_c \\ -\sin \theta_c & \cos \theta_c \end{pmatrix}.$$

θ_c ist der Cabibbo-Winkel mit $\sin \theta_c \approx 0.23$ und $\cos \theta_c \approx 0.95$.

Für $n = 3$ Generationen:

CKM-Matrix mit **3 reellen Parametern und 1 komplexen Phase:**
 $V^* \neq V$ (möglich nur für ≥ 3 Generationen):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -s_{23}c_{12} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}$$

Mit den 3 Mischungswinkeln θ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3; i > j$),
 $c_{ij} = \cos \theta_{ij} > 0$, $s_{ij} = \sin \theta_{ij} > 0$, und dem Phasenfaktor $e^{i\delta}$.

Allgemeine Herleitung:

Komplexe $n \times n$ -Matrix: $2n^2$ Parameter.

Unitäre Matrix mit n^2 Nebenbedingungen ($V^\dagger V = 1$): n^2 Parameter.

Davon sind $\frac{n(n-1)}{2}$ Parameter reell; die übrigen $n^2 - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ Parameter sind komplexe Phasenfaktoren.

Denn eine reelle unitäre Matrix (orthogonale Matrix) mit $\frac{n(n-1)}{2}$ Nebenbedingungen ($V^T V = 1$) hat $n^2 - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ unabhängige reelle Parameter.

n Phasenfaktoren können in den n U -Feldern durch Neudefinition ihrer Phase absorbiert werden (aus der 1. Spalte der Mischungsmatrix):

$$U_{Lj} \longrightarrow e^{-i\alpha_j^{(u)}} U_{Lj} \quad (j = 1, \dots, n).$$

$n - 1$ weitere Phasenfaktoren können aus der 1. Reihe der Mischungsmatrix in den $n - 1$ D -Feldern absorbiert werden:

$$D_{Lj} \longrightarrow e^{-i\alpha_j^{(d)}} D_{Lj} \quad (j = 2, \dots, n),$$

d.h. insgesamt werden $2n - 1$ Phasenfaktoren eliminiert.

Danach bleiben $\frac{n(n+1)}{2} - (2n - 1) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ unabhängige Phasenfaktoren übrig.

Die aktuellen Meßwerte für die CKM-Matrixelemente sind:

$$|V_{ud}| = 0.9736 \pm 0.0010$$

aus nuklearem β - und μ -Zerfall

$$|V_{us}| = 0.2205 \pm 0.0018$$

aus semilept. Kaon-Zerfällen

$$K \rightarrow \pi e \nu_e$$

$$|V_{ub}| = (3.6 \pm 0.5) \cdot 10^{-3}$$

aus semileptonischen Zerfällen

$$B \rightarrow X_u \ell \nu_\ell$$

$$|V_{cd}| = 0.224 \pm 0.016$$

charm-Quark-Produktionsrate

in $\nu(\bar{\nu})$ -Kern-Streuung

$$|V_{cs}| = 1.01 \pm 0.18$$

semileptonische charm-Quark

Zerfälle $D \rightarrow K e \nu_e$ ($c \rightarrow s$)

$$|V_{cb}| = 0.040 \pm 0.002$$

aus semilept. B-Mesonzerfällen

$$|V_{td}| = 0.009 \pm 0.002$$

von $B_d^0 \bar{B}_d^0$ -Mischung

$$|V_{td}| < 0.009 \text{ (95\% C.L.)}$$

von $B_s^0 \bar{B}_s^0$ -Mischung

$$|V_{td}/V_{ts}| < 0.29 \text{ (95 \% C.L.)}$$

von $B_d^0 \bar{B}_d^0$ - und $B_s^0 \bar{B}_s^0$ -Mischung

$$|V_{td}/V_{ts}| < 0.56 \text{ (90 \% C.L.)}$$

von $b \rightarrow s \gamma$ Zerfällen

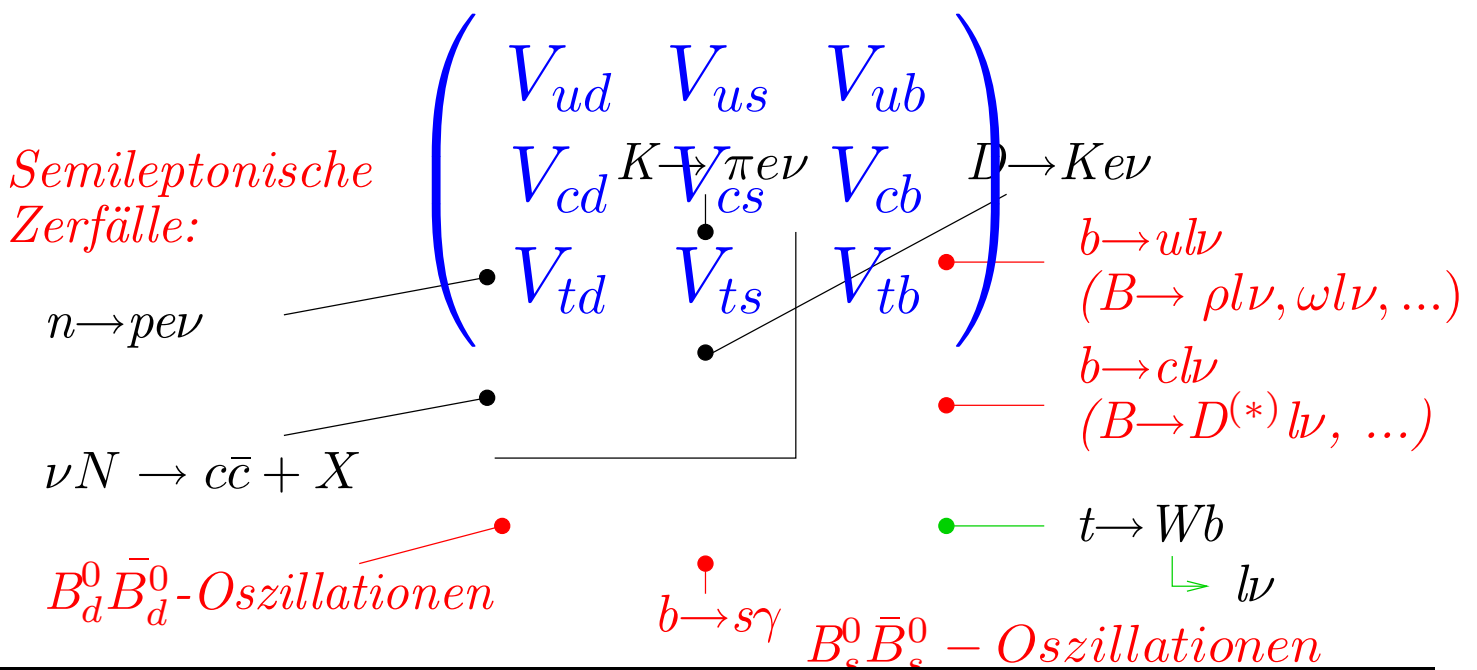
$$|V_{ts}/V_{cb}| = 1.1 \pm 0.4$$

von $b \rightarrow s \gamma$ Zerfällen

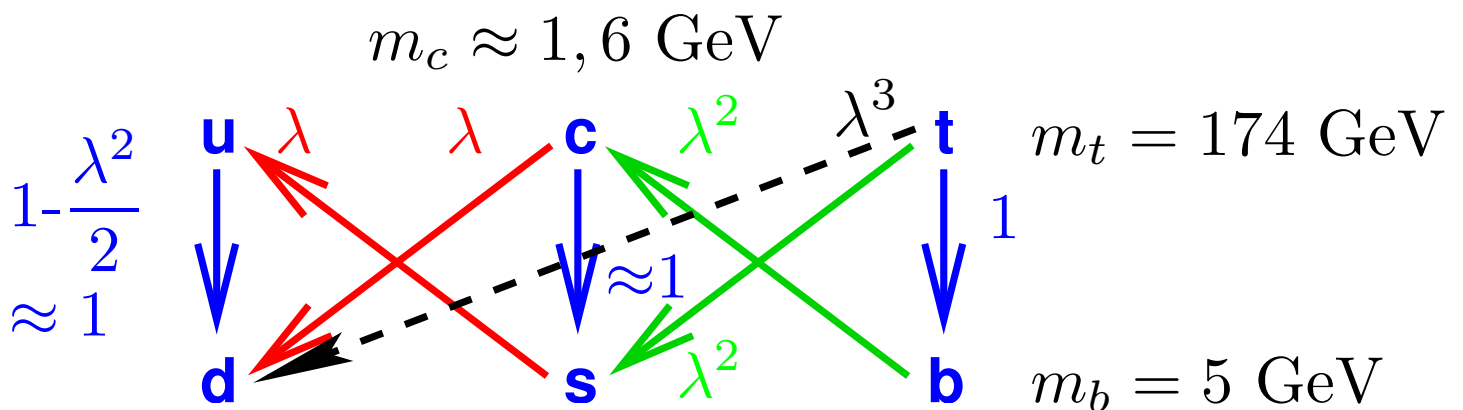
$$|V_{tb}| > 0.016 \text{ (95 \% C.L.)}$$

aus top-Quark-Zerfällen

$$t \rightarrow W^+ b$$



Die Hierarchie der Übergangswahrscheinlichkeiten und der Quarkmassen läßt eine Erklärung durch eine dem Standardmodell übergeordnete Theorie erwarten.



Die näherungsweise Wolfenstein-Parametrisierung macht die Rangordnung der Übergänge zwischen den Quark-Generationen (Massen/flavour-Eigenzustände) deutlich:

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\lambda^2}{2} & \lambda & A\lambda^3(\rho - i\eta) \\ -\lambda & 1 - \frac{\lambda^2}{2} & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1 - \rho - i\eta) & -A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\lambda^4),$$

bei der die Matrixelemente nach dem kleinen Parameter λ entwickelt werden.

Die 4 Wolfenstein-Parameter haben die gemessenen Werte:

$$\begin{aligned} \lambda &\equiv s_{12} = 0.2205 \pm 0.0018, \\ A &\equiv s_{23}/\lambda^2 = 0.82 \pm 0.06, \\ \sqrt{\rho^2 + \eta^2} &\equiv |V_{ub}|/A\lambda^3 = 0.36 \pm 0.09. \end{aligned}$$

Eine **komplexe CKM-Matrix** ermöglicht eine **Beschreibung der beobachteten schwachen Verletzung der CP-Symmetrie** im Rahmen des Standardmodells (mit 6 Quarks in 3 Generationen), hervorgerufen wiederum durch die schwache Wechselwirkung und mit **Ursprung in der Fermion-Higgs-Boson-Kopplung bzw. der Quark-Massenmatrix**:

Vorschlag von **Kobayashi und Maskawa 1973** noch vor der Entdeckung der dritten Fermion-Generation (τ -Lepton 1975, bottom-Quark 1977, top-Quark 1994) und vor der Entdeckung des charm-Quarks 1974.

Denn mit

$$\begin{aligned} j_{CC}^{\mu+} &= \bar{U}_L \gamma^\mu V_{CKM} D_L \xrightarrow{CP} -\bar{D}_L V_{CKM}^T \gamma^\mu U_L; \\ j_{CC}^{\mu-} &= \bar{D}_L V_{CKM}^\dagger \gamma^\mu U_L \xrightarrow{CP} -\bar{U}_L \gamma^\mu V_{CKM}^* D_L; \end{aligned}$$

und

$$W_\mu^\pm \xrightarrow{CP} -W_\mu^\mp.$$

verhält sich $\mathcal{L}_{CC}^{\text{Quarks}}$ unter CP-Transformationen wie

$$\begin{aligned} &(\bar{U}_L \gamma^\mu V_{CKM} D_L) W_\mu^- + (\bar{D}_L V_{CKM}^\dagger \gamma^\mu U_L) W_\mu^+ \\ \xrightarrow{CP} &(\bar{D}_L V_{CKM}^T \gamma^\mu U_L) W_\mu^+ + (\bar{U}_L \gamma^\mu V_{CKM}^* D_L) W_\mu^-, \end{aligned}$$

d.h. $\mathcal{L}_{CC}^{\text{Quarks}}$ ist nur CP-invariant, wenn $V^* = V$.

1.4.3.2 Neutrale Ströme der Quarks

$$\mathcal{L}_{NC} = -e j_{\text{el.magn.}}^\mu A_\mu - \frac{e}{\sin \theta_W \cos \theta_W} \left[j^{\mu 3} - j_{\text{el.magn.}}^\mu \sin^2 \theta_W \right] Z_\mu$$

mit dem elektromagnetischen Strom

$$\begin{aligned} j_{\text{el.magn.}}^\mu &= Q_u (\bar{U} \gamma^\mu U) + Q_d (\bar{D} \gamma^\mu D) \\ &= Q_u (\bar{U}' \gamma^\mu U') + Q_d (\bar{D}' \gamma^\mu D') \end{aligned}$$

und dem Strom der dritten Komponente des schwachen Isospins

$$\begin{aligned} j^{\mu 3} &= I_u^3 (\bar{U} \gamma^\mu U) + I_d^3 (\bar{D} \gamma^\mu D) \\ &= \frac{1}{2} (\bar{U} \gamma^\mu U) - \frac{1}{2} (\bar{D} \gamma^\mu D) \\ &= \frac{1}{2} (\bar{U}' \gamma^\mu U') - \frac{1}{2} (\bar{D}' \gamma^\mu D'). \end{aligned}$$

Die **neutralen Ströme** bleiben **flavour-erhaltend** für die Masseneigenzustände U' , D' wie für die schwachen Eigenzustände U , D wegen der Unitarität der Transformation,

$$U_{u,d}^\dagger U_{u,d} = 1; \quad V_{u,d}^\dagger V_{u,d} = 1,$$

so daß z.B. gilt

$$\begin{aligned}\bar{U}\gamma_\mu U &= \bar{U}_L\gamma_\mu U_L + \bar{U}_R\gamma_\mu U_R \\ &= \bar{U}'_L U_u^\dagger \gamma_\mu U_u U'_L + \bar{U}'_R V_u^\dagger \gamma_\mu V_u U'_R \\ &= \bar{U}'_L \gamma_\mu U'_L + \bar{U}'_R \gamma_\mu U'_R = \bar{U}' \gamma_\mu U'.\end{aligned}$$

⇒ Keine CP-Verletzung in der schwachen neutralen und der elektromagnetischen WW.

Die kinetischen Terme bleiben ebenfalls unverändert.

⇒ Keine flavour-ändernden Prozesse mit neutralen Strömen (FCNC-Prozesse) in 1. Ordnung im Standardmodell.

Unterdrückung von FCNC-Prozessen auch in höherer Ordnung der schwachen WW: durch den

“GIM-Mechanismus” (Glashow, Illiopoulos, Maiani).

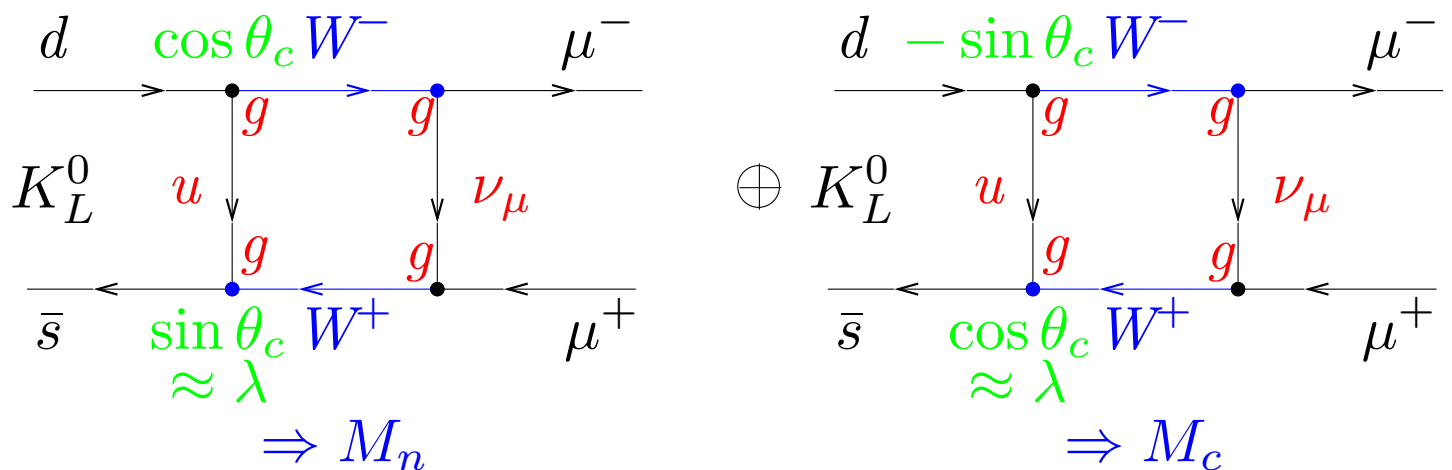
Experimentell sind FCNC-Prozesse sehr klein, z.B. ist das Verzweigungsverhältnis

$$BR(K_L^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-) = \frac{\Gamma(K_L^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-)}{\Gamma_{K_L^0}^{\text{tot}}} \approx 9 \cdot 10^{-7}\%$$

während $BR(K^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu) = 63.5\%$ (typischer schwacher CC-Zerfall).

(NB: Schwacher Zerfall in Myonpaar bevorzugt gegenüber Zerfall in Elektronpaar wegen Drehimpulserhaltung und Paritätsverletzung!)

In 2. Ordnung der schwachen Wechselwirkung ist der Prozeß für den Zerfall $K_L^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$:



Gegenseitige Aufhebung der Amplituden für up- und charm-Quark-Austausch wegen der Unitariät der CKM-Matrix (Orthogonalität der Cabibbo-Matrix für 2 Generationen):

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_u &\sim g^4 \sin \theta_C \cos \theta_C; \\
 \mathcal{M}_c &\sim -g^4 \sin \theta_C \cos \theta_C;
 \end{aligned}$$

Details abhängig vom Wert der charm-Quark-Masse $m_c \gg m_u$.

\Rightarrow Vorhersage für die Masse des charm-Quarks: $> 1 \text{ GeV}$.

Konsequenzen der Quark-Flavour-Mischung in der schwachen Wechselwirkung:

1. Quark-Flavour-Oszillationen.
2. Verletzung der CP-Symmetrie.

1.5 Vergleich von Theorie und Experiment

1.5.1 Störungstheorie und Feynman-Diagramme

Zur Berechnung von Übergangsamplituden $\langle f | \psi(t) \rangle$ für Zerfallswahrscheinlichkeiten und Wirkungsquerschnitte.

Einfachste Methode (nach Feynman):

Iterative Lösung der klassischen Feldgleichungen, mit Wechselwirkungsterm als Störung zu den freien Feldgleichungen, unter Benutzung der Methode der Greenschen Funktion.

1.5.1.1 Bekanntes Beispiel: Elektrostatik

Poisson-Gleichung für skalares elektrostatisches Potential $\phi(\vec{x})$:

$$\vec{\nabla}^2 \Phi(\vec{x}) = -\rho(\vec{x}).$$

Lösung für Punktladung am Ort \vec{x}' : $\rho(\vec{x}) = q\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}')$:

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (\text{Coulomb - Potential}).$$

Für eine allgemeine Ladungsverteilung $\rho(\vec{x}')$ ist die Lösung offensichtlich:

$$\Phi(\vec{x}) = \int \frac{\rho(\vec{x}')}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' =: \int G(\vec{x} - \vec{x}')\rho(\vec{x}')d^3x'$$

mit der sog. Greenschen Funktion

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = G(\vec{x} - \vec{x}') = \frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

die eine Lösung der Poisson-Gleichung ist für eine Einheitspunktladung am Ort \vec{x}' (Definition):

$$\vec{\nabla}_x^2 G(\vec{x}, \vec{x}') = -\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}').$$

1.5.1.2 Anwendung auf Eichfeldtheorien: Elektromagnetische WW von Fermionen (QED)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{Fermion}}^{QED} &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi \\ &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - eQ\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \\ &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - ej^\mu A_\mu.\end{aligned}$$

⇒ Feldgleichung nach dem Lagrange-Formalismus:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} \right) = 0$$

ist die Dirac-Gleichung

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = eQ\gamma^\mu A_\mu(x)\psi(x)$$

mit elektromagnetischem Kopplungsterm:

eine inhomogene Differentialgleichung, die i.a. nicht analytisch lösbar ist, d.h. iterative Lösung mit inhomogenem Wechselwirkungsterm als Störung.

Ansatz für die Greensche Funktion:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)K(x - x') = \delta^{(4)}(x - x') \cdot 1.$$

Mit der Lösung $\psi^{(0)}(x)$ der homogenen freien Dirac-Gleichung,
 $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi^{(0)}(x) = 0$

ist damit die allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl.:

$$\underline{\psi(x)} = \psi^{(0)}(x) + eQ \int d^4x' K(x - x') \gamma^\mu A_\mu(x') \underline{\psi(x')}.$$

Die Integralgleichung kann iterativ gelöst werden:

0. Näherung: $\psi^{(0)}(x) \longrightarrow$ einsetzen in RS.

1. Näherung:

$$\psi^{(1)}(x) = \psi^{(0)}(x) + eQ \int d^4x' K(x - x') \gamma^\mu A_\mu(x') \underline{\psi^{(0)}(x')};$$

\longrightarrow einsetzen in RS.

2. Näherung:

$$\begin{aligned} \psi^{(2)}(x) = \psi^{(0)}(x) + eQ \int d^4x' K(x - x') \gamma^\mu A_\mu(x') \psi^{(0)}(x') \\ + e^2 Q^2 \int \int d^4x'' d^4x' K(x - x'') \gamma^\mu A_\mu(x'') \\ K(x'' - x') \gamma^\mu A_\mu(x') \psi^{(0)}(x'). \end{aligned}$$

Störungsentwicklung nach Potenzen des WW-Terms $\sim e$.

Fouriertransformation der Greenschen Funktion,

$$K(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \hat{K}(p) e^{-ip(x-x')},$$

ergibt bei Einsetzen in die Dirac-Gleichung:

$$\begin{aligned} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)K(x - x') &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p (\not{p} - m) \hat{K}(p) e^{-ip(x-x')} \\ &\equiv \delta^{(4)}(x - x') \cdot 1 = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ip(x-x')} \cdot 1, \end{aligned}$$

d.h. $(\not{p} - m)\hat{K}(p) = 1$, mit $\not{p} := \gamma^\mu p_\mu = \gamma^0 p_0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{p}$ etc.

$$\implies (\not{p} + m)(\not{p} - m)\hat{K}(p) = (p^2 - m^2)\hat{K}(p) \equiv (\not{p} + m) \cdot 1$$

\implies “Fermion-Propagator”

$$\hat{K}(p) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}$$

mit Integrationsregel für das Fourierintegral der räumlichen Greenschen Funktion in der komplexen Ebene:

Konvergente Lösungen für Wellen mit **positiver Energie (Teilchen)**, die sich in **positiver Zeitrichtung** ($t > t'$) ausbreiten und für Wellen mit **negativer Energie (Antiteilchen)**, die sich in **negativer Zeitrichtung** ausbreiten ($t < t'$). \longrightarrow **Feynman-Bild.**

1.5.1.3 Berechnung der Übergangsmatrixelemente

mit der **Streumatrix** S ,

$$\psi_s(x) = S \cdot \psi_i(x),$$

ist das Streumatrixelement

$$\begin{aligned}\langle \psi_f | \psi_s \rangle &= \langle \psi_f | S | \psi_i \rangle =: S_{fi} \equiv \mathcal{M}_{fi} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i) \\ &= \int d^3x \psi_f^\dagger(x) S \psi_i(x) = \int d^3x \psi_f^\dagger(x) \psi_s(x) \\ &= S_{fi}^{(0)} + S_{fi}^{(1)} + S_{fi}^{(2)} + \dots\end{aligned}$$

wobei für die gestreute Welle $\psi_s(x)$ die obige Störungsentwicklung durchgeführt wird (einsetzen!).

Im Anfangs (i)- und Endzustand (f) befinden sich wechselwirkungsfreie Zustände (ebene Wellen).

1.5.1.4 Wirkungsquerschnitte und Zerfallswahrscheinlichkeiten

Übergangswahrscheinlichkeit pro Raum- und Zeiteinheit (“Goldene Regel”):

$$dw = |S_{fi}|^2 \rho(E_f) dE_f / (V_0 \cdot T).$$

Dabei ist bei Begrenzung der WW auf V_0, T :

$$|S_{fi}|^2 = |M_{fi}|^2 \cdot V_0 \cdot T \cdot (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i)$$

und $\rho(E_f)$ die Zustandsdichte im Endzustand.

Differentieller Wirkungsquerschnitt für die **2-Körper-Reaktion** $a + b \rightarrow c + d$ (mit $p_1 + p_2 = p_3 + p_4$, $s := (p_1 + p_2)^2 = E_{CMS}^2$):

$$d\sigma = dw / j_{\text{ein}}$$

mit der einlaufenden Teilchenstromdichte (Lorentz-invariant):

$$\begin{aligned} j_{\text{ein}} &= |\vec{v}_{ab}| \frac{2E_1}{V} \frac{2E_2}{V} = \frac{4}{V^2} [(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{4}{V^2} E_{CMS} |\vec{p}_a^{CMS}|. \end{aligned}$$

$$\implies \boxed{d\sigma = \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{j_{\text{ein}}} d\text{Lips}}$$

mit dem Lorentz-invarianten Phasenraumelement (Zustandsdichte im Endzustand):

$$d\text{Lips} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_3 + p_4 - p_1 - p_2) \frac{V}{2E_3} \frac{d^3p_3}{(2\pi)^3} \frac{V}{2E_4} \frac{d^3p_4}{(2\pi)^3}.$$

Zerfallsbreite für n -Körperzerfall $a \rightarrow 1, \dots, n$:

$$\boxed{d\Gamma = \frac{|\mathcal{M}|^2}{2E_a} d\text{Lips}}$$

mit

$$d\text{Lips} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i) \prod_{j=1}^n \frac{V}{2E_j} \frac{d^3p_j}{(2\pi)^3}.$$

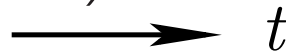
$$\Gamma = \int d\Gamma = \frac{1}{\tau}.$$

Das Normierungsvolumen V kürzt sich!

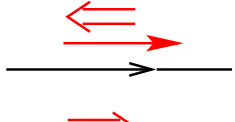
1.5.1.5 Feynman-Regeln

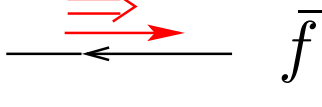
Regeln zur Berechnung der Streumatrixelemente \mathcal{M} in der Störungstheorie, die sich durch die sog. **Feynman-Diagramme** veranschaulichen lassen.


Faktoren im Streumatrixelement \mathcal{M} für beliebige Streuprozesse bzw. Teilchenzerfälle: mit Integration über die 4-Impulse der virtuellen Teilchen ($p^2 \neq m^2$) im Zwischenzustand:



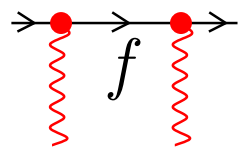
QED:

Ein- (auslaufendes) Fermion: $u_s(p) (\bar{u}_s(p))$ 

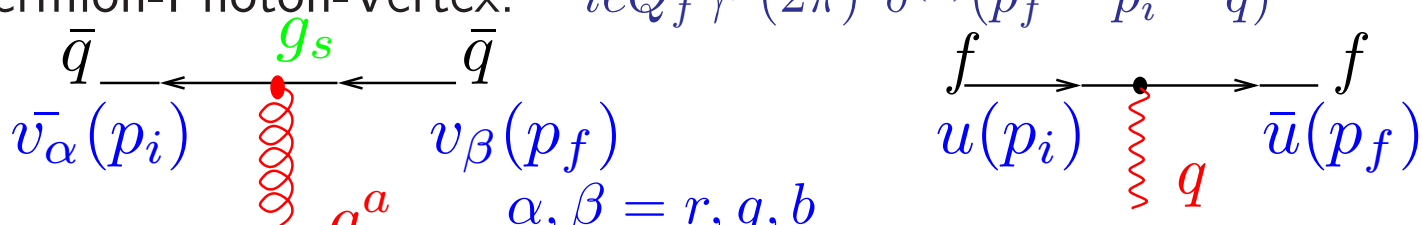
Ein- (auslaufendes) Anti-Fermion: $v_s(p) (\bar{v}_s(p))$ 

Ein- (auslaufendes) reelles Photon: $\varepsilon_\mu(k; \lambda) (\varepsilon_\mu^*(k; \lambda))$ 

Virtuelles (intermediäres) Photon: $-i \frac{g_{\mu\nu}}{q^2 + i\varepsilon}$ 

Virtuelles Fermion (Propagator): $i \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}$ 

Fermion-Photon-Vertex: $-ieQ_f \gamma^\mu (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i - q)$



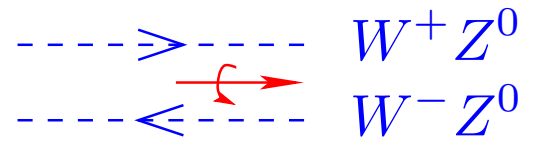
$\alpha, \beta = r, g, b$
 $a = 1, \dots, 8$ (Gluonen) γ

QCD:

Quark-Gluon-Vertex: $-i \frac{g_s}{2} \lambda_{\alpha\beta}^a \gamma^\mu (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i - q)$

—————→ t

Elektroschwache Wechselwirkung:

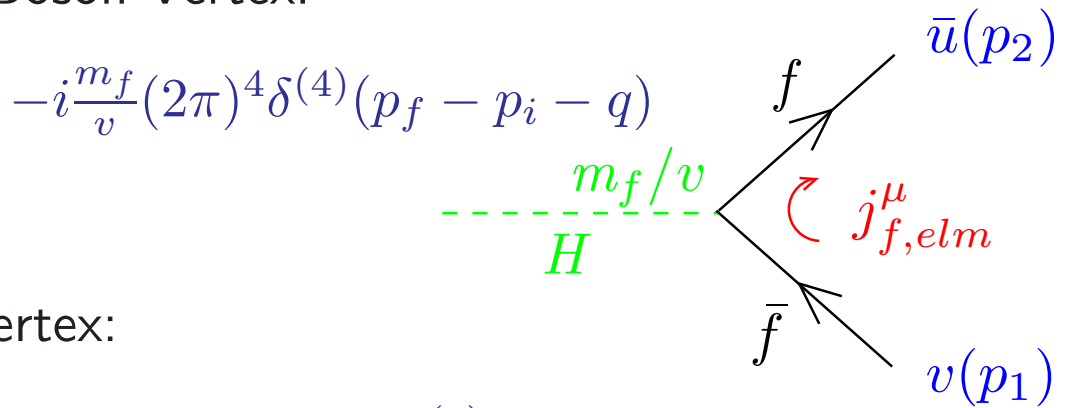


Ein- (auslaufendes) Z^0 -, W^\pm -Boson: $\varepsilon_\mu(k; \lambda)$ ($\varepsilon_\mu^*(k; \lambda)$)

Virtuelles Z^0 -, W^\pm -Boson: $\langle \begin{array}{c} W^\pm \\ Z^0 \end{array} \rangle$ $-\frac{i g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu / M^2}{q^2 - M^2 + i\varepsilon}$

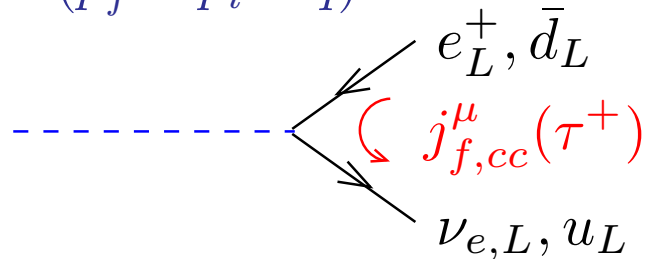
Virtuelles Higgs-Boson: $\langle \begin{array}{c} H \end{array} \rangle$ $\frac{i}{q^2 - M_H^2 + i\varepsilon}$

Fermion-Higgs-Boson-Vertex:



Fermion- W^\pm -Vertex:

$$-i \frac{g}{2\sqrt{2}} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i - q)$$



Fermion- Z^0 -Vertex:

$$-i \frac{g}{2 \cos \theta_W} \gamma^\mu [c_L^f (1 - \gamma_5) + c_R^f (1 + \gamma_5)] (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i - q)$$

$g / \cos \theta_w$

Schwache NC-Kopplungskonstanten: ν, f^- ν, f^-

Links : $c_L^f = I_f^3 - Q_f \sin^2 \theta_W$; **rechts :** $c_R^f = -Q_f \sin^2 \theta_W$;

Vektor : $v_f = c_L^f + c_R^f = I_f^3 - 2Q_f \sin^2 \theta_W$;

Axialvektor : $a_f = c_L^f - c_R^f = I_f^3$.

$$\bar{u} \gamma^\mu c_L^f (1 - \gamma_5) + c_R^f (1 + \gamma_5) u = \bar{u} \gamma^\mu (v_f - a_f \gamma_5) u.$$

1.5.1.6 Fermion-Fermion-Streuung:

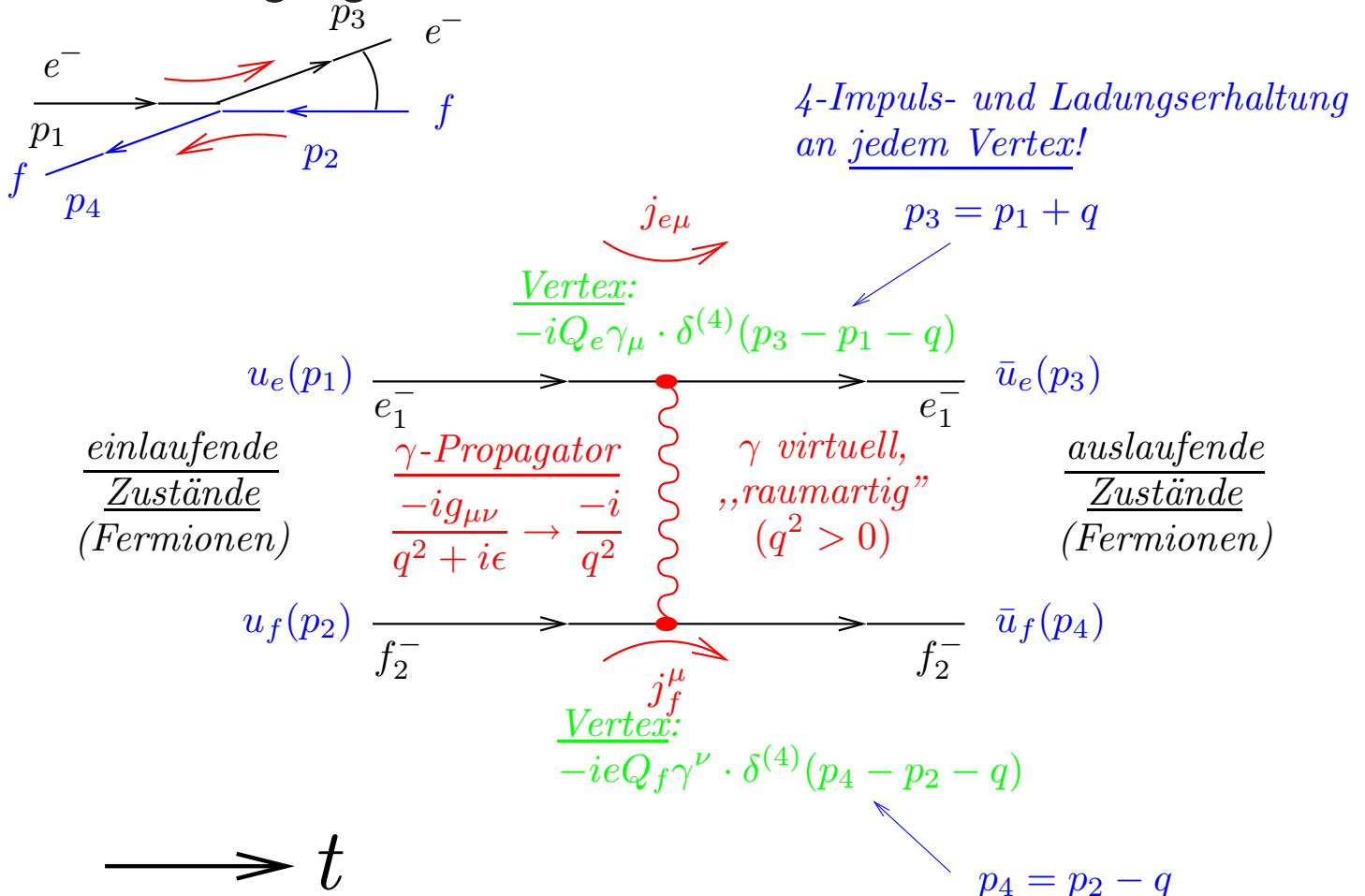
Das Übergangsmatrixelement \mathcal{M}_{fi} für elektromagnetische Fermion (Elektron e)-Fermion (f)-Streuung unter Austausch eines ("virtuellen") Photons ist demnach:

$$\mathcal{M}_{fi} = -ie^2 Q_e Q_f \bar{u}_e(p_3) \gamma_\mu u_e(p_1) \frac{1}{q^2} \bar{u}_f(p_4) \gamma^\mu u_f(p_2)$$

in 1. Ordnung der Störungsrechnung, 2. Ordnung in eQ bzw. 1. Ordnung in der Feinstrukturkonstanten $\alpha \equiv e^2/4\pi \approx 1/137$

$$(\sigma(e^- f \rightarrow e^- f) \sim |\mathcal{M}_{fi}|^2 \sim e^4 Q_e^2 Q_f^2 \sim \alpha^2)$$

und mit $q^2 = (p_3 - p_1)^2 \approx -2p_1 p_3 = -4E_1 E_3 \sin^2(\theta/2)$ bei Vernachlässigung der Fermion-Massen; $\theta =$ Streuwinkel.



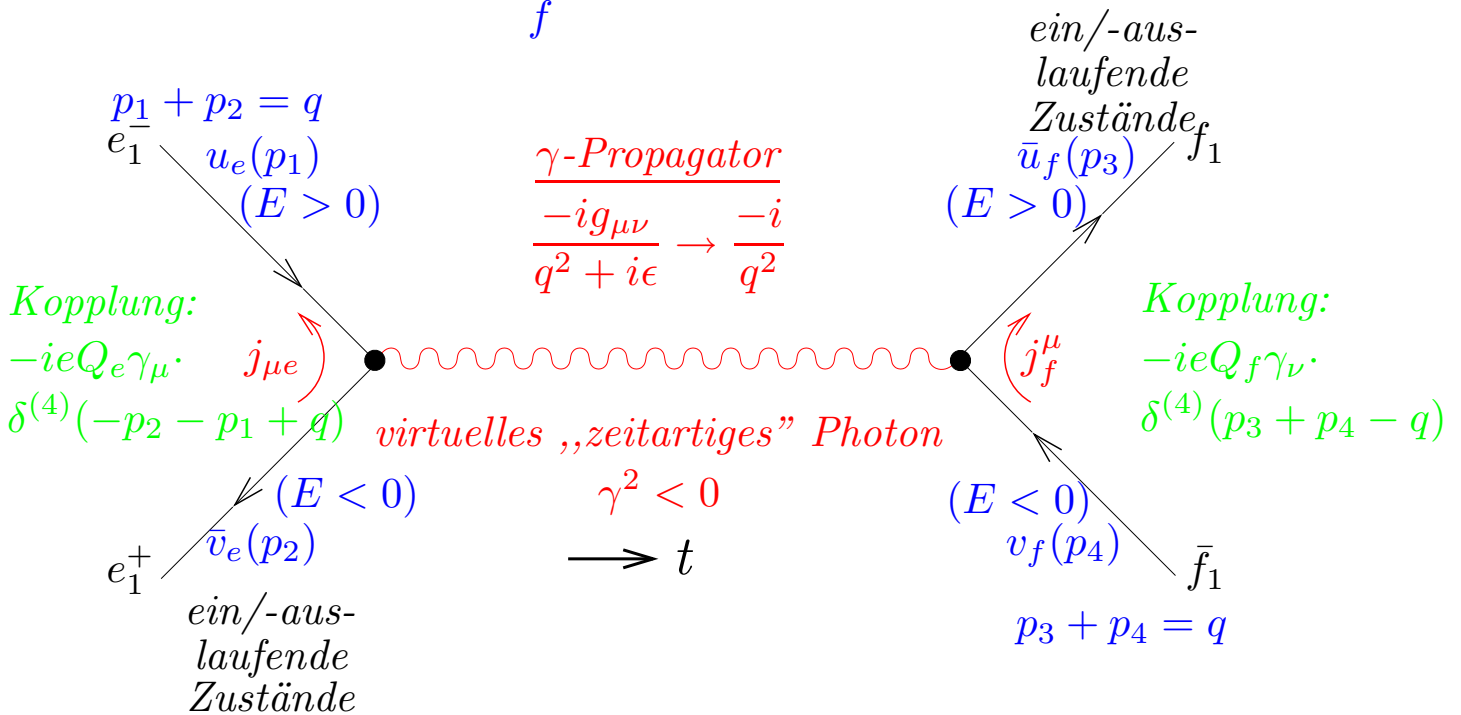
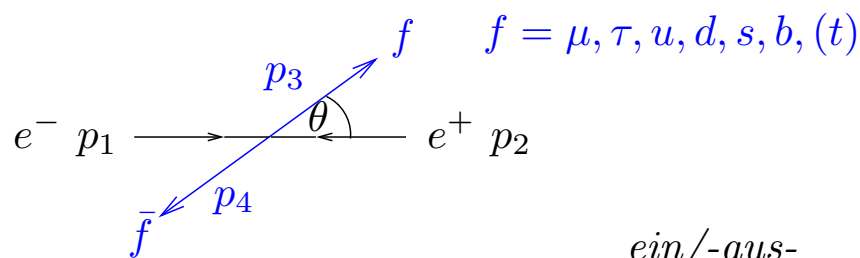
1.5.1.7 Elektron-Positron-Vernichtung

Nach den Feynman-Regeln ist das QED-Übergangsmatrixelement für die Elektron-Positron-Vernichtung unter Erzeugung eines Fermion-Antifermion-Paars (Erzeugung neuer Materie an e^+e^- -Speicherringen):

$$\mathcal{M} = -ie^2 Q_e Q_f \bar{v}_e(p_2) \gamma_\mu u_e(p_1) \frac{1}{q^2} \bar{u}_f(p_3) \gamma^\mu v_f(p_4)$$

mit $q^2 = (p_1 + p_2)^2 =: s = E_{CMS}^2$ (Schwerpunktsenergie).

Im Schwerpunktsystem gilt: $\sqrt{s} = 2E_e$.



1.5.2 Wechselwirkungsprozesse im Standardmodell

1.5.2.1 Selbstwechselwirkung der Eichbosonen

Freie nicht-Abelsche $SU(2) \times U(1)$ -Eichfelder:

$$\vec{W}_\mu, B_\mu \longrightarrow W_\mu^\pm, Z_\mu^0, A_\mu$$

mit der Lagrangedichte ($i = 1, \dots, 3$)

$$\mathcal{L}_{SU(2)}^{\text{frei}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^i F^{i\mu\nu}$$

mit

$$F_{\mu\nu}^i = \partial_\nu W_\mu^i - \partial_\mu W_\nu^i + g \varepsilon^{ijk} W_\mu^j W_\nu^k$$

oder kurz:

$$\vec{F}_{\mu\nu} = \partial_\nu \vec{W}_\mu - \partial_\mu \vec{W}_\nu + g \vec{W}_\mu \times \vec{W}_\nu.$$

Die zugehörige Bewegungsgleichung nach dem Lagrange-Formalismus ist:

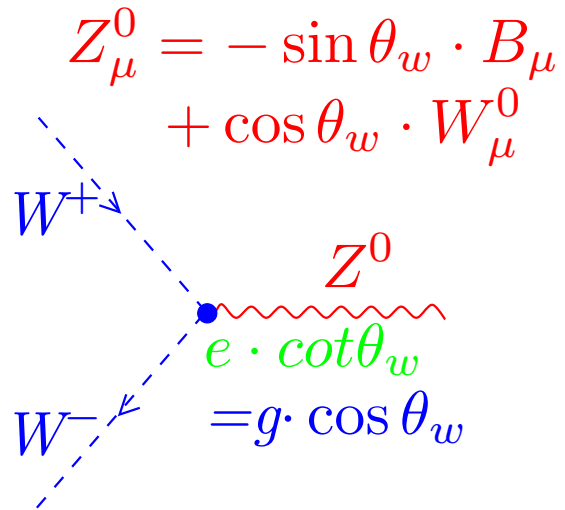
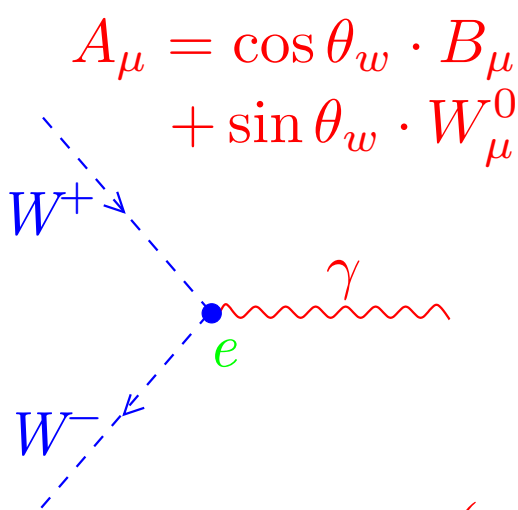
$$\partial_\mu \partial^\mu \vec{W}_\nu - \partial_\nu (\partial^\mu \vec{W}_\mu) = \vec{J}_\nu,$$

eine Wellengleichung für jede Komponente (ohne Lorentz-Eichung) mit neuem **Selbstwechselwirkungsterm** (Quellterm)

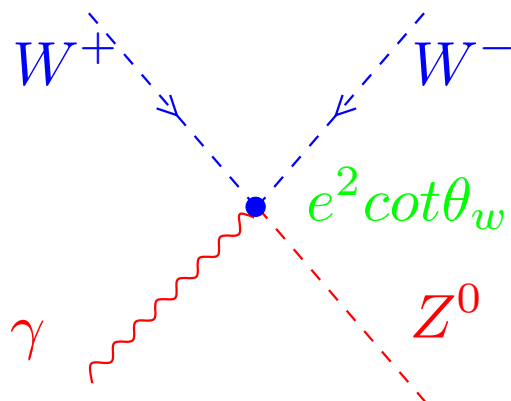
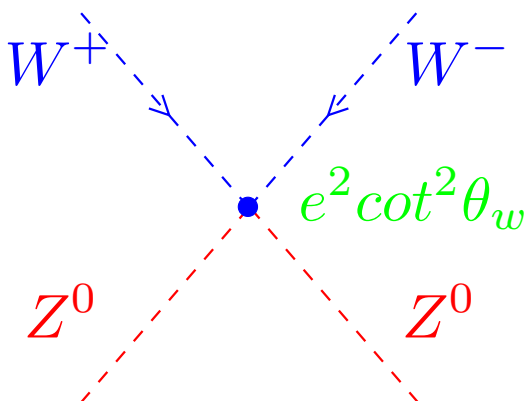
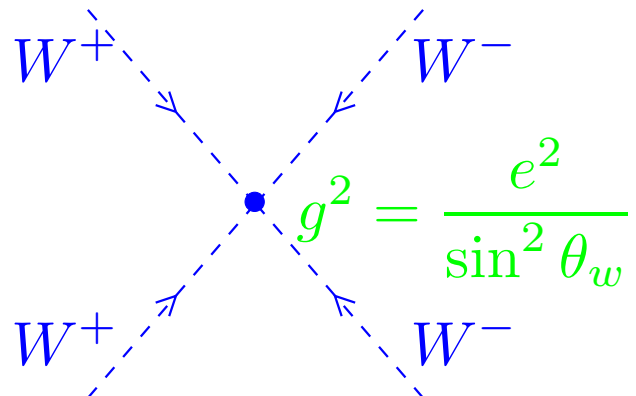
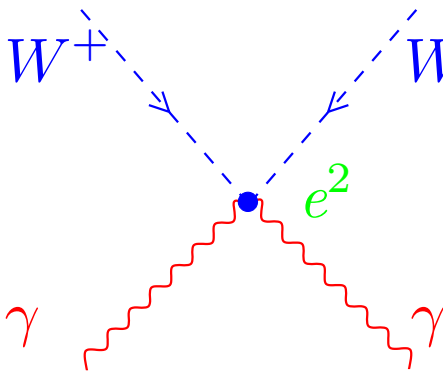
$$\begin{aligned} \vec{J}_\nu &= -g \vec{W}^\mu \times \vec{F}_{\mu\nu} \\ &= -g [\vec{W}^\mu \times \partial_\mu \vec{W}_\nu - \vec{W}^\mu \times \partial_\nu \vec{W}_\mu] + g^2 \vec{W}^\mu \times (\vec{W}_\mu \times \vec{W}_\nu), \end{aligned}$$

d.h. $\mathcal{L}_{\text{Selbst-WW}} = \vec{J}_\mu \vec{W}^\mu.$

\implies 3- und 4-Eichbosonkopplung ($\sim g$ bzw. $\sim g^2$).
 $\longrightarrow t$

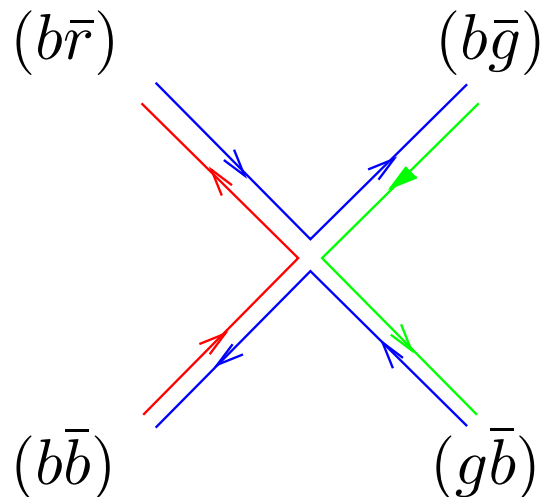
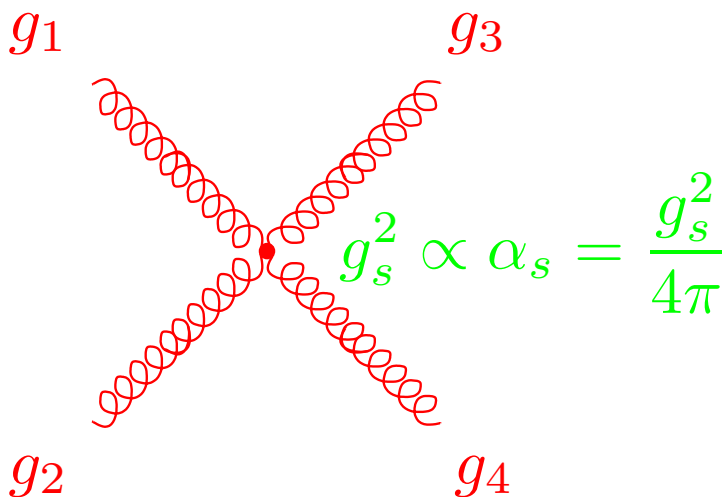
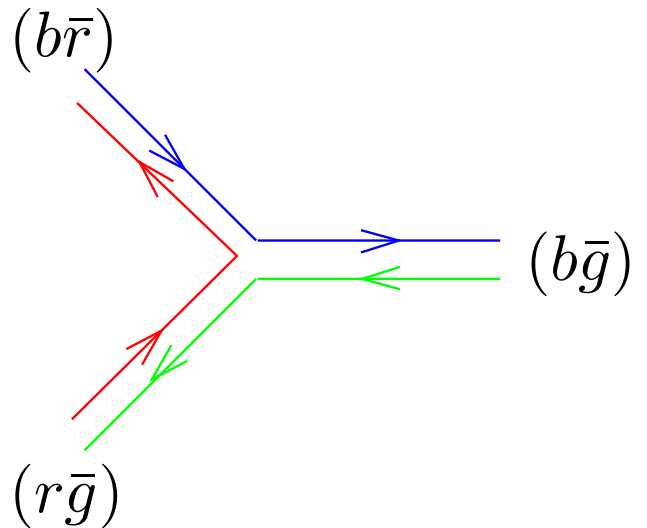
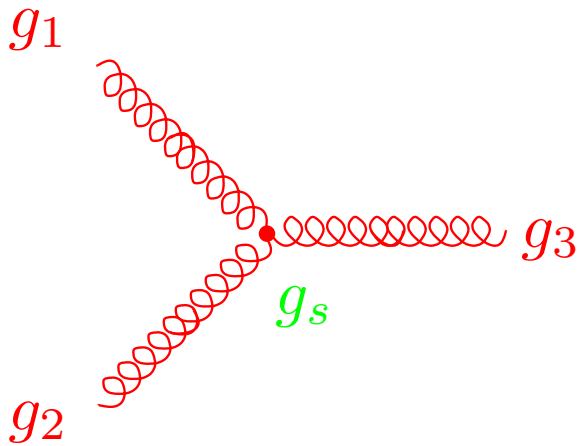


$\gamma : \propto e$ (e.m.)
 $Z^0 : \propto e \cot \theta_w$ (schwach)
 $W^\pm : \propto g^2$ (schwach)



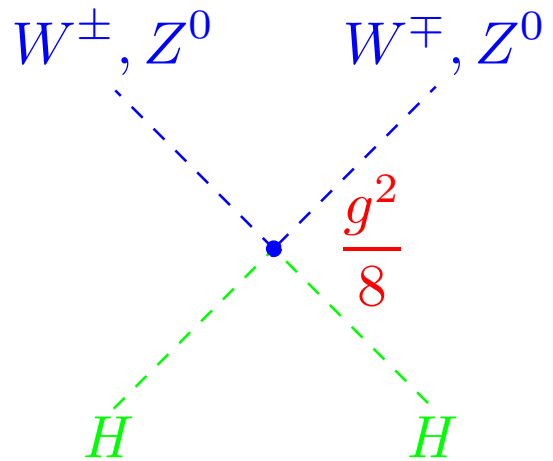
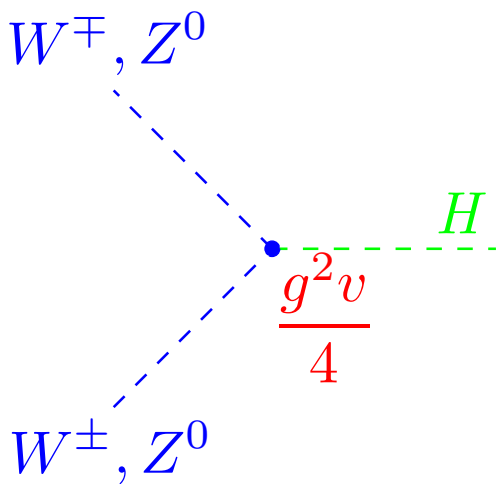
Ebenso die Selbstwechselwirkung der Gluonen (QCD), die für das Confinement der Quarks in den Hadronen verantwortlich ist:

—————> t



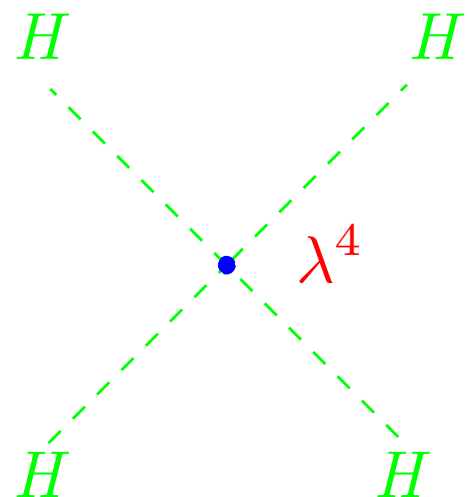
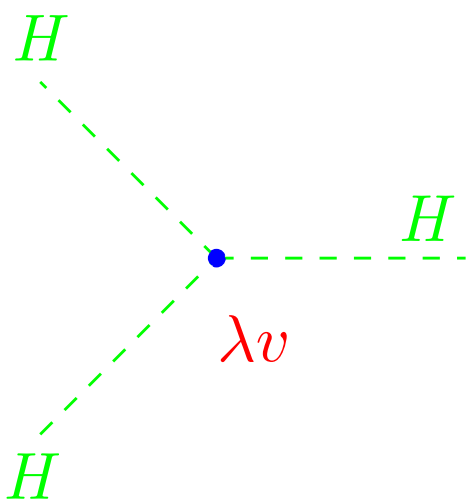
1.5.2.2 Higgs-Eichboson-Wechselwirkung

$$\mathcal{L}_{WW} = \frac{g^2}{8} \cdot (H^2 + 2vH) \left[2W_\mu^+ W^{\mu-} + \frac{1}{\cos^2 \theta_W} Z_\mu^0 Z^{\mu 0} \right]$$



1.5.2.3 Selbstwechselwirkung des Higgs-Bosons

$$\mathcal{L}_{WW} = -\lambda v H^3 - \frac{\lambda}{4} H^4$$

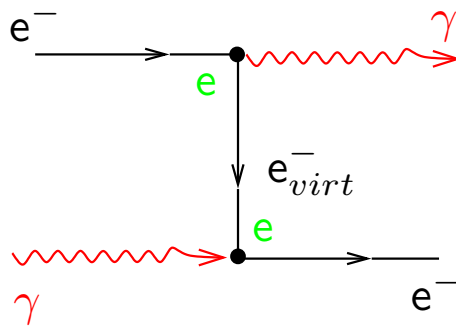
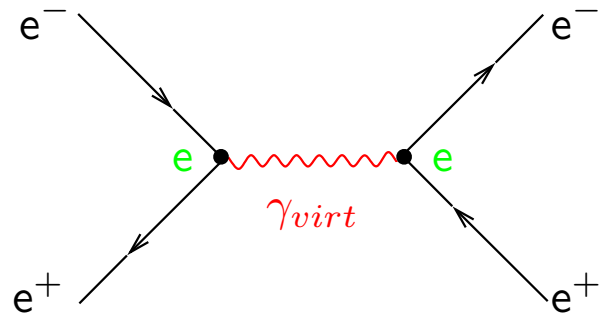
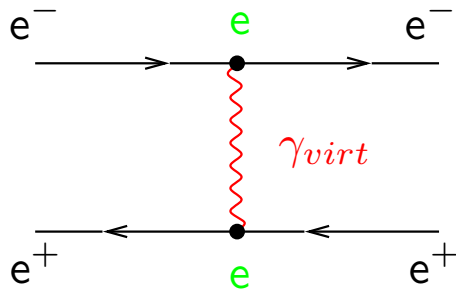


1.5.2.4 QED-Prozesse

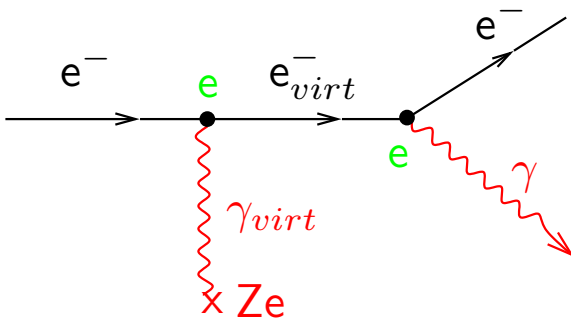
→ t

Elektron-Positron-Streuung $\sigma \propto \alpha^2 \propto e^4$

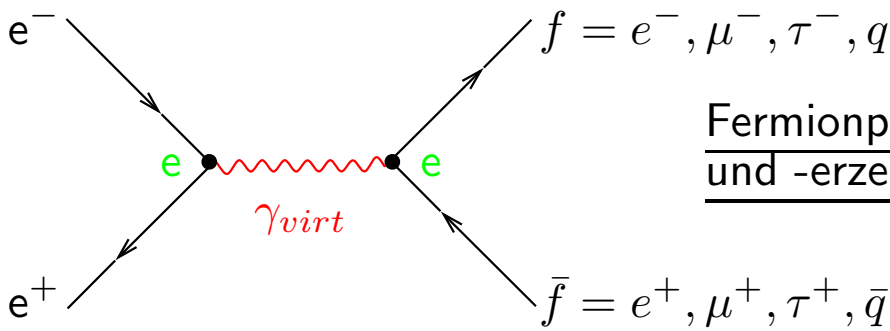
(Bhabha-Streuung)



Elektron-Photon-Compton-Streuung: $\sigma \propto \alpha^2$



Bremsstrahlung:
 $\sigma \propto \alpha^2$

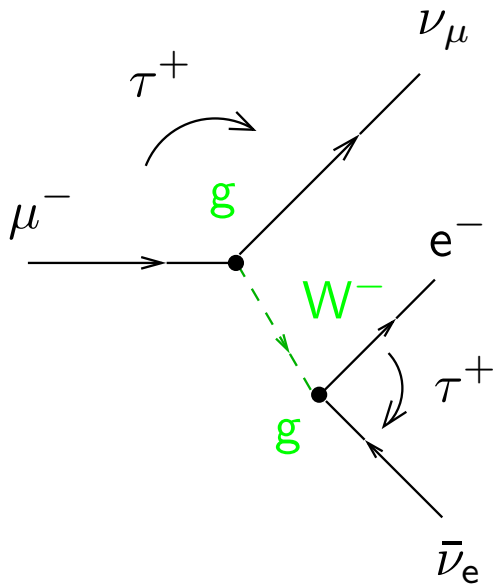


Fermionpaarvernichtung und -erzeugung:
 $\sigma \propto \alpha^2$

1.5.2.5 QCD-Prozesse

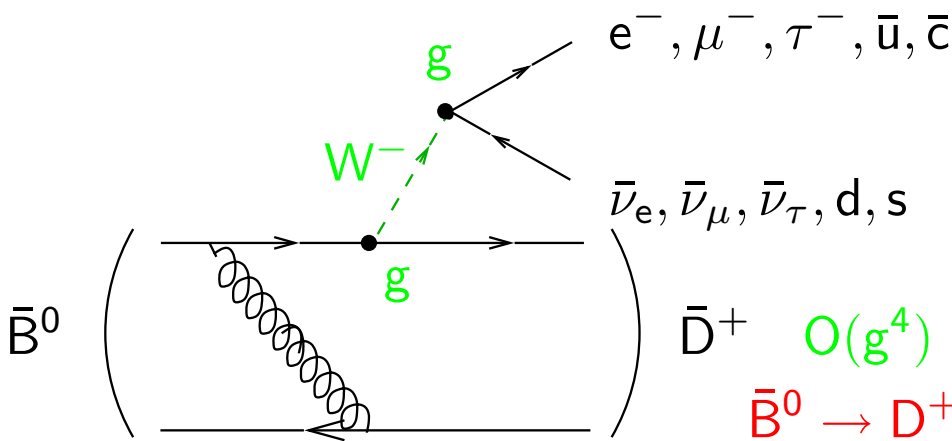
1.5.2.6 Schwache Prozesse

Schwache Zerfälle (CC)



$$\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$$

$$O(g^4) = O(G_F^2)$$

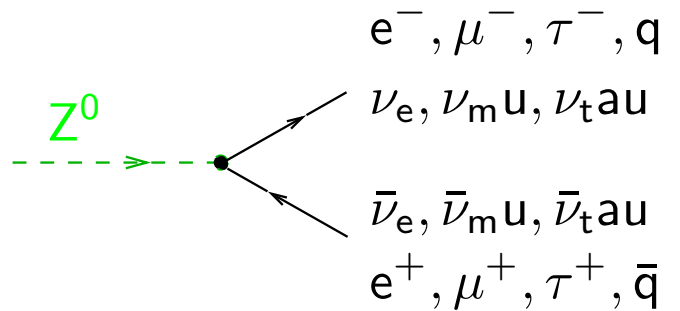
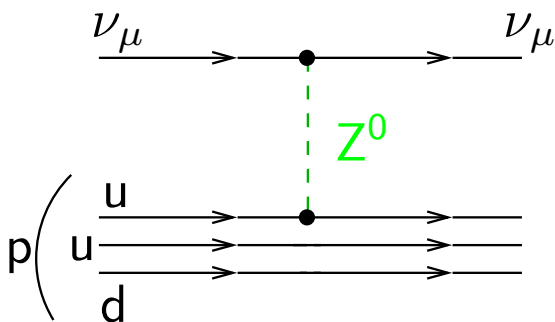


$$O(g^4) = O(G_F^2)$$

$$\bar{B}^0 \rightarrow D^+ e^- \bar{\nu}_e$$

Zuschauerprozess

Neutrale Stromwechselwirkung



$$\Rightarrow N_\nu = 3 (2m_\nu Z)$$

1.5.2.7 Prozesse höherer Ordnung in der Störungstheorie: Strahlungskorrekturen

1.5.2.7.1 Elektroschwache Korrekturen

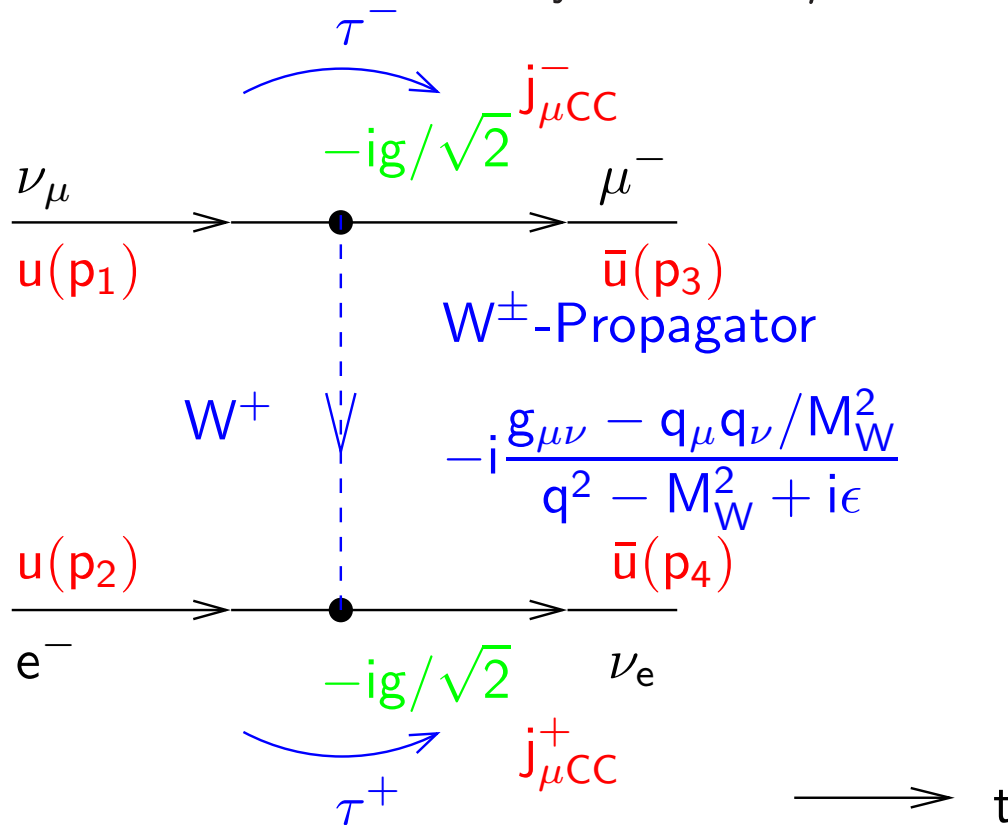
1.5.7.2 QCD-Korrekturen

1.5.3 Prozesse der schwachen Wechselwirkung

Beispiel: Neutrino-Elektron-Streuung:

CC-Prozeß: $\nu_\mu e^- \longrightarrow \mu^- \nu_e$

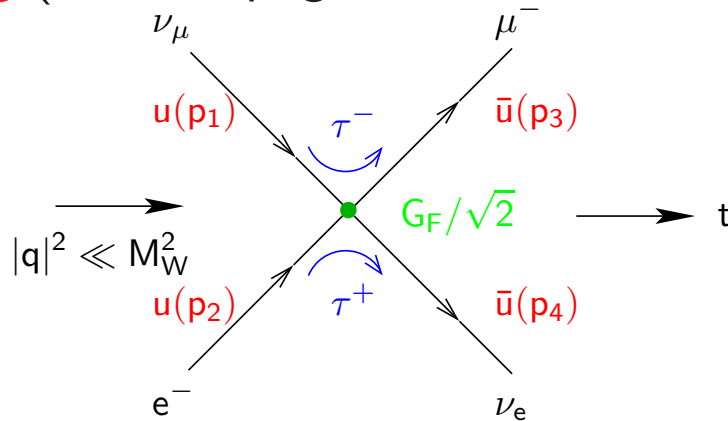
(verwandt mit dem schwachen Myonzerfall: $\mu^- \rightarrow e^- \nu_\mu \bar{\nu}_e$):



Das Übergangsmatrixelement ist:

$$\mathcal{M} = i \frac{g^2}{2} \cdot [\bar{u}_\mu(p_3) \gamma^\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} u_{\nu_\mu}(p_1)] \underbrace{\frac{-g_{\mu\nu} + q_\mu q_\nu / M_w^2}{q^2 - M_W^2}}_{\rightarrow \frac{1}{M_W^2} \text{ f. } |q|^2 \ll M_W^2} \cdot [\bar{u}_{\nu_e}(p_4) \gamma^\nu \frac{1 - \gamma_5}{2} u_e(p_2)]$$

geht in der Näherung kleiner Impulsüberträge $|q|^2 \ll M_W^2$ (wie beim Myonzerfall), d.h. sehr kurze Reichweite der Feldquanten, über in das Matrixelement für die **Fermi'sche 4-Fermion-Punktwechselwirkung** oder **schwache Strom-Strom-Wechselwirkung** (kein Propagator für Austauschteilchen):



$$\mathcal{M} = i \frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{u}_\mu(p_3) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u_{\nu_\mu}(p_1)] [\bar{u}_{\nu_e}(p_4) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) u_e(p_2)]$$

mit der schwachen **Fermi-Kopplungskonstanten** G_F .

Präzisionmessung der Fermi-Konstanten aus der Myon-Lebensdauer

$$\tau_\mu = \frac{1}{\Gamma_\mu} = \frac{192\pi^3}{G_F^2 m_\mu^5} :$$

$$\implies G_F = (1.16639 \pm 0.00002) \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$$

$$\implies \boxed{\frac{g^2}{8M_W^2} = \frac{G_F}{\sqrt{2}}}$$

Erklärt die Schwachheit der schwachen Wechselwirkung bei niedrigen Energien trotz

$$g = \frac{e}{\sin \theta_W} \geq e :$$

Wenn M_W groß ist, ist G_F klein.

Nach der SSB gelten die Beziehungen

$$M_W \equiv \frac{gv}{2} = \left(\frac{g^2 \sqrt{2}}{8G_F} \right)^{1/2} = \frac{g}{2} (\sqrt{2}G_F)^{-1/2}$$

$$\implies v = (\sqrt{2}G_F)^{-1/2} = 246 \text{ GeV} = \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}},$$

$$\implies \Phi_0 = \frac{v}{\sqrt{2}} = 174 \text{ GeV},$$

der Energieskala (d.h. Temperaturskala, $E = kT$) der elektroschwachen Symmetriebrechung (Phasenübergang).

$$\begin{aligned} \implies M_W &= \frac{ev}{2 \sin \theta_W} \\ M_W^2 &= \frac{e^2}{4\sqrt{2}G_F \sin^2 \theta_W} \equiv \frac{\pi\alpha}{\sqrt{2}G_F \sin^2 \theta_W} \\ &= \frac{(37.3 \text{ GeV})^2}{\sin^2 \theta_W}. \end{aligned}$$

Experimentell (Fermion-Paarproduktion in e^+e^- -Vernichtung bei LEP/CERN, νN -Streuung):

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta_W(E = M_Z) &= 0.23136 \pm 0.00015 \\ \implies M_W &\approx 78 \text{ GeV} \\ \implies M_Z &= \frac{M_W}{\cos \theta_W} \approx 89 \text{ GeV} \end{aligned}$$

(Vorhersagen der GSW-Theorie in niedrigster Ordnung der Störungstheorie).

Experimentell (Z - und W -Bosonerzeugung in der e^+e^- -Vernichtung bei LEP und SLD und in der $p\bar{p}$ -Vernichtung am Tevatron/FNAL):

$$\begin{aligned}M_Z &= 91.1875 \pm 0.0021 \text{ GeV}, \\M_W &= 80.451 \pm 0.033 \text{ GeV}.\end{aligned}$$

Übereinstimmung mit den theoretischen Vorhersagen mit hoher Präzision, wenn **elektroschwache Strahlungskorrekturen** (Prozesse höherer Ordnung der Störungstheorie der elektroschwachen WW).

⇒ Die am besten geprüfte physikalische Theorie.

Inputparameter der Theorie:

$$g, g', v, g_f.$$

Alternativ (experimentell am besten bestimmt):

$$\alpha(E = M_Z), G_F, \sin^2 \theta_W \text{ oder } M_Z, m_f.$$

Die **Masse des Higgs-Bosons**

$$M_H = \sqrt{-2\mu^2} = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \cdot v$$

und die **Massen der Fermionen**

$$m_f = \frac{g_f v}{\sqrt{2}}$$

lassen sich im Standardmodell nicht vorhersagen.

1.5.4 Renormierung der Kopplungskonstanten

Fundamentales Problem bei der störungstheoretischen Berechnung von Observablen in der relativistischen Feldtheorie mit elementaren Punktteilchen als Trägern der Ladungen:

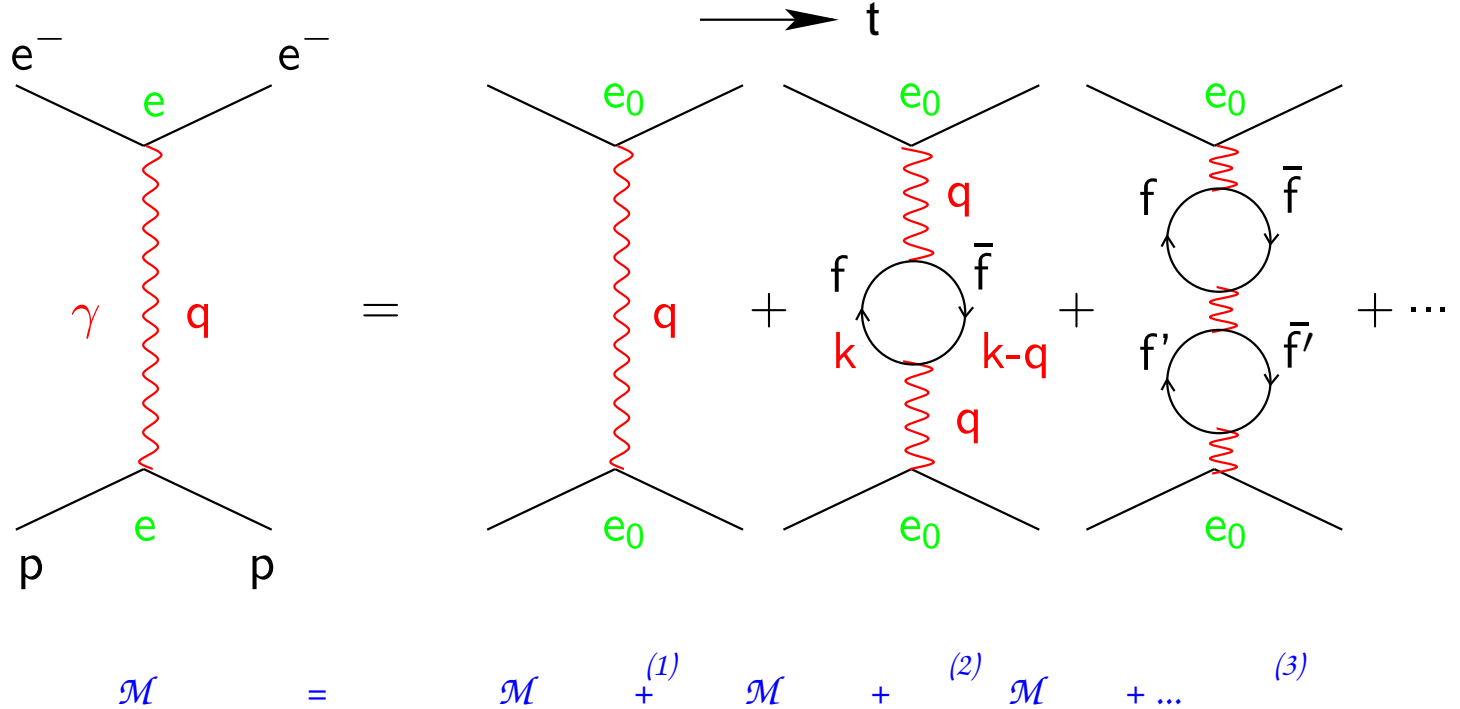
Divergenzen bei hohen Impulsüberträgen $\rightarrow \infty$, d.h. kleinen Abständen $\rightarrow 0$ in Diagrammen höherer Ordnung (Schleifendiagramme), die über die Prozesse niedrigster Ordnung (Baum-Graphen) hinausgehen (sog. UV-Divergenzen).

Problem behebbar durch das **Renormierungsprogramm** (effektive Ladungen und Massen in Anwesenheit von quantenmechanischen Vakuumfluktuationen) für renormierbare Feldtheorien.

Erfolg der QED aufgrund ihrer Eigenschaft der Renormierbarkeit.

Auch Nicht-Abelsche Eichtheorien (auch mit SSB) sind renormierbar (t'Hooft, Veltman 1971).

1.5.4.1 Beispiel aus der QED: Vakuumpolarisation bei der e^-p -Coulomb-Streuung



Die QED-Beiträge höherer Ordnung führen zu einer effektiven Modifikation des Photon-Propagators, die die **Form** des Resultats niedrigster Ordnung unverändert läßt:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{(1)} &= e_0^2 \bar{u}_e(p_3) \gamma^\mu u_e(p_1) \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \bar{u}_p(p_4) \gamma^\nu u_p(p_2); \\ \mathcal{M}^{(2)} &= e_0^2 \bar{u}_e(p_3) \gamma^\mu u_e(p_1) \left[\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \right. \\ &\quad \cdot Q_f^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(ie_0 \gamma^\nu \frac{i(k+m)}{k^2 - m^2} ie_0 \gamma^\rho \frac{i(q-k+m)}{(q-k)^2 - m^2} \right) \\ &\quad \left. \cdot \frac{-ig_{\rho\sigma}}{q^2} \right] \bar{u}_p(p_4) \gamma^\sigma u_p(p_2). \end{aligned}$$

(Summe über alle Fermionen und W^\pm in der Schleife, gewichtet mit Ladung und Masse/einfallende Energie).

Das Integral über $d^4k = k^2 dk d\Omega_k dk_0$, $k = |\vec{k}|$, divergiert für $k \rightarrow \infty$.

Deshalb willkürliche Integrationsgrenze beim sog. Abschneideparameter $k = \Lambda$.

Dann ist für $q^2 \rightarrow 0$ ($|Q_f| = 1$):

$$\mathcal{M}^{(1)} + \mathcal{M}^{(2)} = e_0^2 \left[1 - \frac{\alpha_0}{3\pi} \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} \right) \right] \frac{\mathcal{M}^{(1)}}{e_0^2}.$$

Höhere Schleifenordnungen $n = 2, \dots, \infty$ ("leading log"-Strahlungskorrekturen) wiederholen sich in der Korrektur zum Photon-Propagator in einer geometrischen Reihe, die exakt aufsummiert werden kann, d.h.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}^{(n)} &= e_0^2 \left[1 - \frac{\alpha_0}{3\pi} \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} \right) - \left(\frac{\alpha_0}{3\pi} \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} \right) \right)^2 + \dots \right] \frac{\mathcal{M}^{(1)}}{e_0^2} \\ &= \frac{e_0^2}{1 + \frac{\alpha_0}{3\pi} \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} \right)} \cdot \frac{\mathcal{M}^{(1)}}{e_0^2} \end{aligned}$$

In einer fundamentalen Theorie (gültig für alle $k \rightarrow \infty$) soll das Endresultat unabhängig vom Abschneideparameter Λ sein.

Interpretation des Resultats:

Im Streuprozess wird die effektive (renormierte) elektr. Ladung ($\alpha = e^2/4\pi$)

$$\alpha_R(m_e^2) = \alpha = \frac{\alpha_0}{1 + \frac{\alpha_0}{3\pi} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m_e^2}\right)} =: Z_3 \cdot \alpha_0$$

gemessen.

Für $q^2 \rightarrow 0$ ist dies die Elementarladung $e = e_R(m_e^2)$ bzw. die Feinstrukturkonstante $\alpha_R(q^2 = m_e^2) = \alpha \approx \frac{1}{137}$, gemessen in der Coulomb-Streuung bei sehr niedrigen Energien (Atomphysik).

Die (sehr langsame, log) Divergenz in der Renormierungskonstanten Z_3 für $\Lambda \rightarrow \infty$ wird durch die "nackte" Ladung e_0 kompensiert.

Für $|q^2| \gg m_e^2$ gilt:

$$\begin{aligned} \alpha_R(q^2) &= \frac{\alpha_0(\Lambda^2)}{1 + \frac{\alpha_0}{3\pi} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m_e^2}\right) - \frac{\alpha_0}{3\pi} \ln\left(\frac{-q^2}{m_e^2}\right)} \\ &= \frac{\alpha_0(\Lambda^2)}{\left[1 + \frac{\alpha_0}{3\pi} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m_e^2}\right)\right] \left[1 - \frac{\alpha_R(m_e^2)}{3\pi} \ln\left(\frac{-q^2}{m_e^2}\right)\right]} \\ &= \frac{\alpha_R(m_e^2)}{1 - \frac{\alpha_R(m_e^2)}{3\pi} \ln\left(\frac{-q^2}{m_e^2}\right)}. \end{aligned}$$

Allgemein ist die q^2 -Abhängigkeit der el.magn. Kopplung (“laufende” Kopplungskonstante):

$$\alpha_R(q^2) = \frac{\alpha_R(q_0^2)}{1 - \frac{\alpha_R(q_0^2)}{3\pi} \ln\left(\frac{q^2}{q_0^2}\right)}.$$

$$\xrightarrow{\text{alle } f} \frac{\alpha_R(q_0^2)}{1 - \sum_f N_C^f Q_f^2 \frac{\alpha_R(q_0^2)}{3\pi} \ln\left(\frac{q^2}{q_0^2}\right)}.$$

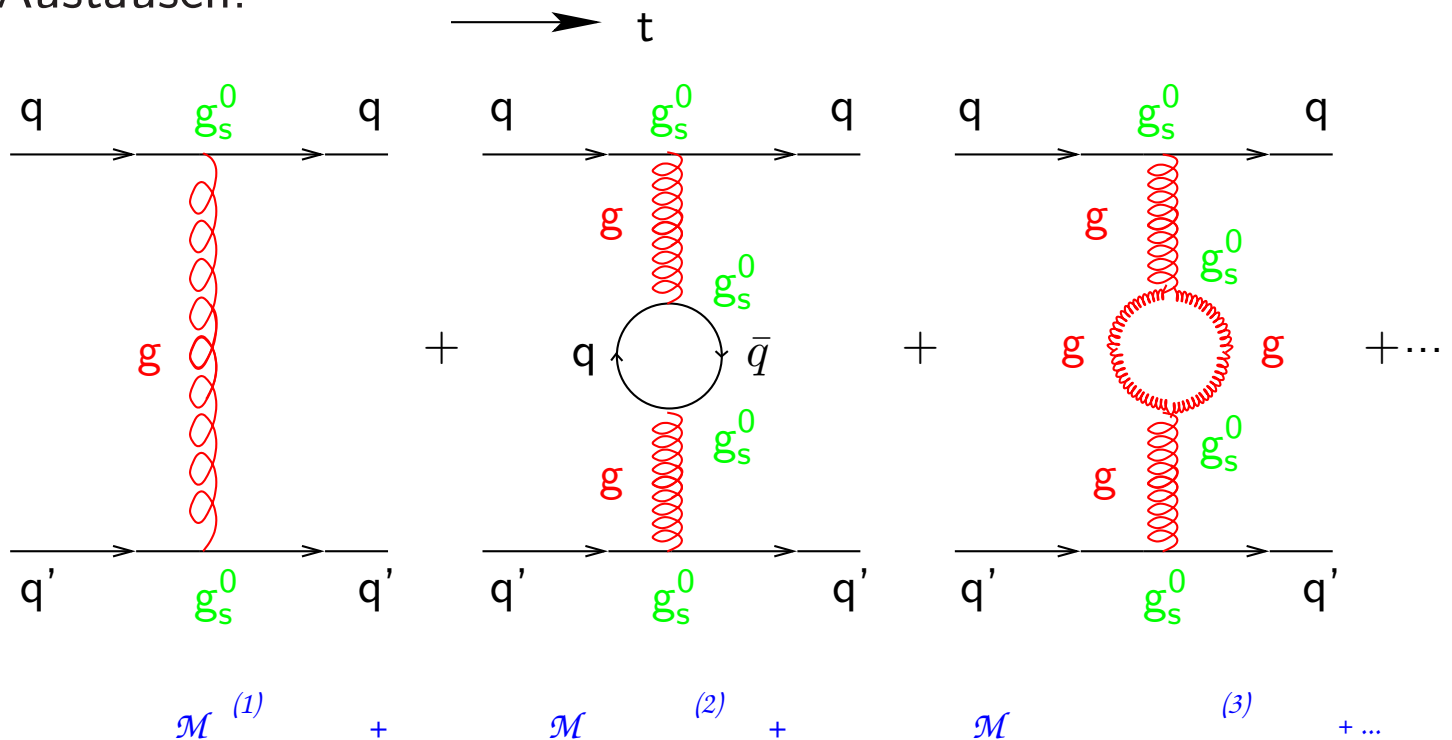
⇒ Sehr langsame Entwicklung (log): $\alpha(M_Z^2) = 1/128.9$.

Kleiner Beitrag zum Lamb-shift in der Atomphysik.

⇒ Abschirmung der “nackten” elektrischen Ladung bei großen Abständen (d.h. kleinen Impulsüberträgen) durch die polarisierten Vakuumfluktuationen (virtuelle $f\bar{f}$ -Paare mit Lebensdauer $\Delta t \approx \hbar/2m_f$) wie in einem polarisierbaren Medium mit Permeabilität $\epsilon > 1$.

1.5.4.2 Die starke Kopplungskonstante der QCD

Vakuumpolarisation in der Quark-Quark-Streuung mit Gluon-Austausch:



$\implies q^2$ -Abhängigkeit der starken Kopplungskonstante $\alpha_s = \frac{g_s}{4\pi}$:

Beitrag der inneren Quark-Schleifen in Analogie zur QED mit $e^2 \rightarrow g_s^2 Sp\left(\frac{\lambda^a \lambda^b}{2}\right) = g_s^2 \frac{\delta^{ab}}{2}$:

$$[\alpha_s(q^2)]_{q\bar{q}} = \frac{\alpha_s(q_0^2)}{1 - N_q \frac{\alpha_s(q_0^2)}{6\pi} \ln\left(\frac{q^2}{q_0^2}\right)}.$$

Beitrag der Gluon-Schleifen:

$$[\alpha_s(q^2)]_{gg} = \frac{\alpha_s(q_0^2)}{1 + 11 \frac{\alpha_s(q_0^2)}{4\pi} \ln\left(\frac{q^2}{q_0^2}\right)}.$$

Zusammen (additive Beiträge):

$$\begin{aligned} \alpha_s(q^2) &= \frac{\alpha_s(q_0^2)}{1 + (33 - 2N_q) \frac{\alpha_s(q_0^2)}{12\pi} \ln\left(\frac{q^2}{q_0^2}\right)} \\ &= \frac{12\pi}{(33 - 2N_q) \ln\left(\frac{q^2}{\Lambda_{QCD}^2}\right)} \end{aligned}$$

mit der Definition des QCD-Skalenparameters (aus der Störungstheorie) $\Lambda_{QCD}^2 = q_0^2 e^{-(C\alpha_s(q_0^2))^{-1}}$ mit $C = (33 - 2N_q)/12\pi$, der experimentell bestimmt werden muß (äquivalent zur Messung von $\alpha_s(q_0^2)$).

(gültig nur für $q^2 \gg \Lambda_{QCD}$: Störungstheorie anwendbar).

\implies Für $N_q \leq 16$ nimmt die starke Kopplungskonstante mit wachsendem q^2 schnell ab:

$$\alpha_s(q^2) \mapsto 0 \text{ für } |q^2| \rightarrow \infty,$$

⇒ sog. **“asymptotische Freiheit”** der Quarks und Gluonen bei hohen Impulsüberträgen bzw. kurzen Abständen, in den farbneutralen Bindungszuständen der Hadronen ($d < 10^{-15} \text{ m} \approx \text{Größe des Protons}$).

Effekt der überwiegenden Gluon-Vakuumpolarisation (nicht-Abelsche farbgeladene Eichbosonen): Anti-Abschirmung der Farbladung.

Zahlreiche Messungen der starken Kopplungskonstanten (aus hadronischen Wirkungsquerschnitten) ergeben:

$$\alpha_s(M_Z^2) = 0.118 \pm 0.002.$$

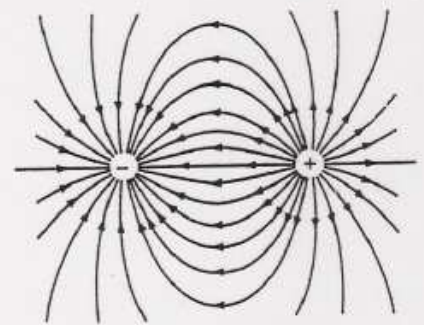
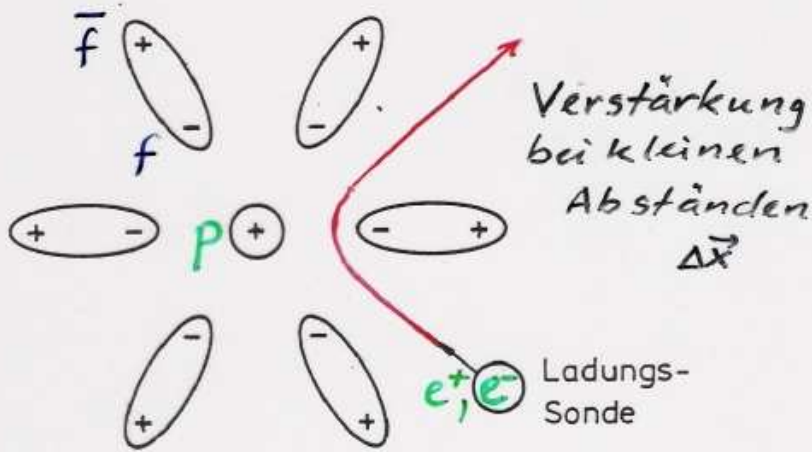
⇒ Bei großen q^2 ist die Störungstheorie in der QCD anwendbar;

im Gegensatz zu kleinen $q^2 \leq \Lambda_{QCD}$ bzw. großen Abständen zwischen den Quarks, bei denen die starke Kopplungskonstante große Werte annimmt, d.h. keine Störungstheorie:

Confinement der Quarks und Gluonen in Hadronen;

Fragmentation von Quarks und Gluonen in farbneutrale Hadronen.

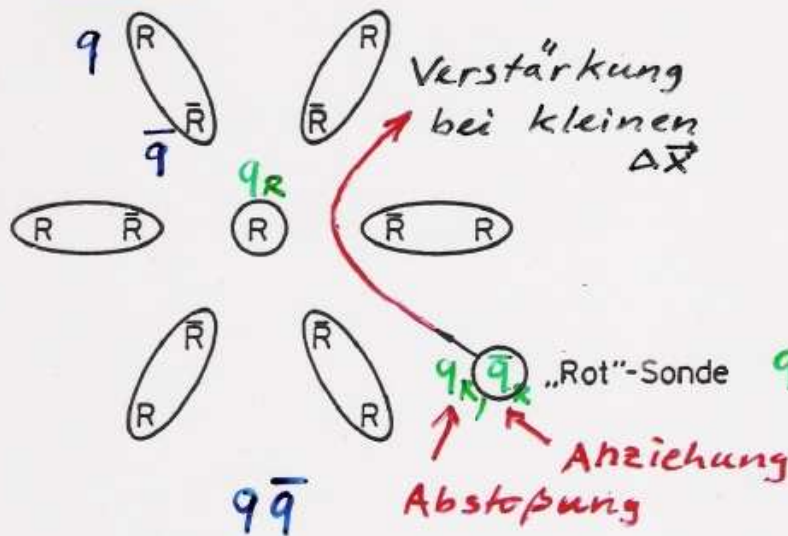
QED: Vakuumpolarisation



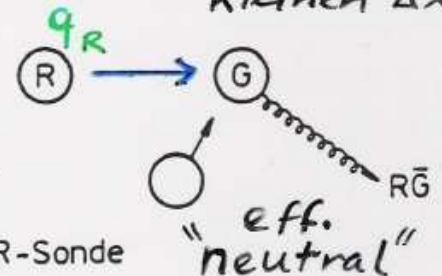
elektrisches Dipol-Feld:

$$V(r) = -\frac{e^2}{4\pi r}$$

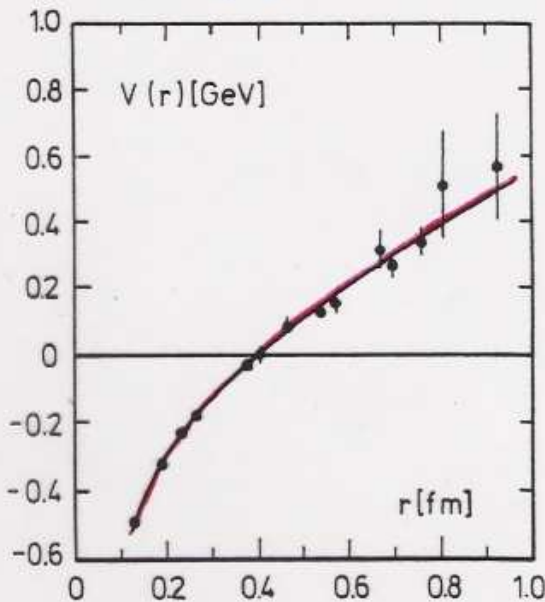
QCD: Vakuumpolarisation



Abschwächung bei kleinen Δx

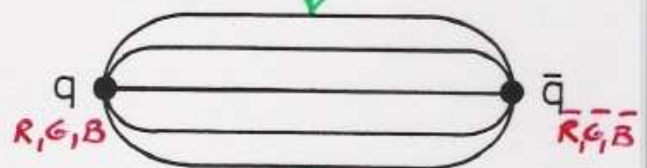


gg



Flußschlauch, durch Gluon-Selbstkopplung

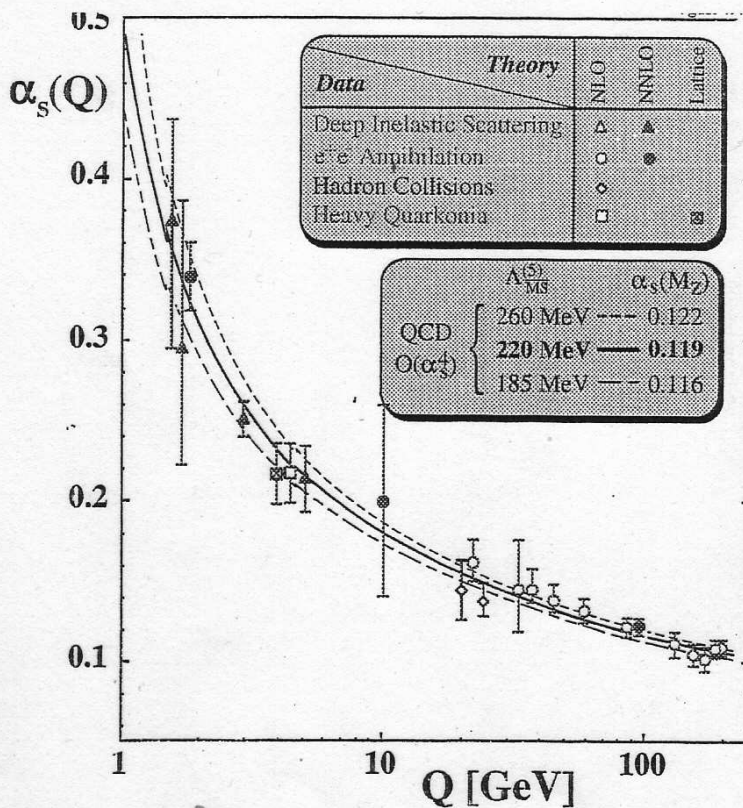
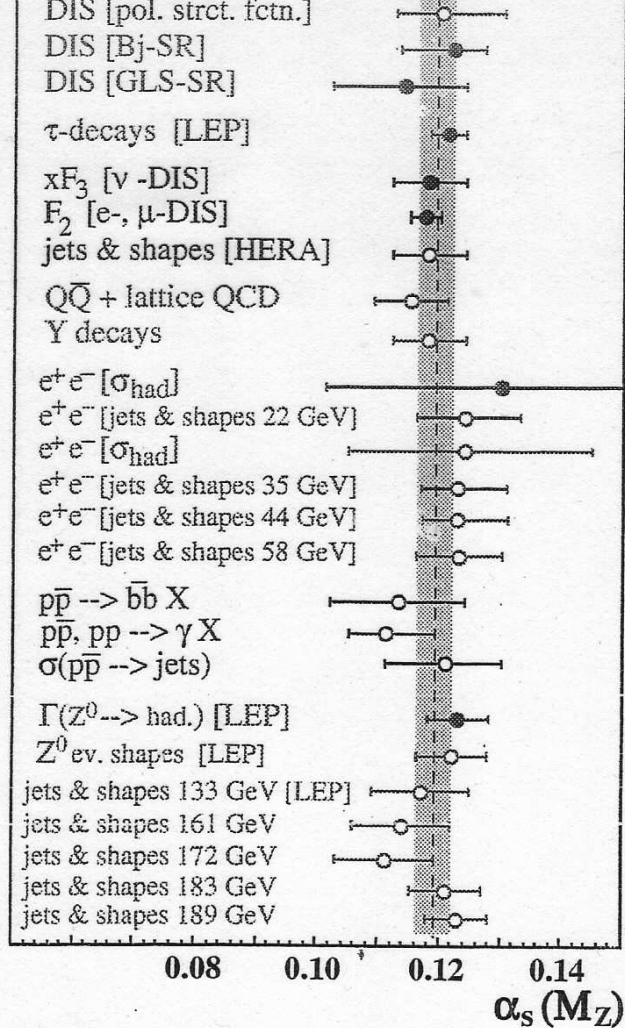
$\sim 1 \text{ fm } \phi$



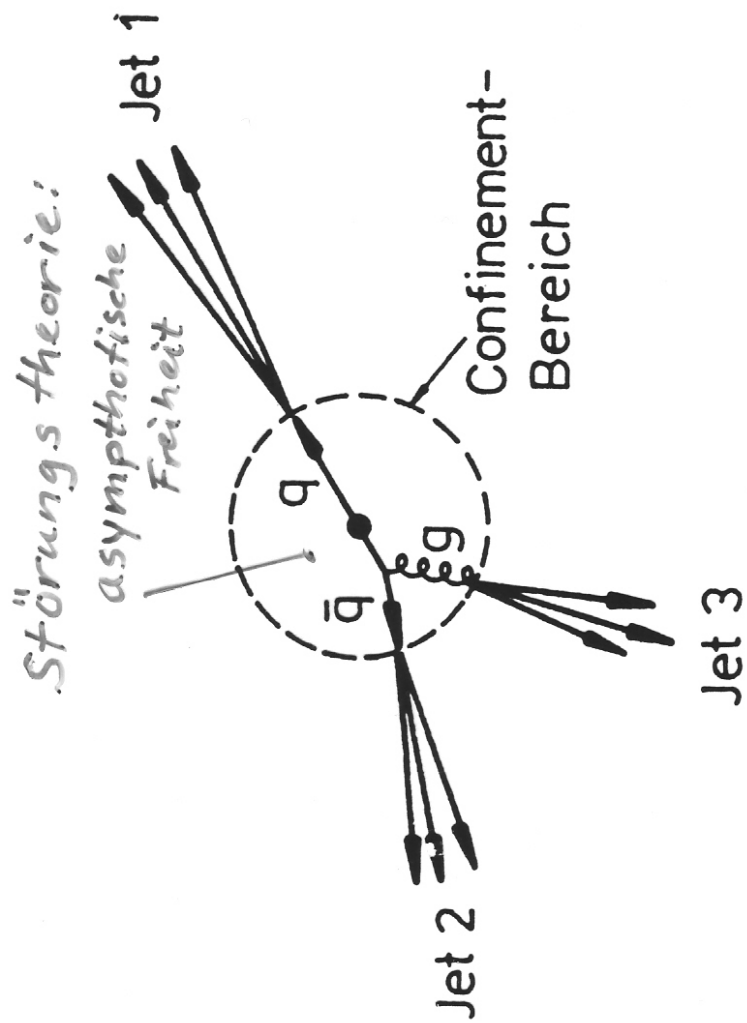
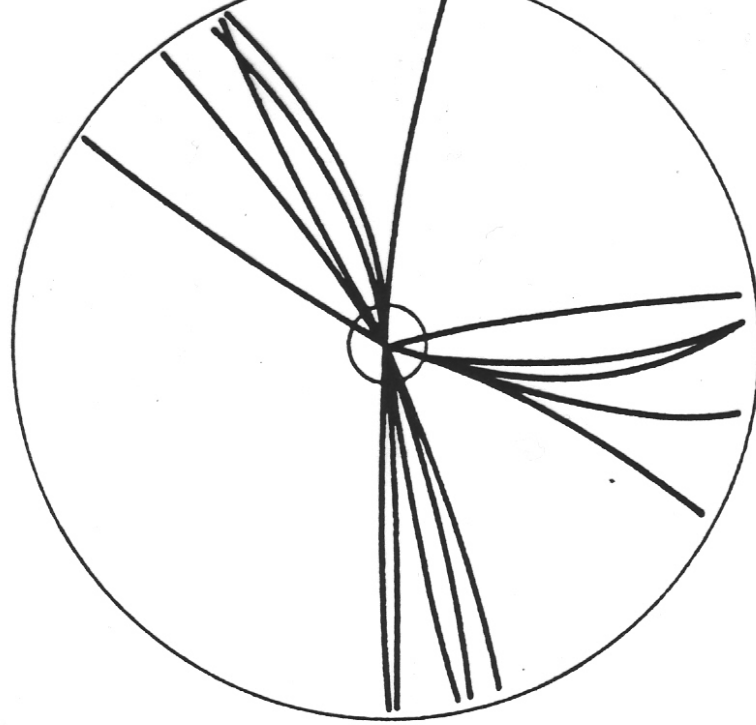
chromoelektrisches Feld (Parametrisierung):

$$V_c^{q\bar{q}}(r) = -\frac{4\alpha_s}{3r} + \sigma \cdot r$$

QCD-Simulationsrechnung ($SU(3)$ -Singulett) (numerische Lösung)



$$\alpha_s(M_Z^2) = 0.118 \pm 0.002$$



2. Aktuelle experimentelle Tests des Standardmodells

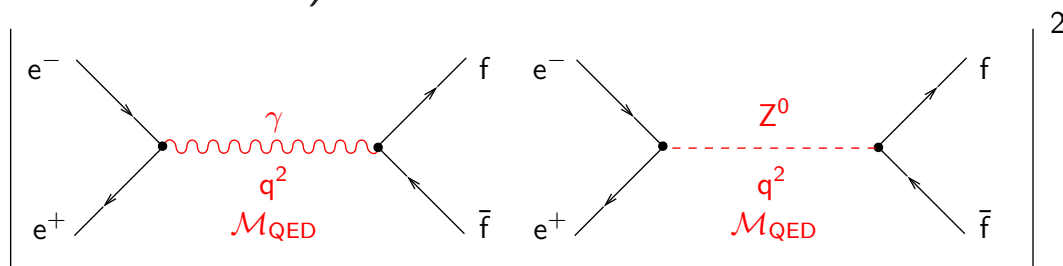
2.1 Präzisionsmessungen der elektroschwachen Wechselwirkung

2.1.1 Messungen bei der Z^0 – Resonanz

Am LEP-Speicherring am CERN wurde zwischen 1989 und 1995 (Phase LEP I) die Erzeugung von Fermion-Antifermion-Paaren in der e^+e^- -Vernichtung bei der Z^0 -Resonanz, d.h. bei einer Schwerpunktsenergie von $\sqrt{s} = M_Z$ gemessen.

Bei dieser Energie vernichten sich die Elektronen und Positronen in der Kollisionszone im Zentrum des Detektors (Wechselwirkungspunkt) fast ausschließlich in **reelle Z^0 -Bosonen im Ruhesystem**, die **unter der elektroschwachen Wechselwirkung** in Fermion-Antifermion-Paare mit $2m_f \leq M_Z$ zerfallen.

Im allgemeinen tritt Interferenz zwischen Photon- und Z^0 -Austausch auf (elektroschwache Interferenz zwischen den beiden NC-Prozessen):



Als Funktion der Schwerpunktsenergie $\sqrt{s} = 2E_e = \sqrt{q^2}$ und des Produktionswinkels θ des Fermions f bezüglich der Einfallrichtung des Elektrons

2. Aktuelle experimentelle Tests des Standardmodells

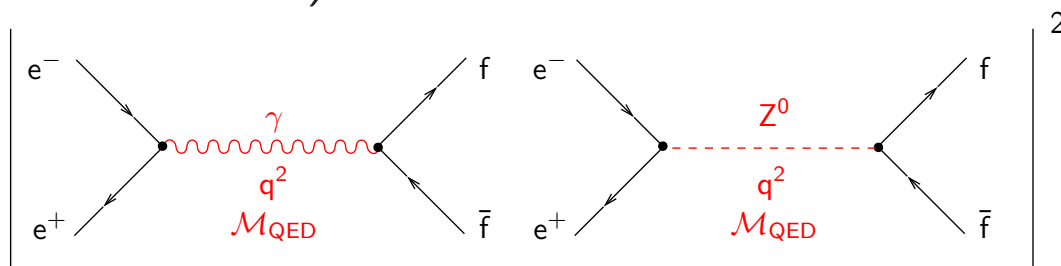
2.1 Präzisionsmessungen der elektroschwachen Wechselwirkung

2.1.1 Messungen bei der Z^0 – Resonanz

Am LEP-Speicherring am CERN wurde zwischen 1989 und 1995 (Phase LEP I) die Erzeugung von Fermion-Antifermion-Paaren in der e^+e^- -Vernichtung bei der Z^0 -Resonanz, d.h. bei einer Schwerpunktsenergie von $\sqrt{s} = M_Z$ gemessen.

Bei dieser Energie vernichten sich die Elektronen und Positronen in der Kollisionszone im Zentrum des Detektors (Wechselwirkungspunkt) fast ausschließlich in **reelle Z^0 -Bosonen im Ruhesystem**, die **unter der elektroschwachen Wechselwirkung** in Fermion-Antifermion-Paare mit $2m_f \leq M_Z$ zerfallen.

Im allgemeinen tritt Interferenz zwischen Photon- und Z^0 -Austausch auf (elektroschwache Interferenz zwischen den beiden NC-Prozessen):



Als Funktion der Schwerpunktsenergie $\sqrt{s} = 2E_e = \sqrt{q^2}$ und des Produktionswinkels θ des Fermions f bezüglich der Einfallrichtung des Elektrons

hat der Wirkungsquerschnitt im Schwerpunktsystem der e^+e^- -Paare (=Laborsystem des Detektors) in niedrigster Ordnung die Form (siehe Kapitel 1.5.1.7):

$$\begin{aligned}
 \frac{d\sigma}{d\Omega} (e^+e^- \rightarrow f\bar{f}) &= \\
 &= \text{Konst.} \cdot s \cdot |\mathcal{M}_{QED} + \mathcal{M}_{\text{schwach}}|^2 \\
 &= \text{Konst.} \cdot s \cdot [|\mathcal{M}_{QED}^2| + 2\text{Re}(\mathcal{M}_{QED}\mathcal{M}_{\text{schwach}}) \\
 &\quad + |\mathcal{M}_{\text{schwach}}|^2] \\
 &= N_C^f \frac{\alpha^2}{4s} [C_1^f(1 + \cos^2 \theta) + C_2^f \cos \theta] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \sigma_{f\bar{f}} \left[\frac{3}{8}(1 + \cos^2 \theta) + A_{FB}^f \cos \theta \right]
 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
 C_1^f(s) &= Q_e^2 Q_f^2 + 8Q_e Q_f v_e v_f \text{Re}\chi(s) \\
 &\quad + 16(v_e^2 + a_e^2)(v_f^2 + a_f^2) |\chi(s)|^2
 \end{aligned}$$

$$C_2^f(s) = 16Q_e Q_f a_e a_f \text{Re}\chi(s) + 32v_e a_e v_f a_f |\chi(s)|^2$$

$$\sigma_{f\bar{f}}(s) = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{d\sigma}{d\Omega} d\cos\theta d\Phi = N_C^f \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \cdot C_1^f(s)$$

$$\begin{aligned}
 A_{FB}^f(s) &= \frac{\int_0^{+1} \frac{d\sigma}{d\Omega} d\cos\theta - \int_{-1}^0 \frac{d\sigma}{d\Omega} d\cos\theta}{\int_{-1}^{+1} \frac{d\sigma}{d\Omega} d\cos\theta} \\
 &= \frac{N_F - N_B}{N_F + N_B} = \frac{3}{8} \cdot \frac{C_2^f(s)}{C_1^f(s)},
 \end{aligned}$$

den schwachen neutralen (Vektor- und Axialvektorstrom-) Kopplungskonstanten

$$v_f = I_f^0 - 2Q_f \sin^2 \theta_W \equiv \frac{1}{2} - 2Q_f \sin^2 \theta_W$$

$$a_f = I_f^0 \equiv \frac{1}{2}$$

und dem Z^0 -Propagatorterm

$$\begin{aligned} \chi(s) &= \frac{1}{16 \sin^2 \theta_W \cos^2 \theta_W} \cdot \frac{s}{s - M_Z^2 + iM_Z \Gamma_Z} \\ &= \frac{G_F M_Z^2}{8\pi\alpha\sqrt{2}} \cdot \frac{s}{s - M_Z^2 + iM_Z \Gamma_Z}. \end{aligned}$$

Dabei ist im Schwerpunktsystem $q^2 = (p_1 + p_2)^2 =: s = E_{CMS}^2$ und $\sqrt{s} = 2E_e$.

Für den QED-Anteil (Photonaustausch allein) gilt:

$$\implies \frac{d\sigma}{d\Omega}(e^+e^- \rightarrow f\bar{f}) = N_C^f \frac{\alpha^2 Q_f^2}{4s} (1 + \cos^2 \theta);$$

$$\sigma_{f\bar{f}} = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} = \frac{87 \text{ nb}}{s[\text{GeV}^2]}.$$

$N_C^f = 1$ für Leptonen, $N_C^f = 3$ für Quarks. Damit ist

$$\begin{aligned} R &= \sigma(e^+e^- \rightarrow \sum_{q(E_{CMS} > 2m_q)} q\bar{q}) / \sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) \\ &= 3 \cdot \sum_{q(E_{CMS} > 2m_q)} Q_q^2 \end{aligned}$$

Dabei ist schon berücksichtigt, daß das Z^0 -Boson durch seine schwachen Zerfälle eine endliche Lebensdauer τ_Z und die Z^0 -Resonanz im totalen Wirkungsquerschnitt $\sigma_{f\bar{f}}(s)$ eine endliche Breite $\Gamma_Z = \tau_Z^{-1}$ besitzt (\implies Breit-Wigner-Resonanzkurve).

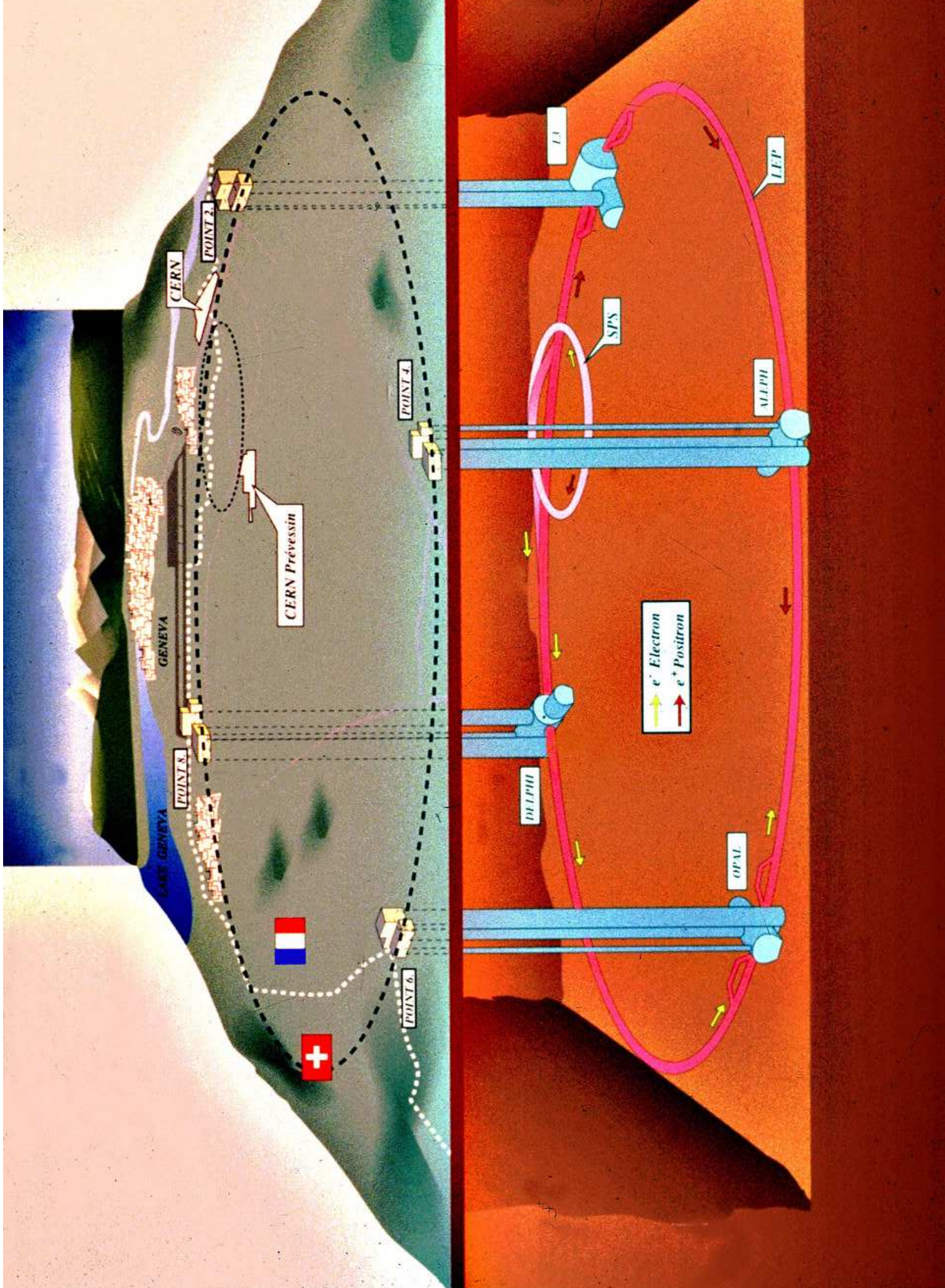
Exakt bei der Resonanz trägt nur der Z^0 -Austausch bei und der Wirkungsquerschnitt ist

$$\begin{aligned}\sigma_{f\bar{f}}^0(s = M_Z^2) &= N_C^f \frac{G_F^2 M_Z^4}{6\pi\Gamma_Z^2} \cdot (v_e^2 + a_e^2)(v_f^2 + a_f^2) \\ &= \frac{12\pi\Gamma_Z^e\Gamma_Z^f}{M_Z^2\Gamma_Z^2}\end{aligned}$$

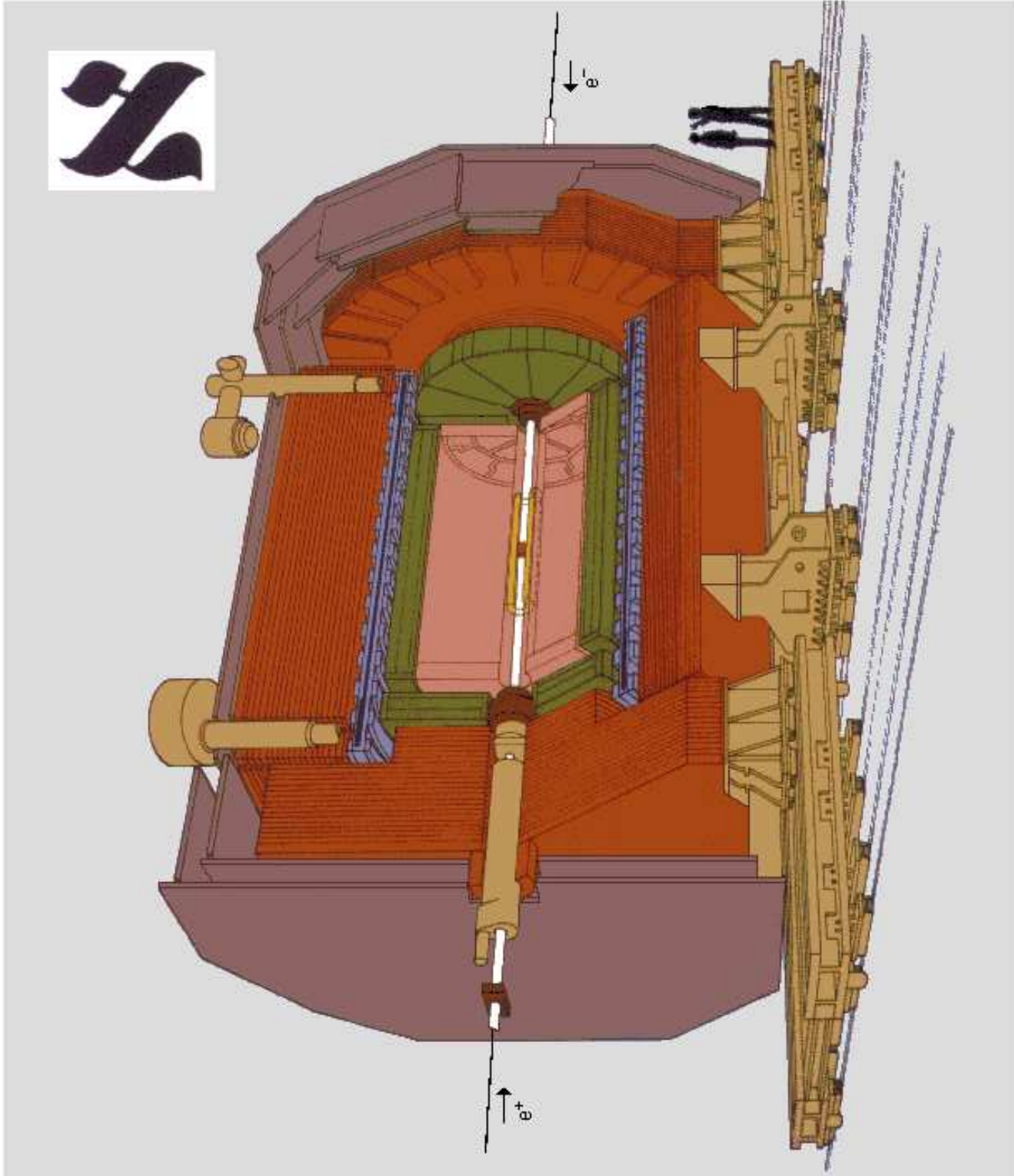
mit den Zerfallswahrscheinlichkeiten (Zerfallsbreiten) des Z^0 -Bosons:

$$\begin{aligned}\Gamma(Z^0 \rightarrow f\bar{f}) &\equiv \Gamma_Z^f = \frac{G_F M_Z^3}{6\pi\sqrt{2}}(v_f^2 + a_f^2) \cdot N_C^f \\ \Gamma(Z^0 \rightarrow e^+e^-) &\equiv \Gamma_Z^e = \frac{G_F M_Z^3}{6\pi\sqrt{2}}(v_e^2 + a_e^2) \\ \Gamma_Z &\equiv \sum_f \Gamma_Z^f \\ \Gamma_Z^{\text{had}} &\equiv \sum_q \Gamma_Z^q \\ A_{FB}^f &= \frac{3}{4}A_e A_f \quad \text{mit} \quad A_f = \frac{2v_f a_f}{v_f^2 + a_f^2}.\end{aligned}$$

Definition: $R_f \equiv \Gamma_Z^{\text{had}} / \Gamma_Z^f$.

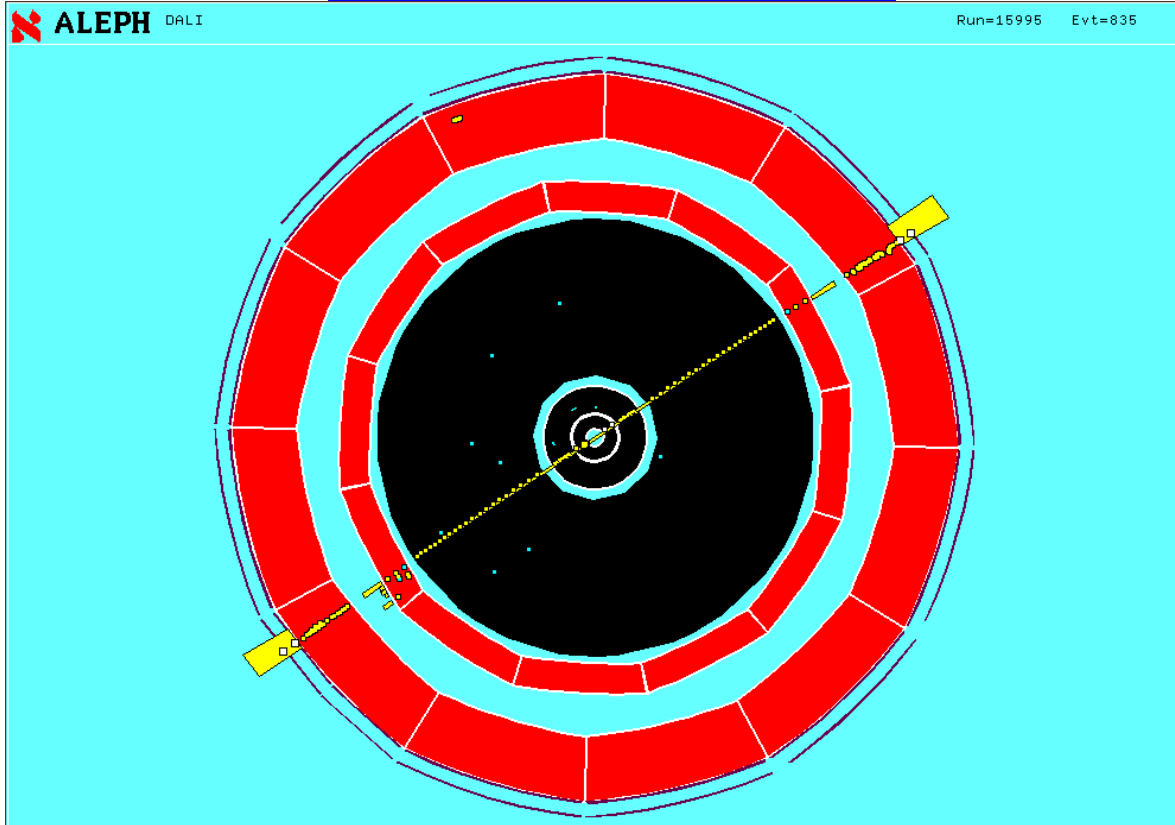


- Vertex Detector
- Inner Tracking Chamber
- Time Projection Chamber
- Electromagnetic Calorimeter
- Superconducting Magnet Coil
- Hadron Calorimeter
- Muon Chambers
- Luminosity Monitors

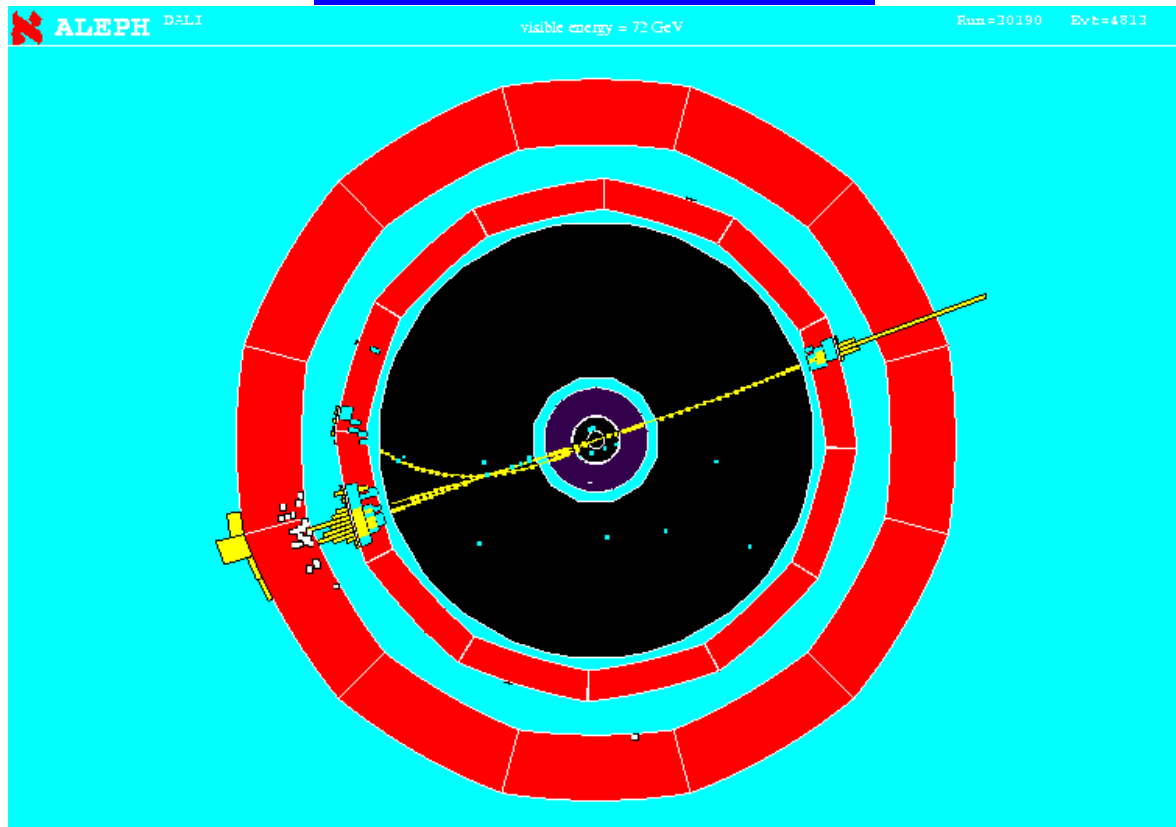


The ALEPH Detector

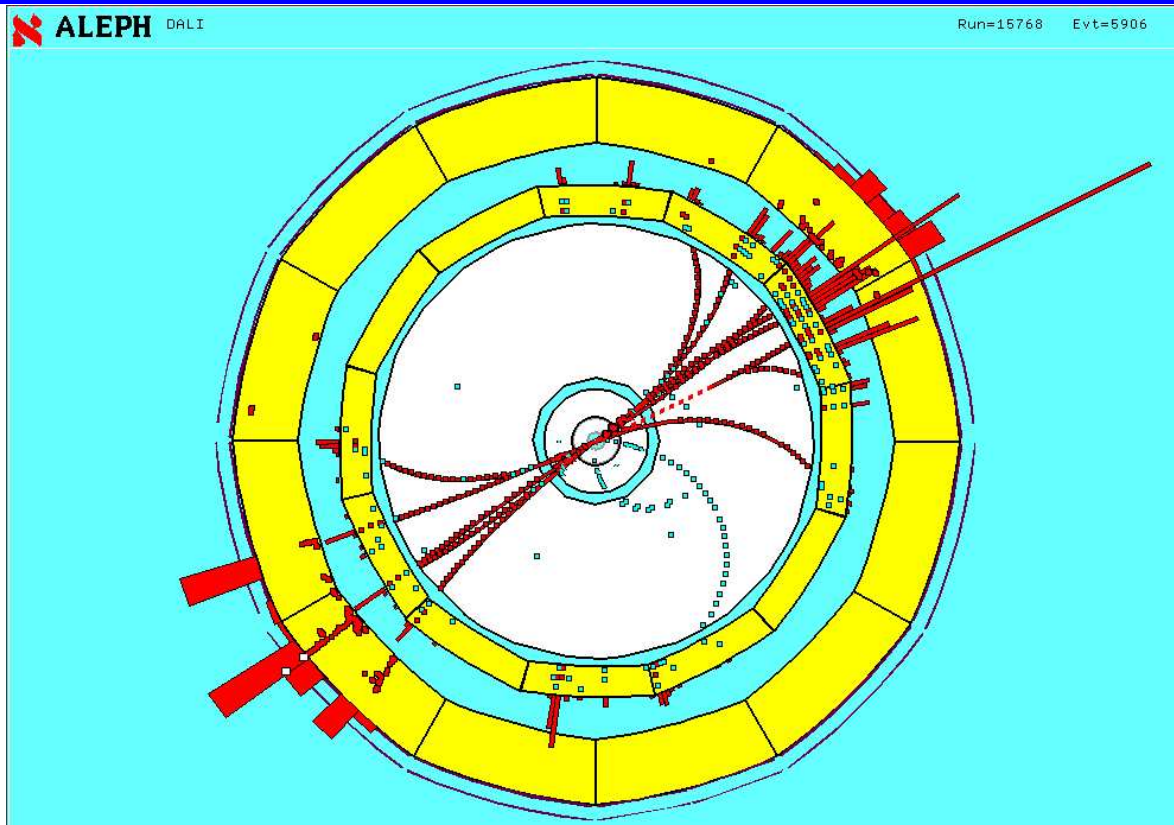
$$e^+e^- \longrightarrow \mu^+\mu^-$$



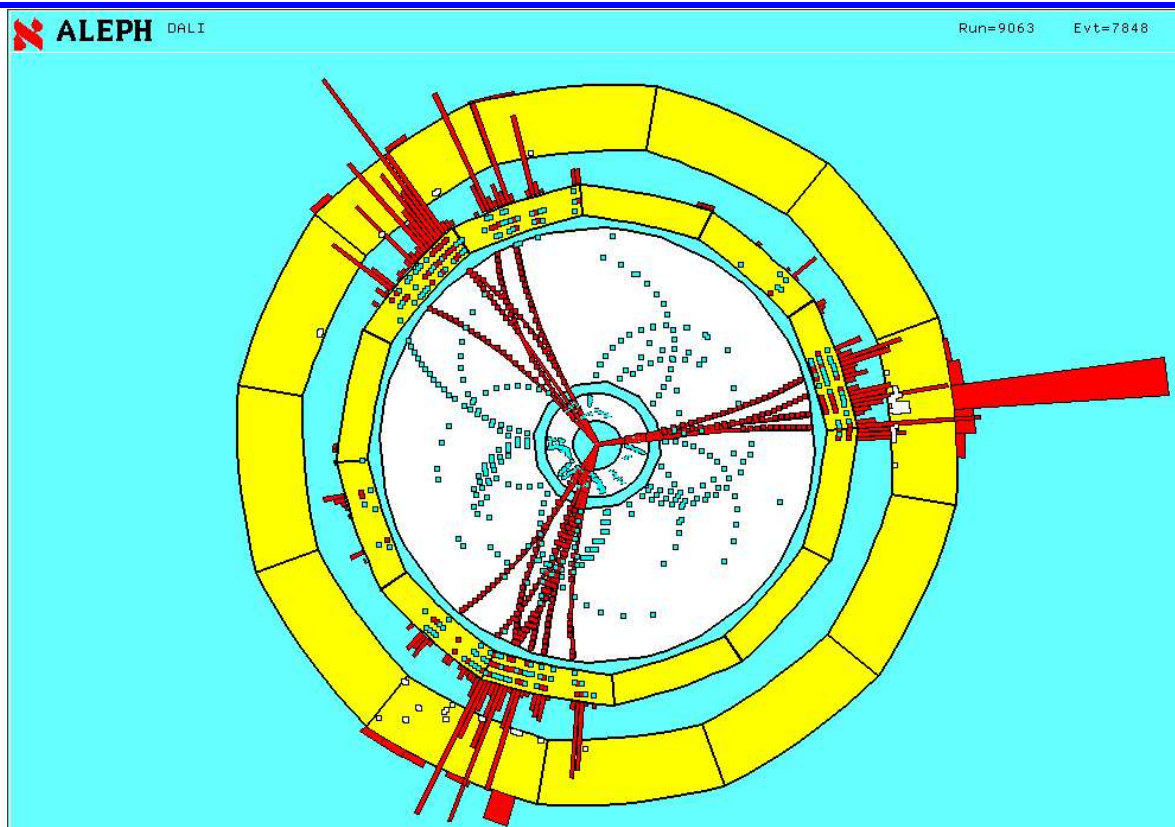
$$e^+e^- \longrightarrow \tau^+\tau^-$$



$$e^+e^- \longrightarrow q\bar{q} \longrightarrow (\text{Hadronen})(\text{Hadronen})$$



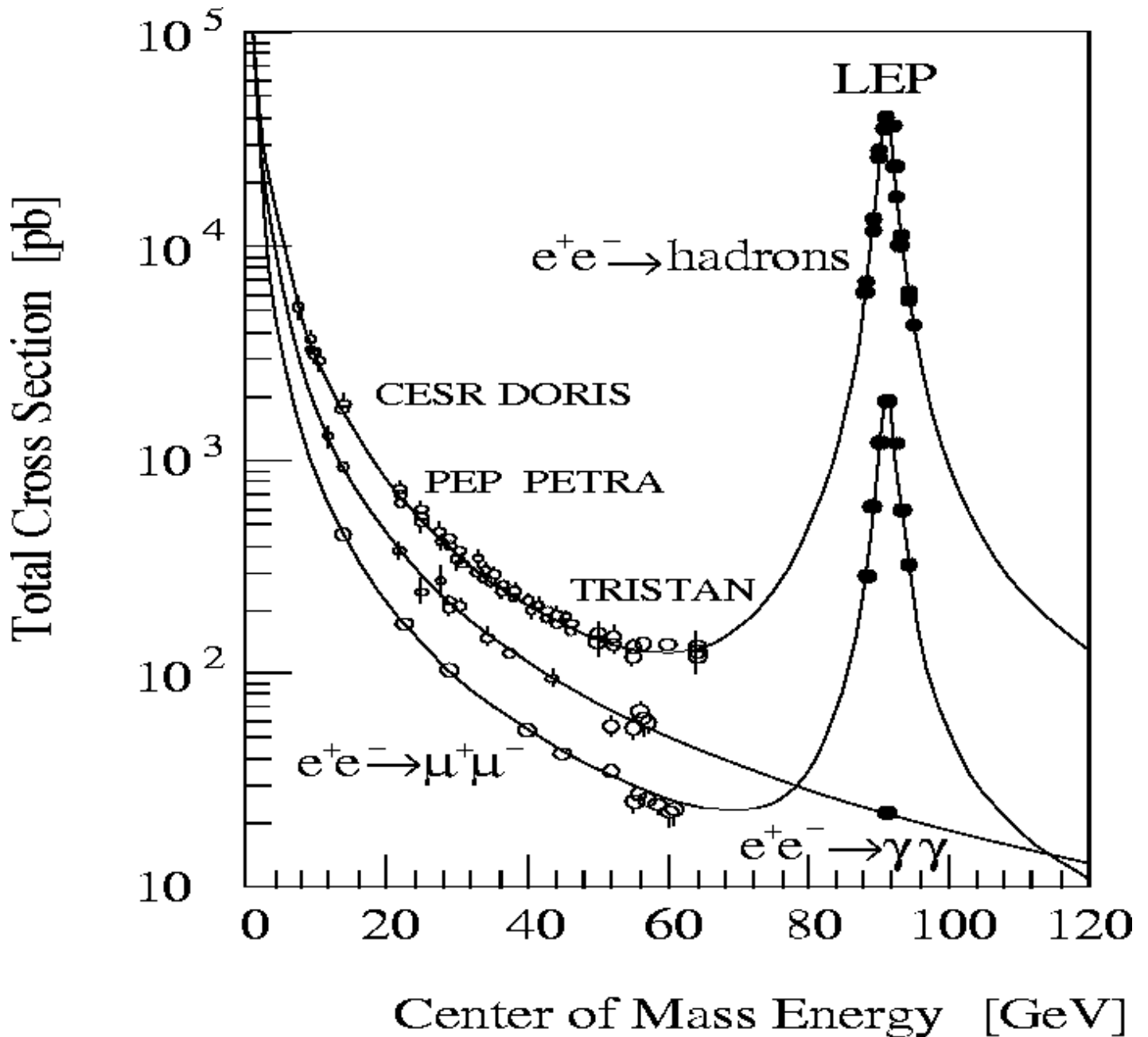
$$e^+e^- \longrightarrow q\bar{q}\text{Gluon} \longrightarrow (\text{Hadr.})(\text{Hadr.})(\text{Hadr.})$$



Hadronischer Wirkungsquerschnitt

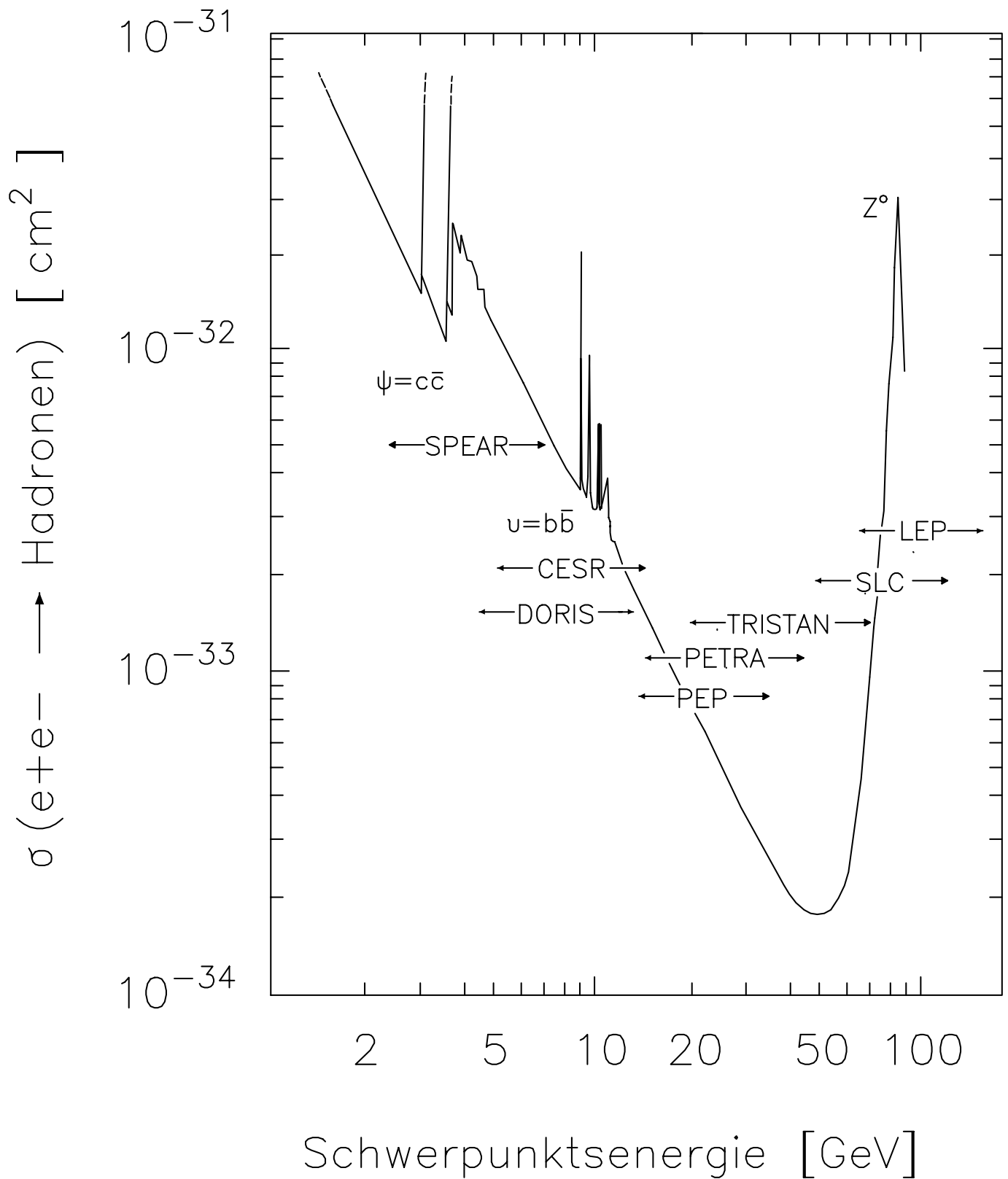
$$\sigma_{\text{had}}(s) = \sum_q \sigma_{q\bar{q}}(s)$$

in der e^+e^- -Vernichtung als Funktion der Schwerpunktsenergie:

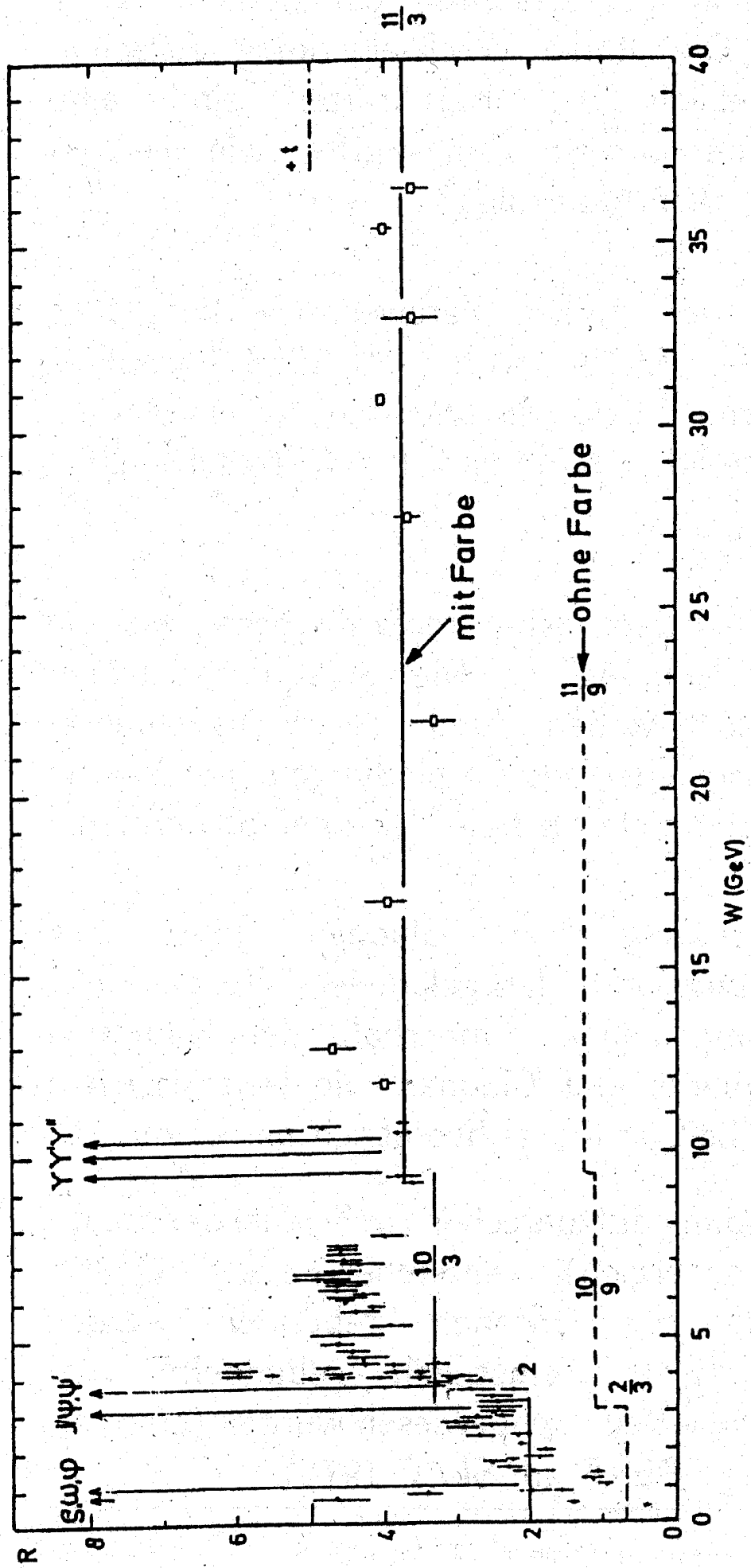


⇒ Test des Standardmodells durch Messung der Observablen M_Z und Γ_Z , $\sigma_{f\bar{f}}(s = M_Z^2)$, A_{FB}^f (⇒ $\sin^2 \theta_W$) bei der Z^0 -Resonanz.

Hadronischer Wirkungsquerschnitt

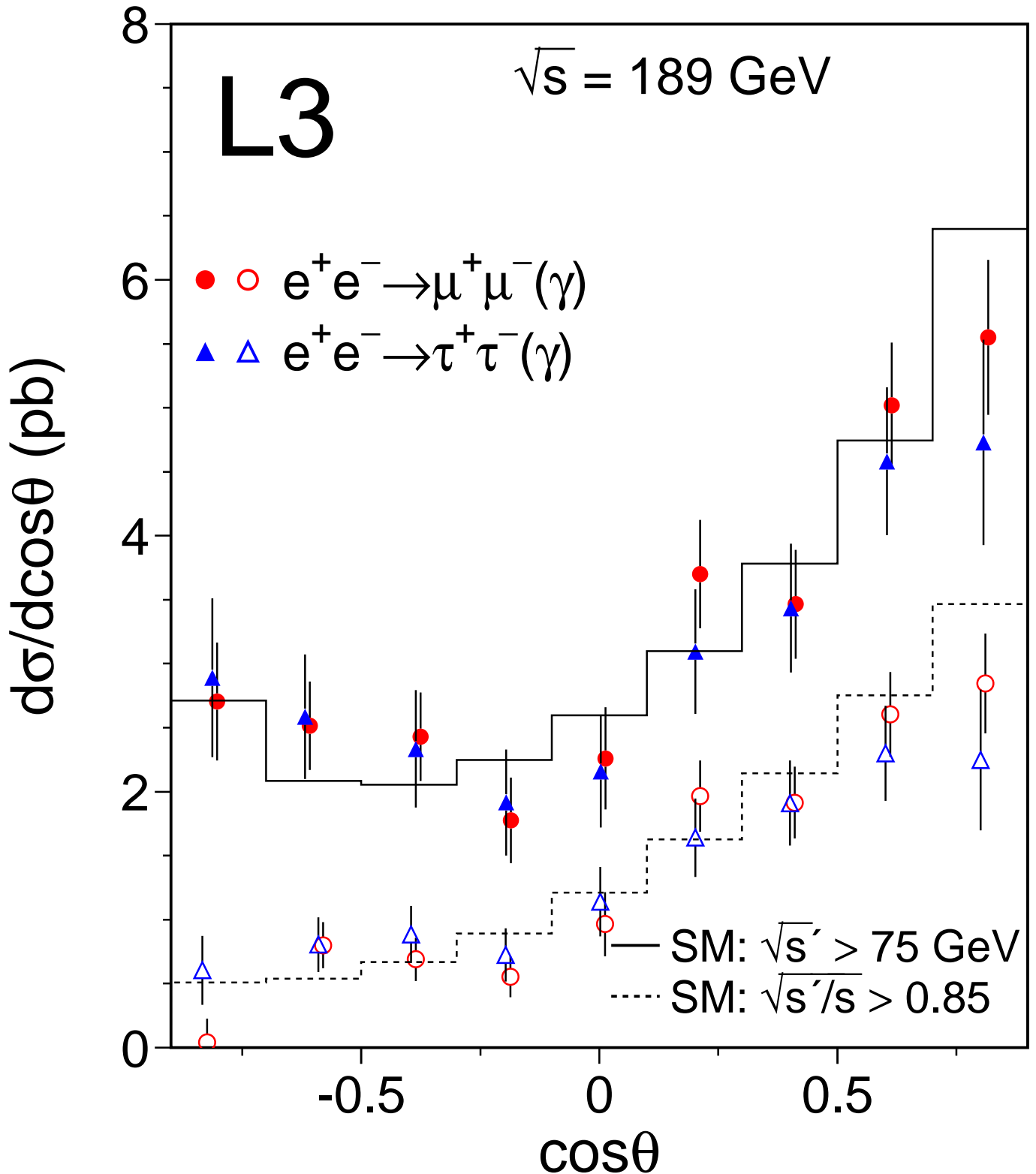


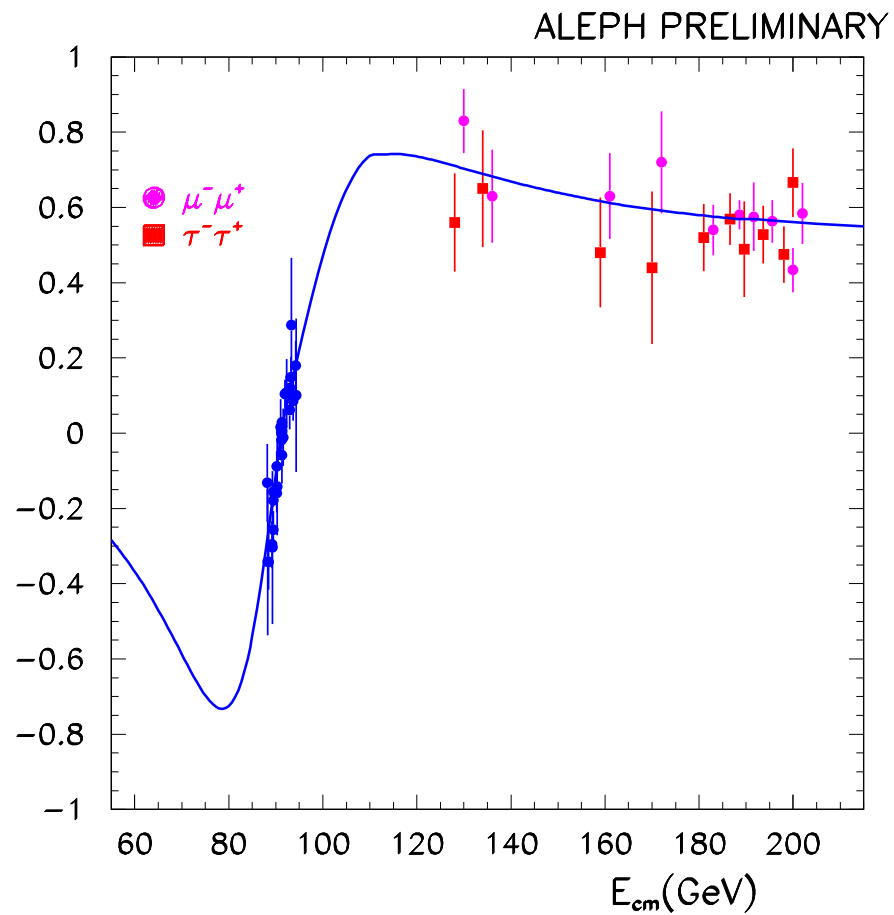
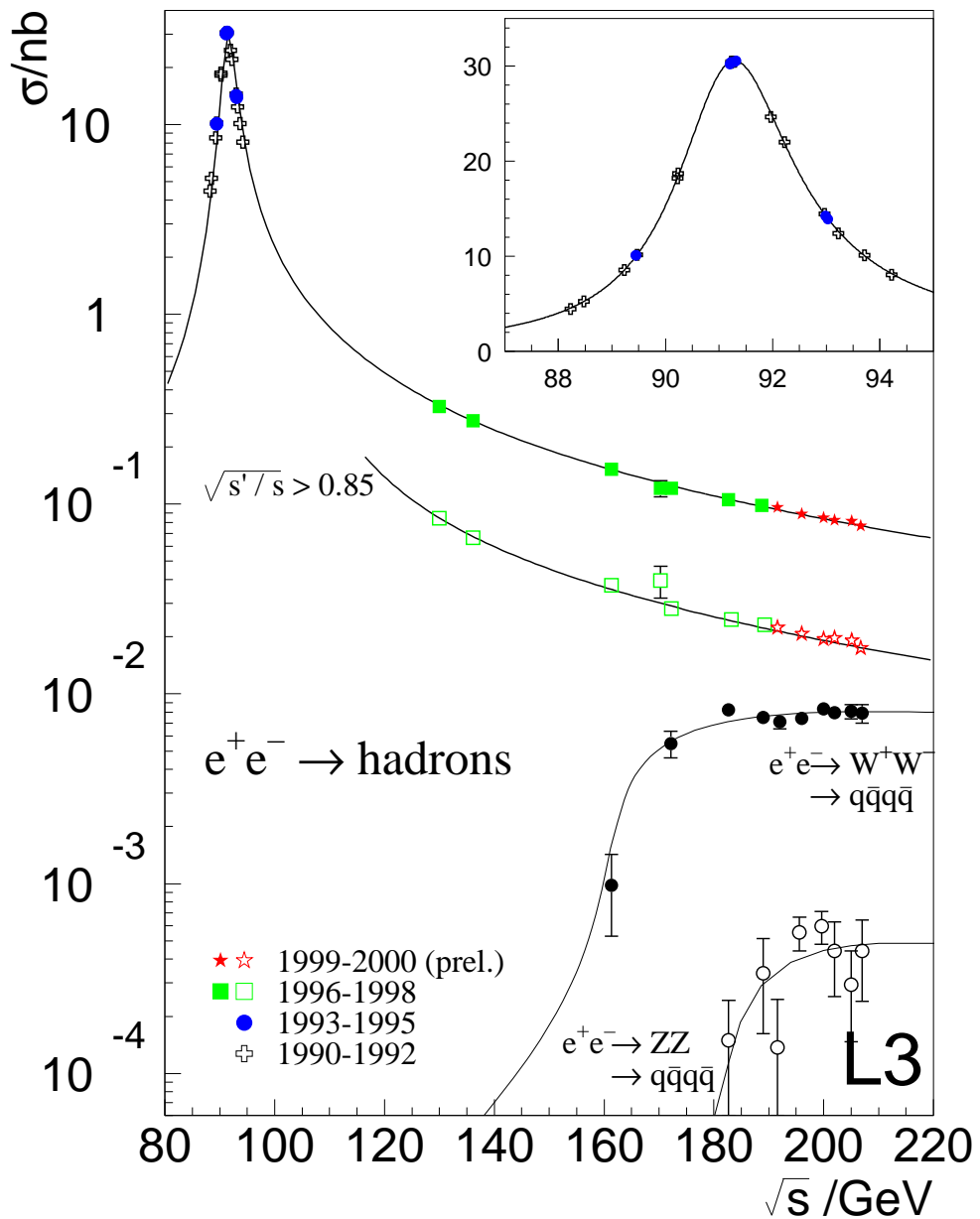
R = Hadronischer Wirkungsquerschnitt / Myonpaarproduktionsquerschnitt



Winkelverteilung der Lepton-Paarproduktion bei LEP mit elektroschwacher Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie

$$A_{FB}$$





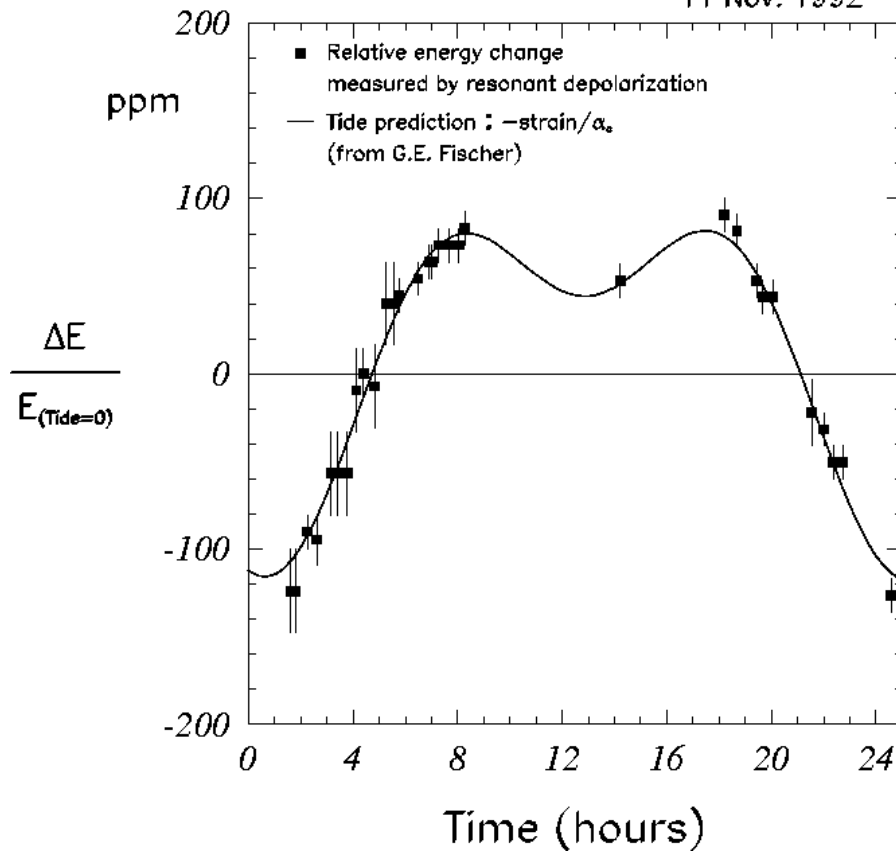
Die Resonanzüberhöhung des Wirkungsquerschnitts führt zu einer großen Zahl von Z^0 -Zerfällen im Detektor, die **Präzisionsmessungen der elektroschwachen Wechselwirkung** einschließlich der QED- und QCD-Strahlungskorrekturen (notwendig zum Vergleich Theorie–Experiment) und der **elektroschwachen Strahlungskorrekturen** (Test des Standardmodells) bis zur nächst höheren Ordnung der Störungstheorie nach der niedrigsten ermöglichten.

Für die Präzisionsmessung der Z^0 -Masse und der W^\pm , d.h. der exakten Lage der Z^0 -Resonanz und der W -Schwelle (s.u.), mußte auch die Strahlenergie des LEP-Beschleunigers sehr genau bestimmt werden: durch Messung der Spinprezession der in den Ablenkmagnetfeldern umlaufenden Elektronen und Positronen durch Compton-Streuung an einem in das Strahlrohr eingespiegelten Laserstrahl.

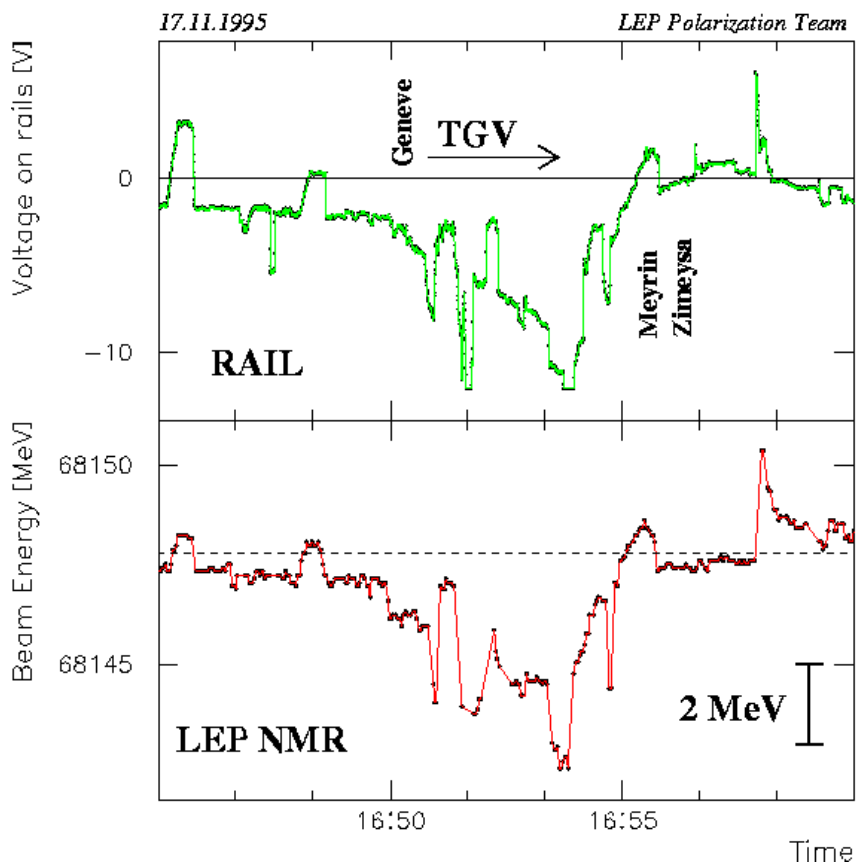
Dabei mußten der Einfluß der Mondphasen (Gezeitenkräfte) und des Wasserstands im Genfer See auf Umfang und Lage des LEP-Rings (d.h. der Ablenkdiplomagnete) und der nahen TGV-Trasse Paris–Genf auf Dipolmagnetströme des Beschleunigers berücksichtigt werden. Es wurde schließlich eine Genauigkeit von **20 MeV** in der Kenntnis der Strahlenergie erreicht.

LEP TidExperiment

11 Nov. 1992

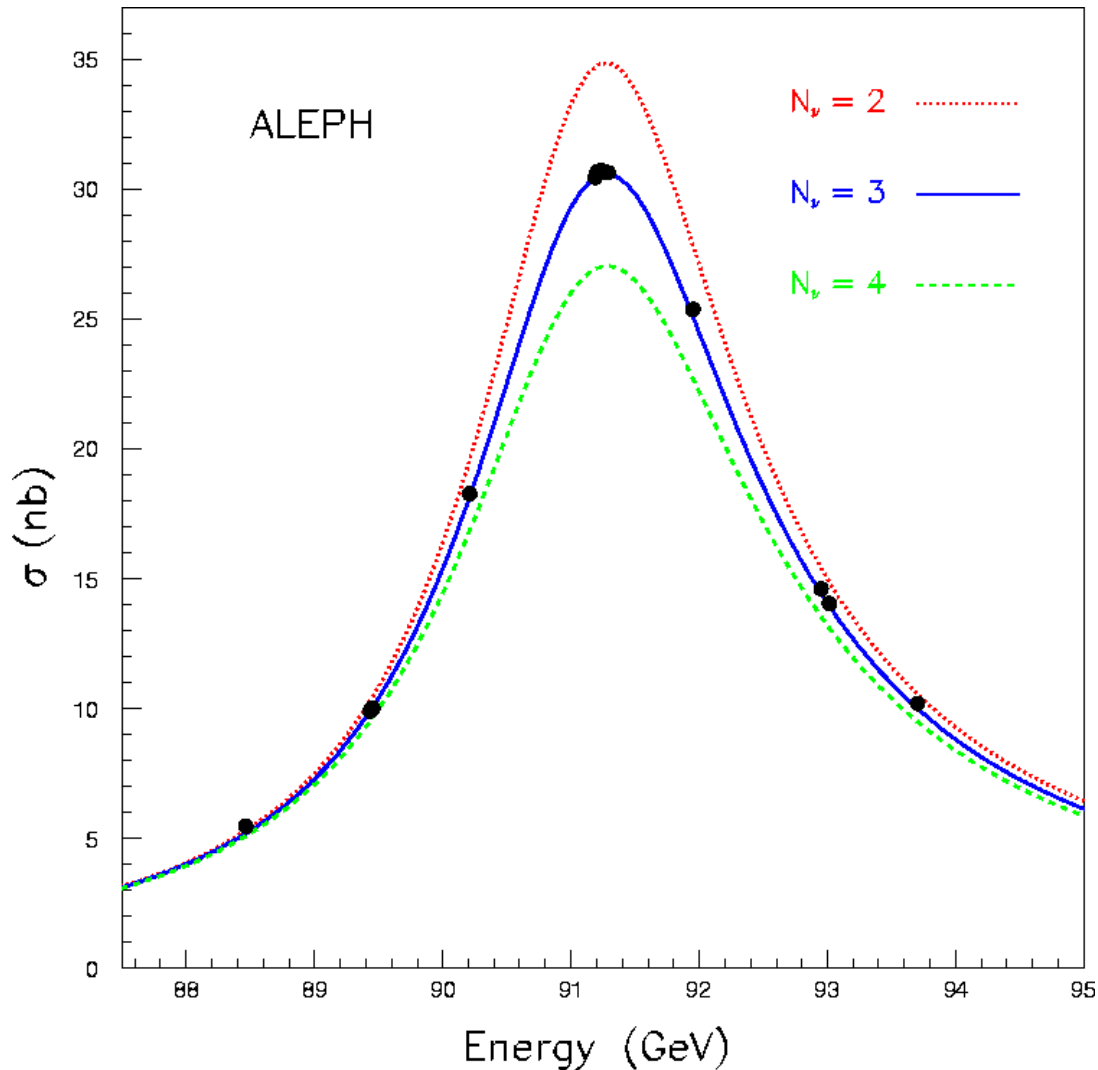


Correlation between trains and LEP energy



Zahl der Neutrino-Generationen

Z^0 -Resonanzkurve $\sigma_{\text{had}}(s)$ im e^+e^- -Reaktionsquerschnitt, gemessen mit dem **ALEPH-Detektor** bei LEP:



Gleich nach der Inbetriebnahme der Experimente am e^+e^- -Speicherring LEP am CERN und gleichzeitig des MARK II-Experiments am e^+e^- -Collider SLC am SLAC (Stanford bei San Francisco) 1989 (Schwerpunktsenergie bei der Z^0 -Resonanz) konnte die Zahl der leichten Neutrinos N_ν , in die das Z^0 -Boson zerfällt ($2m_\nu \leq M_Z$), und damit die **Zahl der Quark-Lepton-Generationen** präzise gemessen werden:

$$N_\nu = 2.9841 \pm 0.0083 \quad (2002).$$

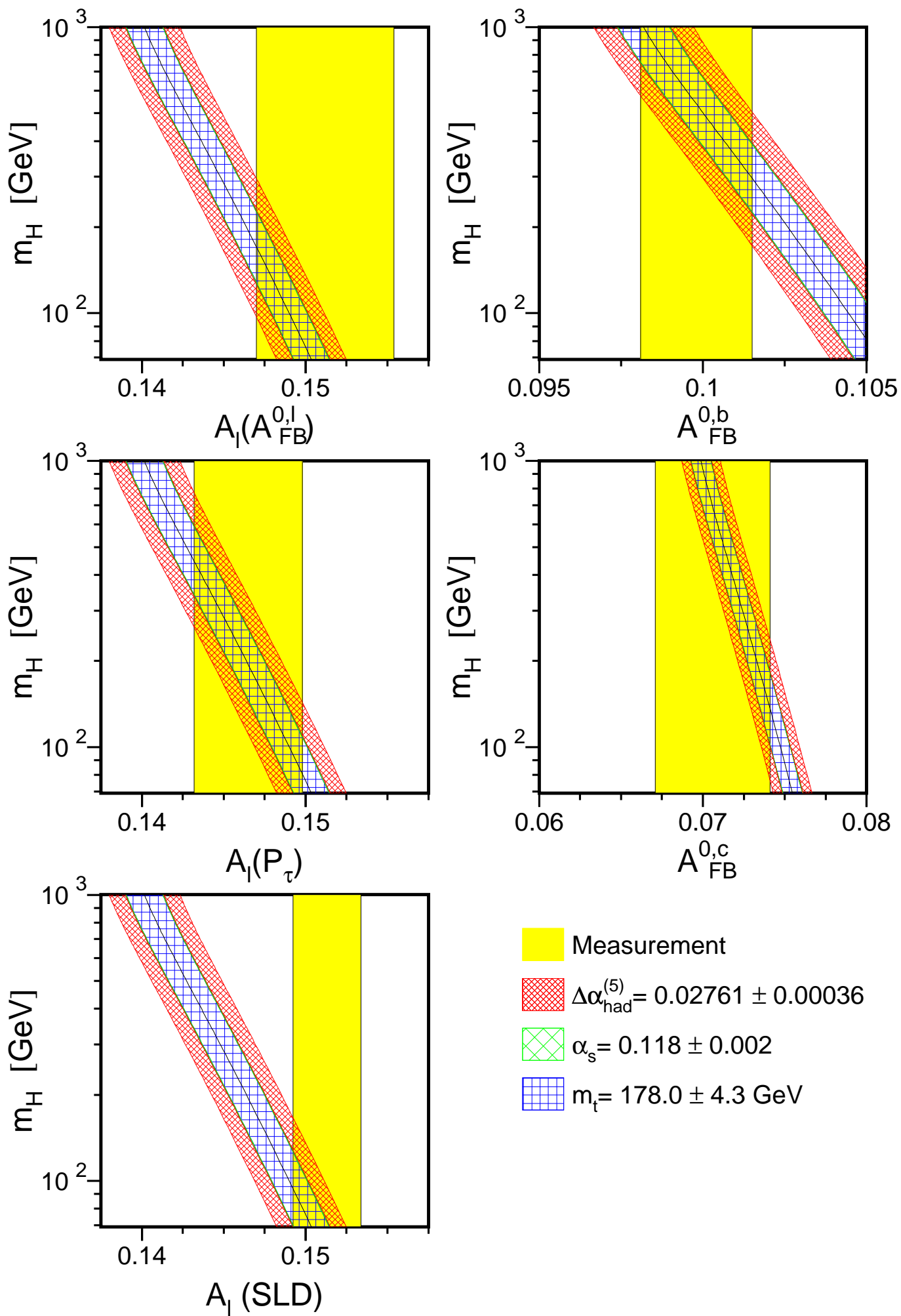
Dies geschieht durch Vergleich der gemessenen Resonanzkurve für $\sigma_{\text{had}}(s)$ mit der Vorhersage des Standardmodells für verschiedene Anzahlen von leichten Neutrinos.

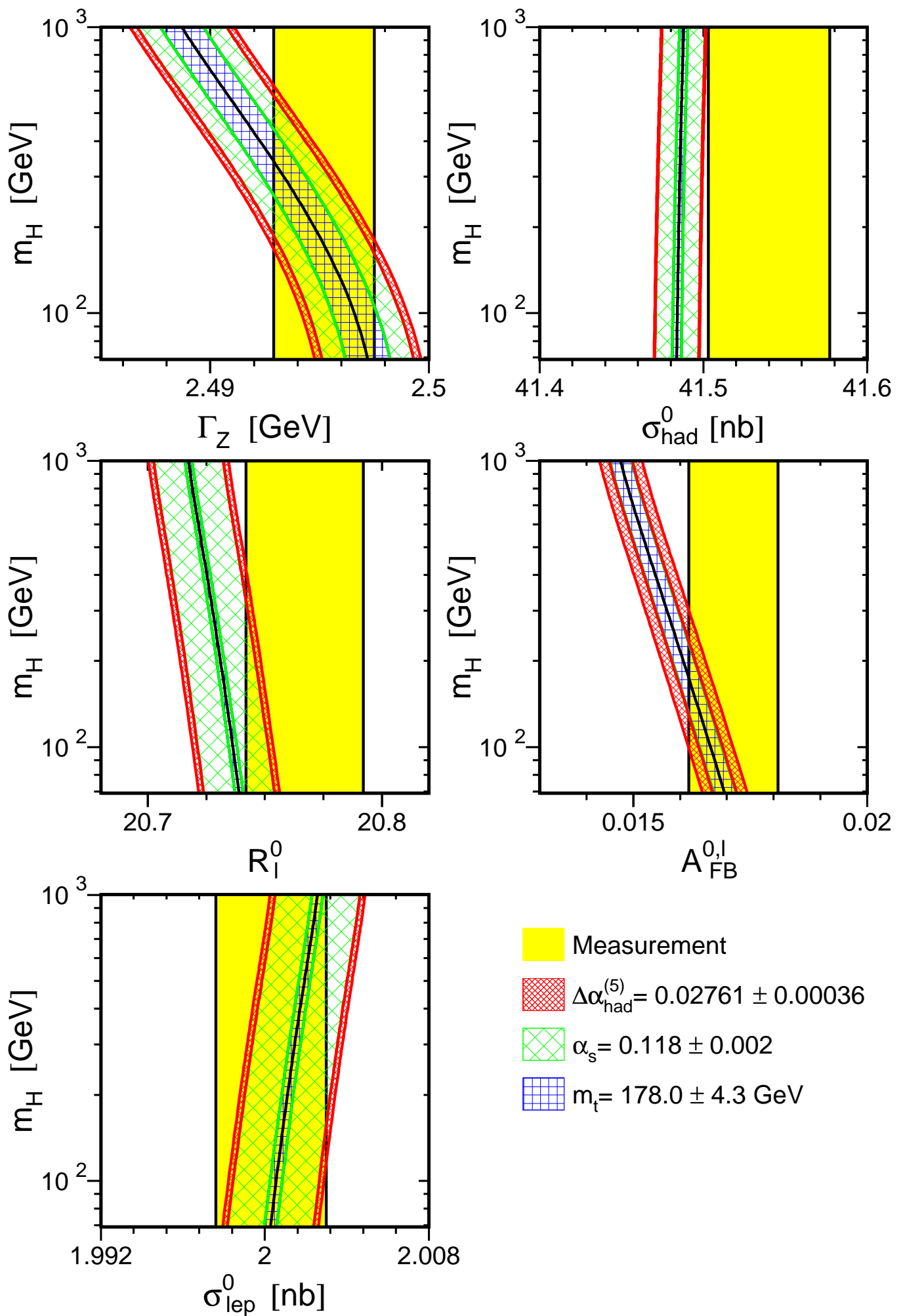
Von der Zahl der Neutrinogenerationen hängt die Gesamtbreite Γ_Z des Z^0 -Bosons ab, nicht aber Γ_{had} , da Quarks eventueller neuer Generationen bei LEP nicht beobachtet wurden und ihre Massen so groß sein müßten, daß das Z^0 -Boson im Ruhesystem nicht in sie zerfallen kann. Deshalb nimmt mit der Zahl der Neutrinogenerationen die Breite der Resonanz zu und entsprechend der Resonanzquerschnitt

$$\sigma_{\text{had}}^0 = \frac{12\pi\Gamma_Z^e\Gamma_Z^{\text{had}}}{M_Z^2\Gamma_Z^2}$$

ab.

Präzisionsmessungen der Parameter des Z^0 -Produktionsquerschnitts bei der Resonanz bei LEP I (und SLC) im Vergleich mit den Vorhersagen des Standardmodells der elektroschwachen und der starken Wechselwirkung in Abhängigkeit von der Masse des Higgs-Bosons:





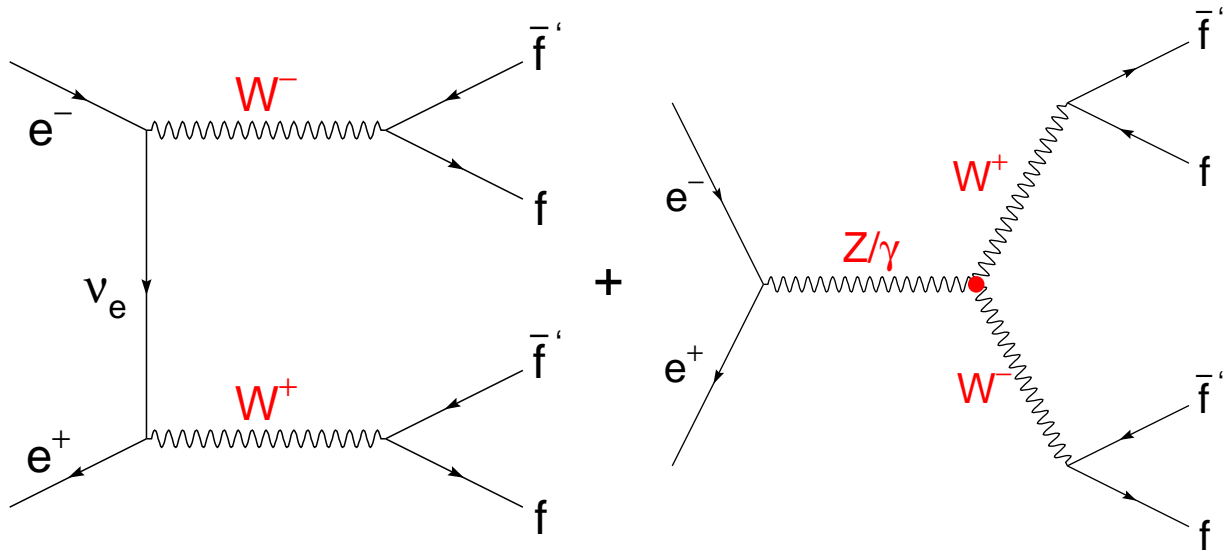
2.1.2 Messungen der W-Boson-Produktion

Von 1996 bis November 2000 wurde die Schwerpunktsenergie des LEP-Speicherrings in mehreren Schritten, 130, 161, 172 GeV (1996), 183 GeV (1997), 189 GeV (1998), 192, 196, 200, 202 GeV (1999), bis auf das Maximum von **208 GeV (2000)** erhöht durch Einbau supraleitender RF-Resonatoren als Beschleunigungsstrecken.

Damit konnte die Schwelle zur Erzeugung von W^+W^- -Paaren in der e^+e^- -Vernichtung und damit die W^\pm -Masse präzise vermessen werden.

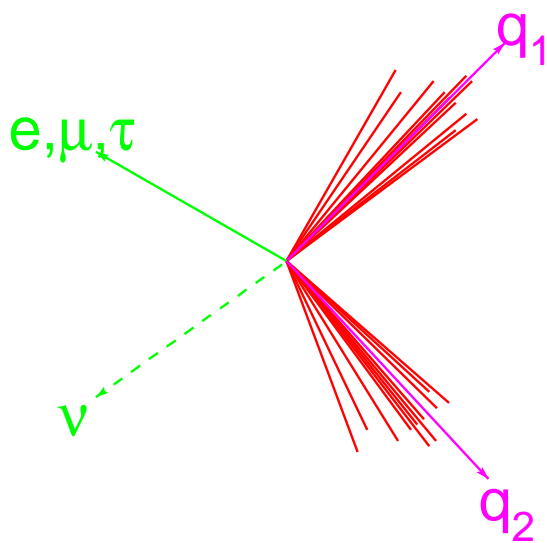
W- Boson- Produktion bei LEP

- W^+W^- -Produktion in niedrigster Ordnung :

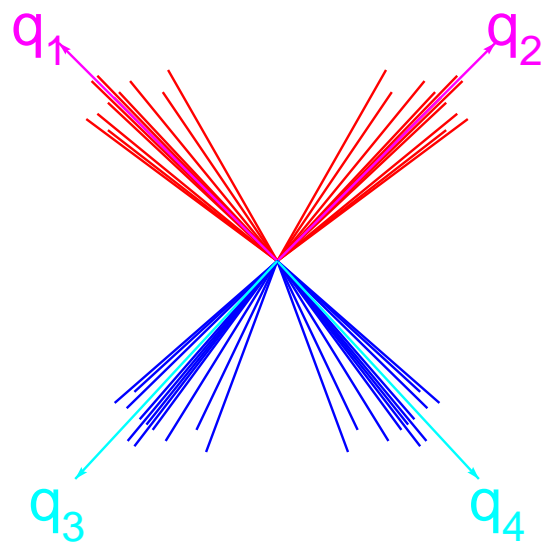


- W^+W^- -Zerfaelle :

$WW \rightarrow qq\bar{q}\bar{q}$		45.6 %	
$WW \rightarrow qq\bar{l}l$	$\left\{ \begin{array}{l} qqe\nu \\ qq\mu\nu \\ qq\tau\nu \end{array} \right\}$	43.8 %	
$WW \rightarrow ll\bar{l}\bar{l}$			10.6 %

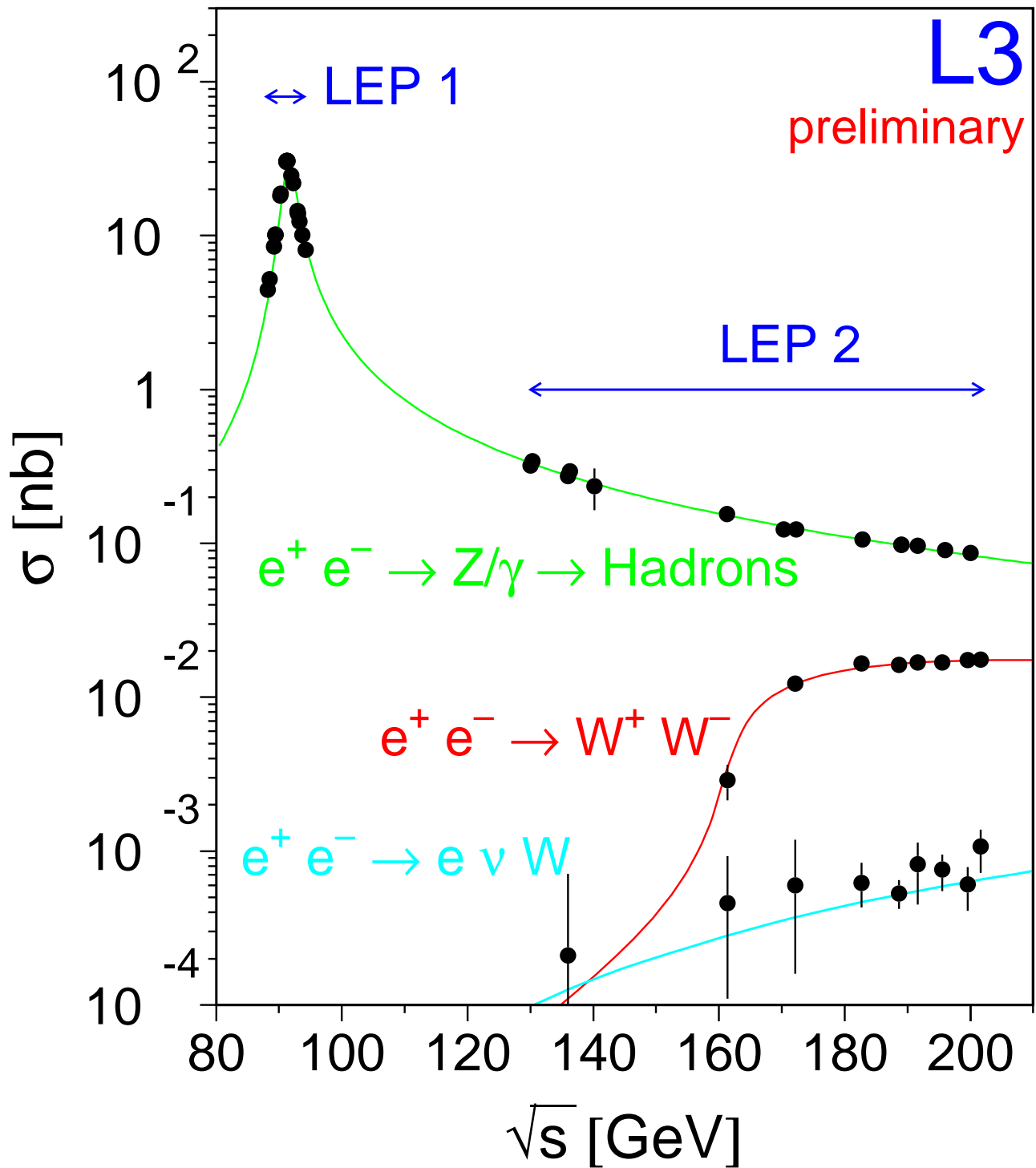


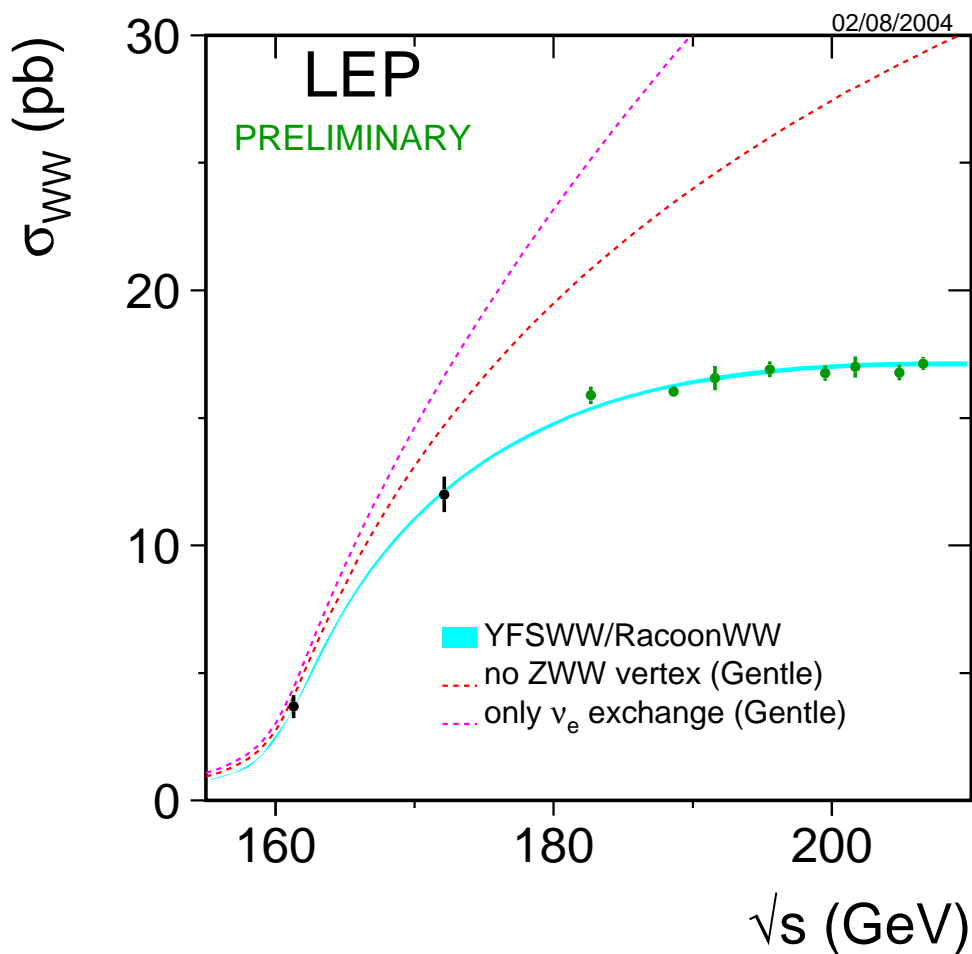
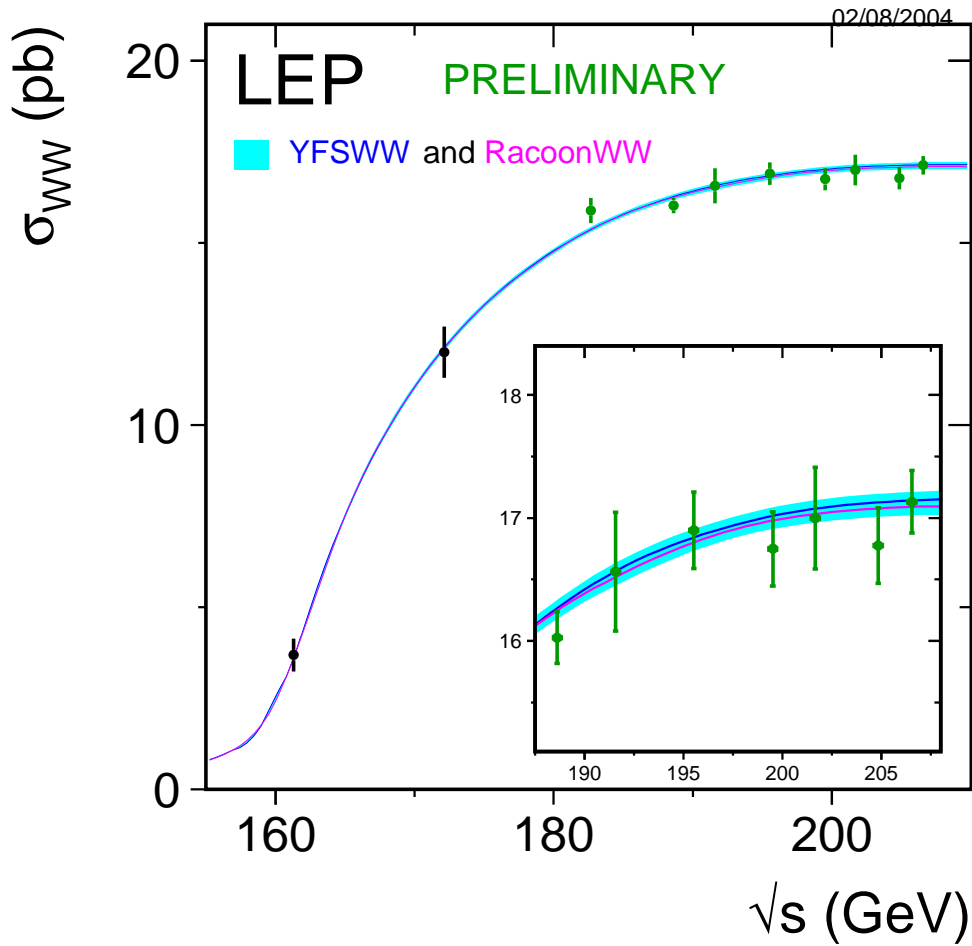
semileptonisch



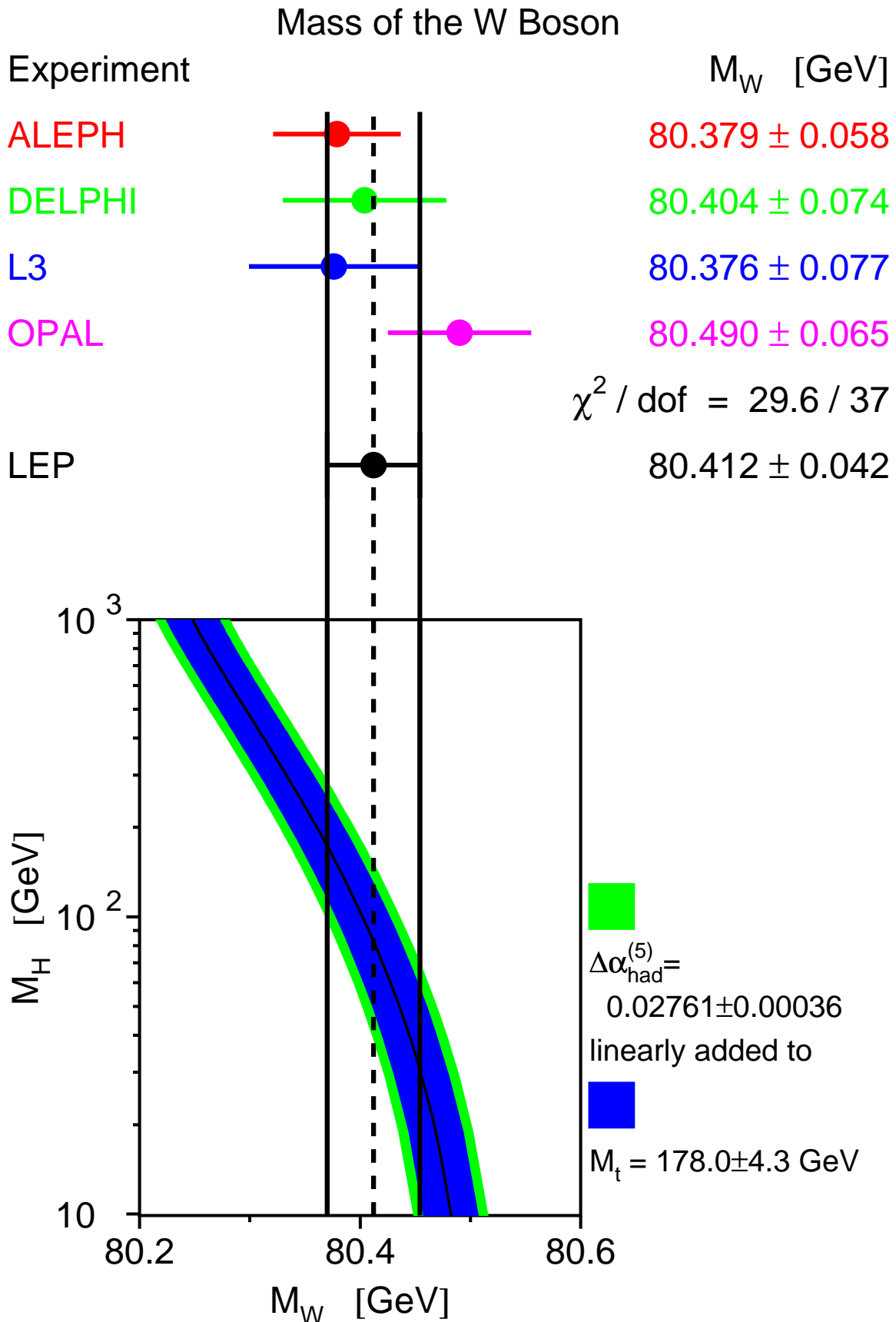
hadronisch

W- Boson- Produktion bei LEP

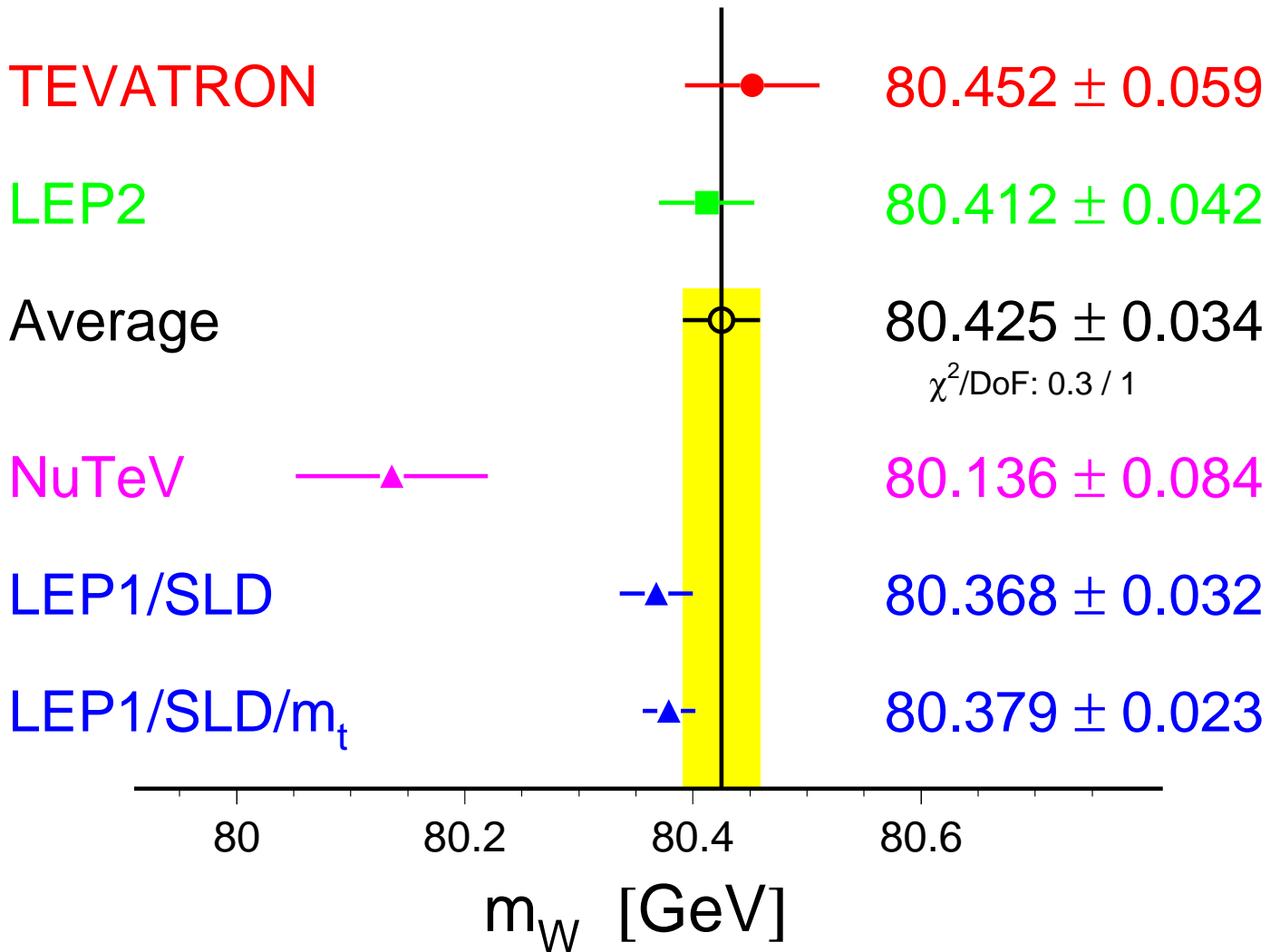




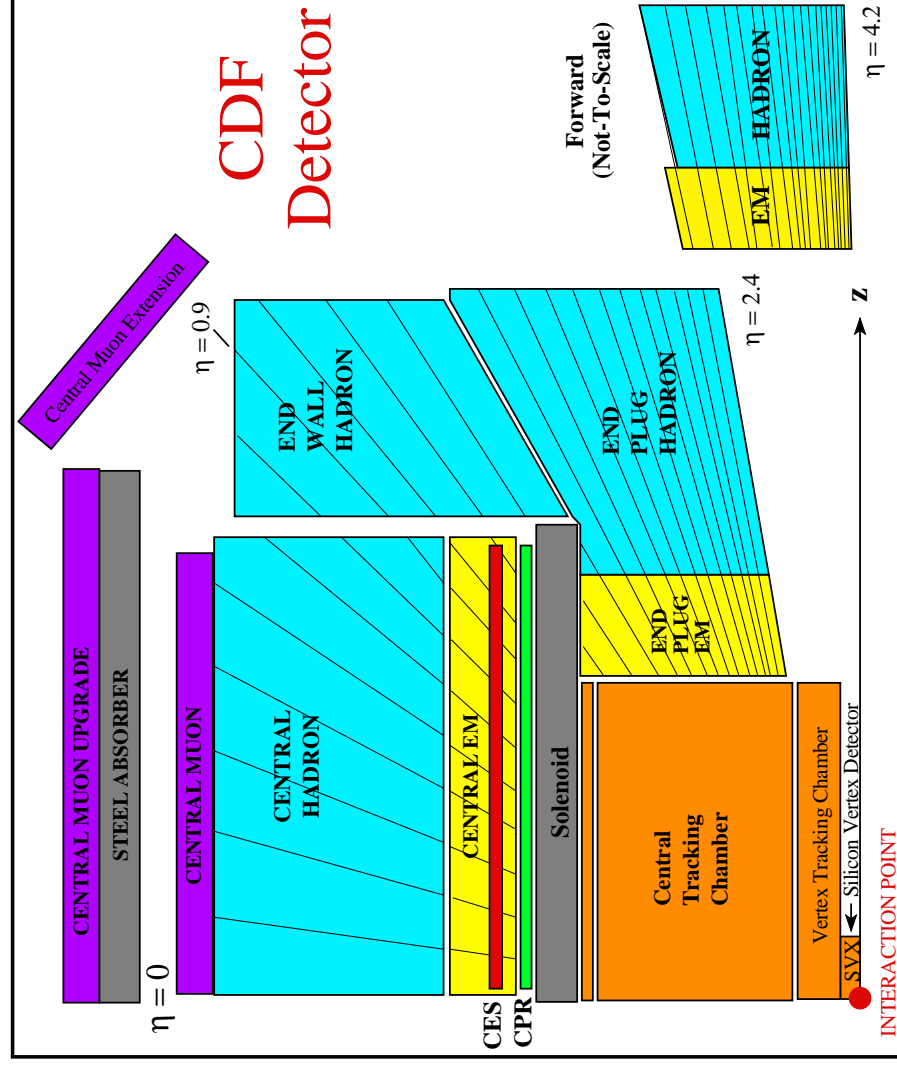
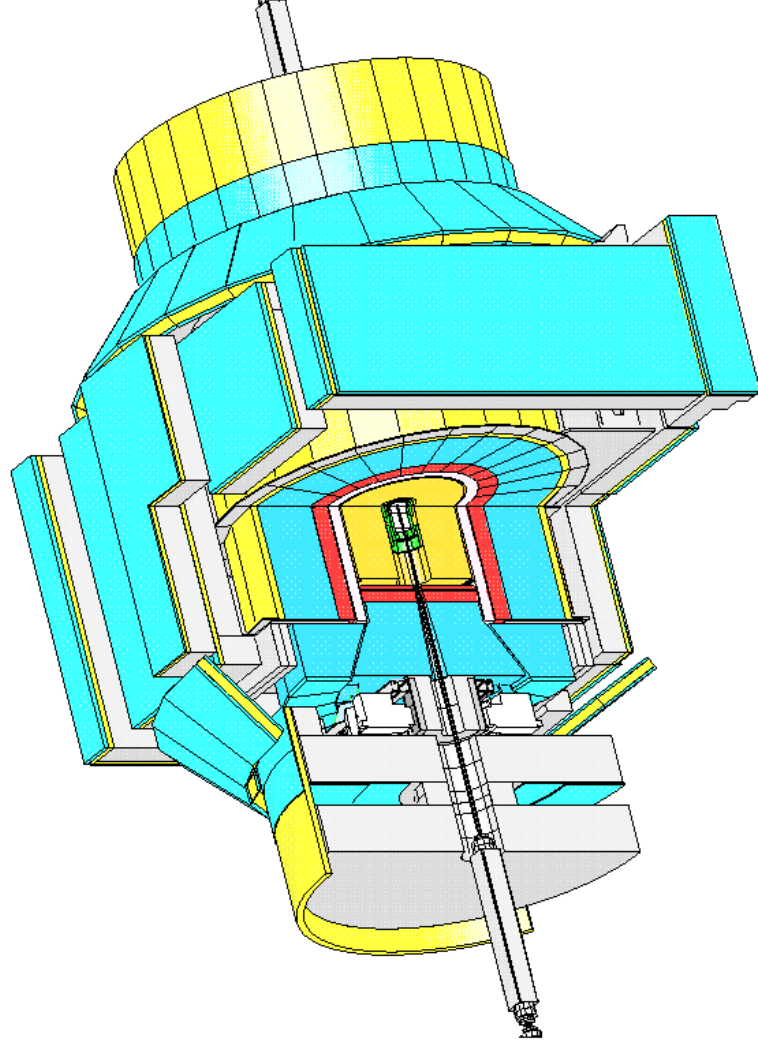
Messungen der W-Boson-Masse bei LEP II (Experimente ALEPH, DELPHI, L3, OPAL) und bei den $p\bar{p}$ -Collidern SPS (Experimente UA1 und UA2) und TEVATRON (Experimente CDF und D0):



W-Boson Mass [GeV]

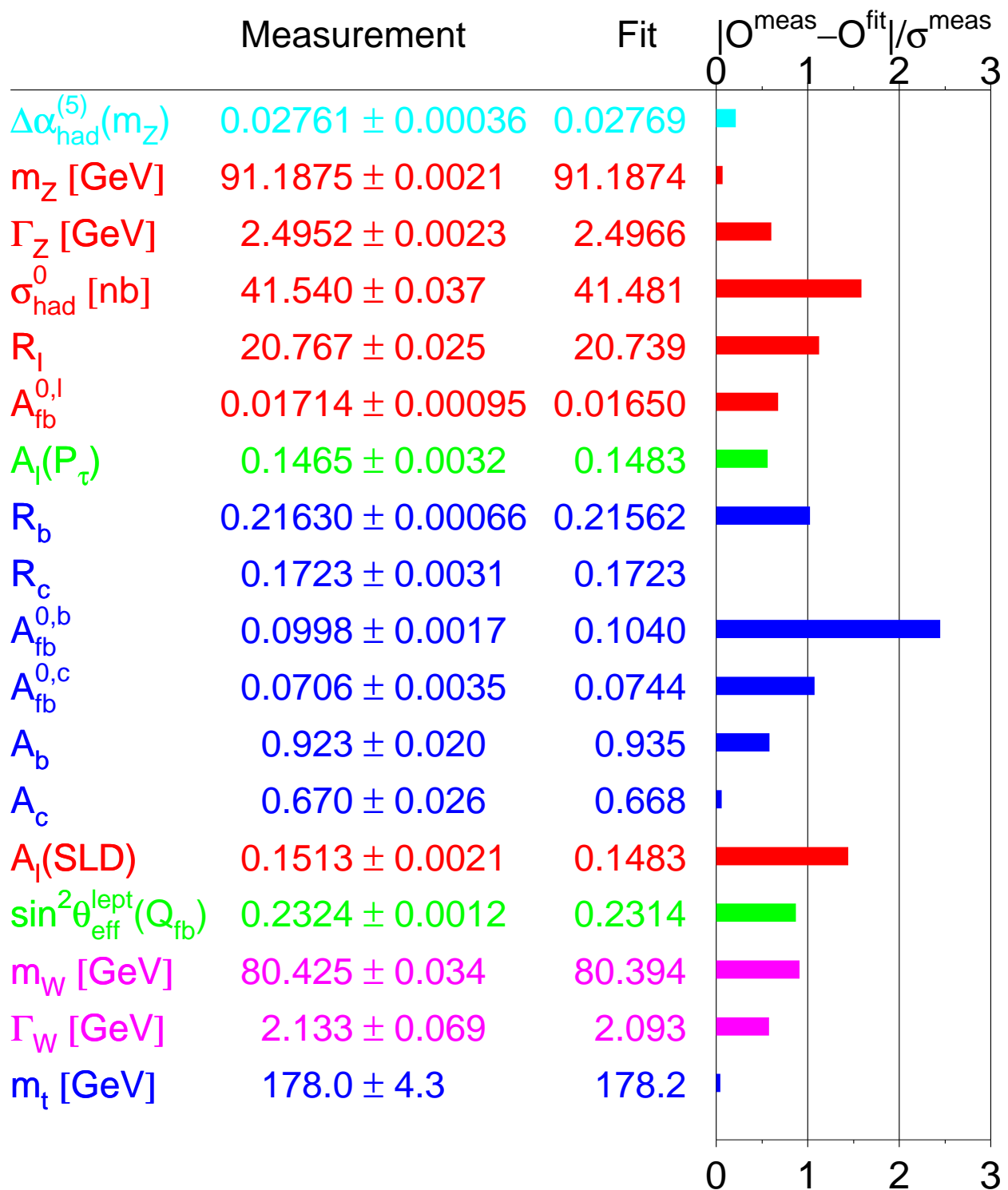


Der CDF-Detektor am TEVATRON



2.1.3 Präzisionstests des Standardmodells

Summer 2004



In der 2. Ordnung der Störungstheorie der elektroschwachen Wechselwirkung (Strahlungskorrekturen) zur e^+e^- -Vernichtung, werden u.a. virtuelle W-Bosonen, top-Quarks und Higgs-Bosonen ausgetauscht, die bei LEP noch nicht direkt erzeugt werden konnten. Die Beiträge der Strahlungskorrekturen hängen von den Massen M_W und m_t (quadratisch, stark) und M_H (logarithmisch, schwach) ab. Der Vergleich mit den Präzisionsmessungen erlaubt daher die indirekte Bestimmung von M_W , m_t und M_H :

- Präzise Vorhersage von $M_W = 80.379 \pm 0.023 \text{ GeV}$

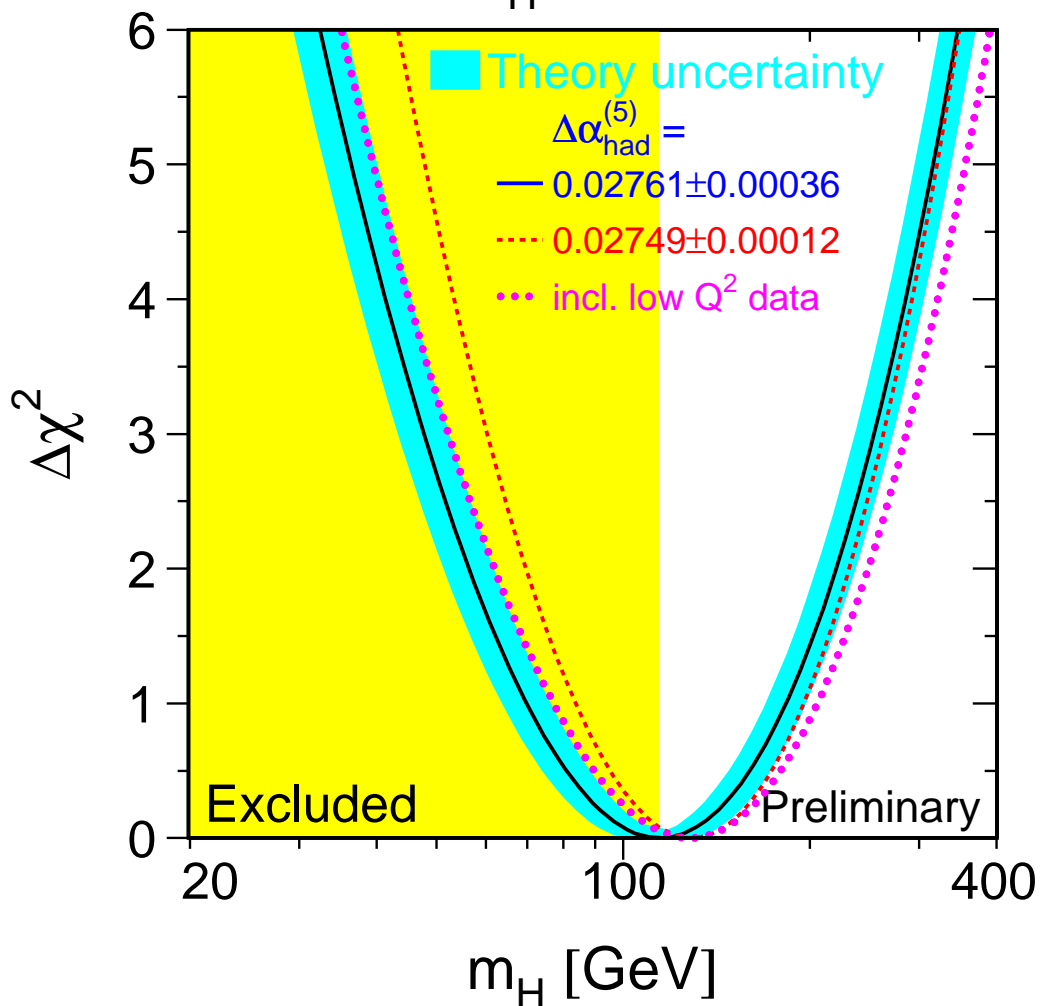
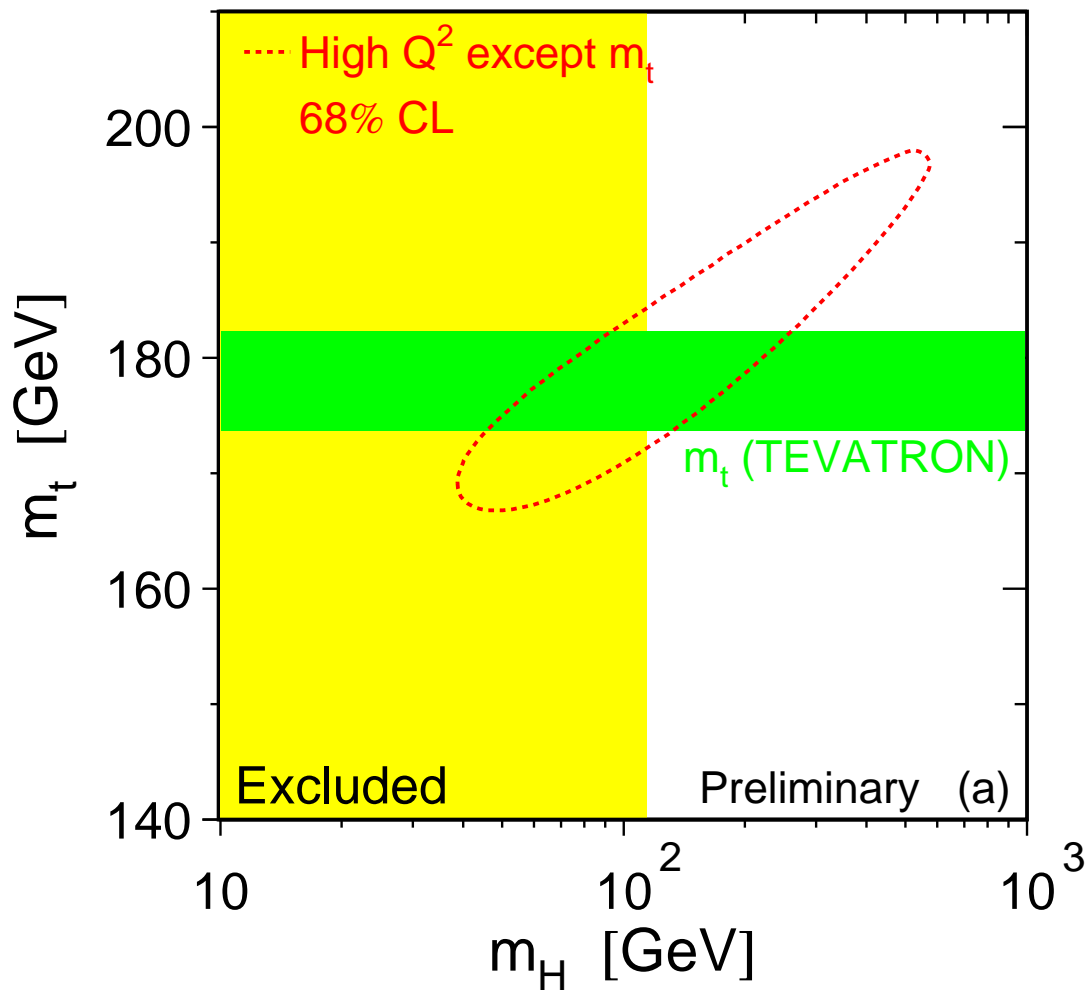
(direkte Messungen: $M_W = 80.425 \pm 0.034 \text{ GeV}$).

- Präzise Vorhersage von $m_t = 179 \pm 11 \text{ GeV}$

(direkte Messung am TEVATRON seit der Entdeckung des top-Quarks 1994/95: $m_t = 178.0 \pm 4.3 \text{ GeV}$).

- Die elektroschwachen Präzisionsmessungen bevorzugen eine kleine Masse $M_H = 114_{45}^{69} \text{ GeV}$ für das Higgs-Boson an der unteren Grenze $M_H > 114.4 \text{ GeV}$ von der direkten Suche bei LEP. Die indirekte obere Grenze ergibt sich aus den Präzisionsmessungen zu $M_H < 260 \text{ GeV}$.

Sie hängt erheblich von der genauen Messung der elektromagnetischen Feinstrukturkonstanten und ihrer Strahlungskorrekturen (Renormierung, Abschirmung durch Vakuumpolarisation) ab (aktuelle Messungen des Vakuumpolarisationsbeitrags der Quarks am e^+e^- -Speicherring BES in Peking bei niedrigen Schwerpunktsenergien).



Eigenschaften des Higgs-Bosons

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{Higgs}} &= \frac{1}{2}(\partial_\mu H)(\partial^\mu H) - \frac{1}{2}M_H^2 H^2 - \lambda v H^3 - \frac{\lambda}{4}H^4 \\ &+ \frac{g^2 v}{4}H \left[2W_\mu^+ W^{\mu-} + \frac{1}{\cos^2 \theta_W} Z_\mu^0 Z^{\mu 0} \right] \\ &- \sum_f \frac{g_f}{\sqrt{2}}(\bar{\psi}_f \psi_f)H,\end{aligned}$$

$$\text{mit } M_H = \sqrt{-2\mu^2} = v\sqrt{2\lambda} = 2\sqrt{2}M_W \frac{\sqrt{\lambda}}{g};$$

$$\text{und } v = \sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}} = (\sqrt{2}G_F)^{-1/2} = 246 \text{ GeV};$$

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W^2};$$

$$g_f = g_f(v^2) = \sqrt{2}\frac{m_f}{v}; \quad \lambda = \lambda(v^2) = \frac{M_H^2}{2v^2}.$$

Feynman-Regeln für Higgs-Eichboson-Kopplung
($M_Z = M_W / \cos \theta_W$):

$$igM_W = i\frac{e}{\sin \theta_W}M_W g_{\mu\nu}$$

$$i\frac{g}{2\cos^2 \theta_W}M_W g_{\mu\nu} = i\frac{e}{\sin 2\theta_W}M_Z g_{\mu\nu}$$

2.2 Die Suche nach dem Higgs-Boson

2.2.1 Eigenschaften des Higgs-Bosons

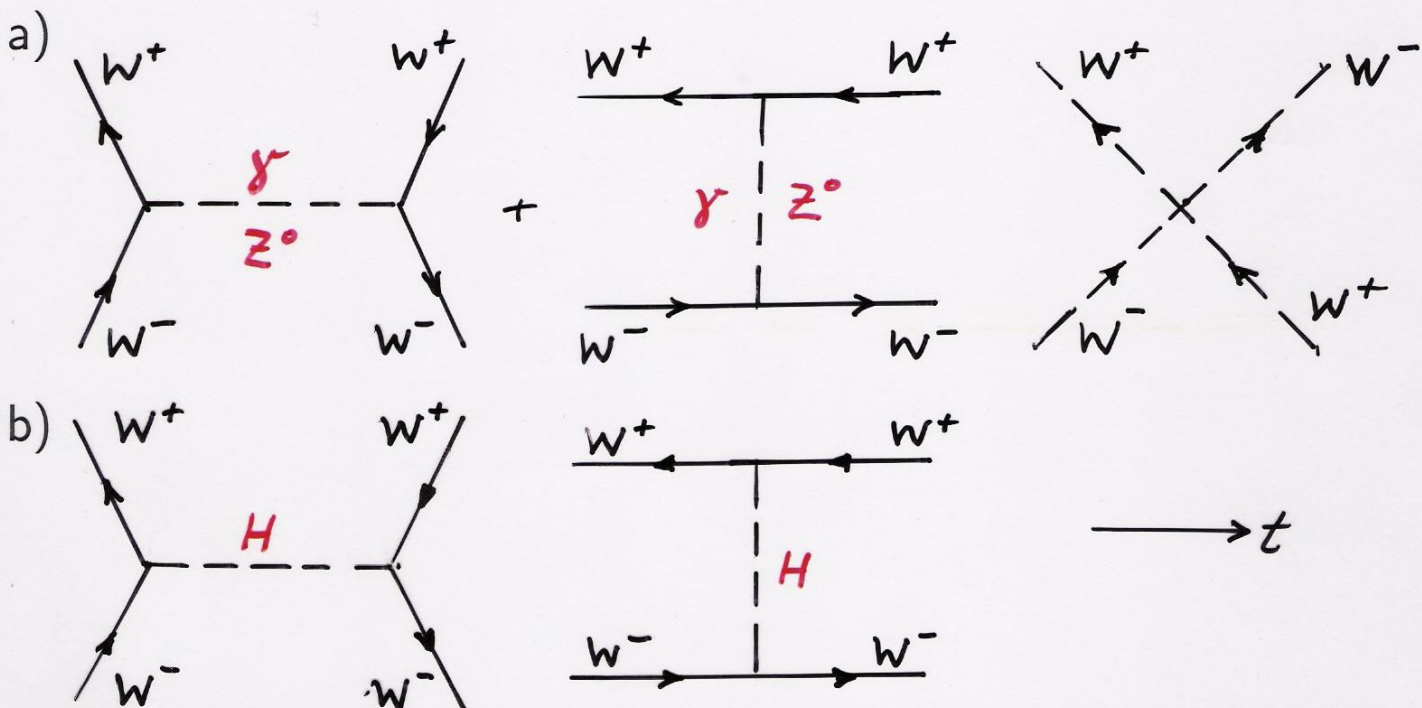
Das Higgs-Boson ist das einzige vorhergesagte Teilchen des Standardmodells der elektroschwachen Wechselwirkung, das noch nicht experimentell nachgewiesen werden konnte.

Es ist aber unverzichtbar für die Konsistenz der Theorie (Unitarität und Renormierbarkeit).

Die elastische WW -Streuung $W_L^+ W_L^- \rightarrow W_L^+ W_L^-$

ist bei hohen Energien $E_k = \sqrt{\vec{k}^2 + M_W^2}$ dominiert durch longitudinal polarisierte Zustände W_L^\pm wegen $\epsilon_T^\mu (\lambda = \pm 1)$ unabh. von k

$$\epsilon_L^\mu(k, \lambda = 0) = \frac{1}{M_W}(k, 0, 0, E_k) \stackrel{k \gg M_W}{\approx} \frac{k^\mu}{M_W}.$$



Für $s = q^2 \gg M_W^2$ gilt für die Wechselwirkungsamplituden:

$$\text{a) } \mathcal{A}_{(a)}^{J=0}(W_L W_L \rightarrow W_L W_L) = +\frac{G_F \cdot s}{8\pi\sqrt{2}}.$$

Unitarität der Streumatrix (=Erhaltung der Wahrscheinlichkeit) verlangt eine Begrenzung der Partialwellenamplituden: $|\text{Re}A^{J=0}| \leq \frac{1}{2}$; Dies ist nur erfüllt für Energien

$$s \leq \frac{4\pi\sqrt{2}}{G_F} \approx (1.2 \text{ TeV})^2.$$

Die Unitarität wird erhalten für beliebige Energien durch Kompensation durch den Austausch schwach wechselwirkender skalarer Higgs-Bosonen:

$$\text{b) } \mathcal{A}_{(b)}^{J=0}(W_L W_L \rightarrow W_L W_L) \approx -\frac{G_F \cdot s}{8\pi\sqrt{2}}.$$

\implies Die elektroschwache WW benötigt zur Erhaltung der Unitarität der Streumatrix ein **skalares Feld**, das an Eichbosonen $\sim gM_{W,Z}$ und an Fermionen $\sim m_f$ (schwach) koppelt: **das Higgs-Boson**.

Ohne das Higgs-Boson (mit nicht zu großer Masse) wird darüber hinaus die schwache Wechselwirkung oberhalb $\sim 1 \text{ TeV}$ tatsächlich stark und nicht mehr störungstheoretisch berechenbar, d.h. neue Phänomene jenseits des Standardmodells.

\implies Grenzen für die Masse des Higgs-Bosons.

2.2.2 Grenzen für die Masse des Higgs-Bosons

Die Masse des Higgs-Bosons M_H ist ein vom Standardmodell nicht vorhergesagter freier Parameter.

Es gibt obere und untere Schranken aufgrund der Forderung der Selbstkonsistenz der elektroschwachen Wechselwirkung, der Endlichkeit der Higgs-Selbstwechselwirkung und der Higgs-Vakuumstabilität bis zur Energieskala Λ , bis zu der das Standardmodell als elementare Theorie gültig bleiben soll.

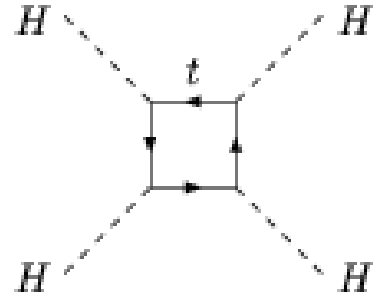
Für $s \gg M_H^2$ ist

$$\mathcal{A}_{(a+b)}^{J=0}(W_L W_L \rightarrow W_L W_L) \longrightarrow -\frac{G_F M_H^2}{4\pi\sqrt{2}}$$

und die Unitarität mit Hilfe des Higgs-Bosons nur gewährleistet, falls

$$\begin{aligned} \implies \frac{G_F M_H^2}{4\pi\sqrt{2}} &\leq \frac{1}{2}; \\ \implies \underline{M_H^2} &\leq \frac{2\pi\sqrt{2}}{G_F} \approx (870 \text{ GeV})^2. \end{aligned}$$

Selbstwechselwirkung des Higgs-Bosons



q^2 -Abhängigkeit der Selbstkopplung mit Higgs-Vakuum-polarisation:

$$\lambda(q^2) = \frac{\lambda(q_0^2)}{1 - \frac{3\lambda(q_0^2)}{4\pi^2} \ln\left(\frac{q^2}{q_0^2}\right)},$$

wobei $\lambda(v^2) = \frac{M_H^2}{2v^2}$.

Es gilt $\Lambda(q^2 \rightarrow 0) \mapsto +0$ und $\Lambda(q^2 \rightarrow \infty) \mapsto -0$.

\implies Landau-Pol bei einem Wert $q^2 = \Lambda^2$ und $0 < \lambda(q^2) < \infty$ (physikalisch) für

$$\frac{3\lambda(v^2)}{4\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda_H^2}{v^2}\right) \equiv \frac{3M_H^2}{8\pi^2 v^2} \ln\left(\frac{\Lambda_H^2}{v^2}\right) < 1, \text{ d.h.}$$

$$M_H^2 < \frac{8\pi^2 v^2}{3} \left(\ln\left(\frac{\Lambda_H^2}{v^2}\right) \right)^{-1} = \begin{cases} (750 \text{ GeV})^2 & \text{f. } \Lambda_H = 1 \text{ TeV} \\ \underline{(140 \text{ GeV})^2} & \text{f. } \Lambda_H = M_{\text{Planck}} \end{cases}$$

$M_{\text{Planck}} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G_N}} \approx 10^{19} \text{ GeV} \approx 2 \cdot 10^{-8} \text{ kg}$ ist die sog. Planck-Masse oder Planck-Energieskala, bei der die Gravitation so stark wird wie die übrigen Wechselwirkungen und quantisiert werden muß (Quantisierung der Raum-Zeit bei Abständen kleiner als die Planck-Länge $\sim 1/M_{\text{Planck}}$).

Die Energieskala

$$\Lambda_H^2 = v^2 e^{\frac{8\pi v^2}{3M_H^2}},$$

bei der die Higgs-Selbstwechselwirkung stark wird, wird klein bei großen M_H .

Dies ist im Gegensatz zur QED mit

$$\Lambda_{\text{QED}}^2 = m_e^2 e^{\frac{3\pi}{\alpha(m_e^2)}} \approx m_e^2 e^{10^3}.$$

Im Fall der QCD mit $N_q = 6 < 16$ (asymptotische Freiheit) liegt der Pol bei niedrigen q^2 , bei der 'Confinement-Skala'

$$\Lambda_{\text{QCD}}^2 = M_Z^2 e^{-\frac{12\pi}{(33-2N_q)\alpha_s(M_Z^2)}} \approx 50 \text{ MeV}.$$

Stabilität des Vakuums:

Fermion (top-Quark)-Vakuumpolarisation bei der Higgs-Selbstwechselwirkung führt mit zunehmender top-Masse m_t zu $\lambda(q^2) < 0$, d.h. Instabilität des Higgs-Vakuums mit $V_{\text{Higgs}} \mapsto -V_{\text{Higgs}}$, falls M_H nicht groß genug ist zur Kompensation.

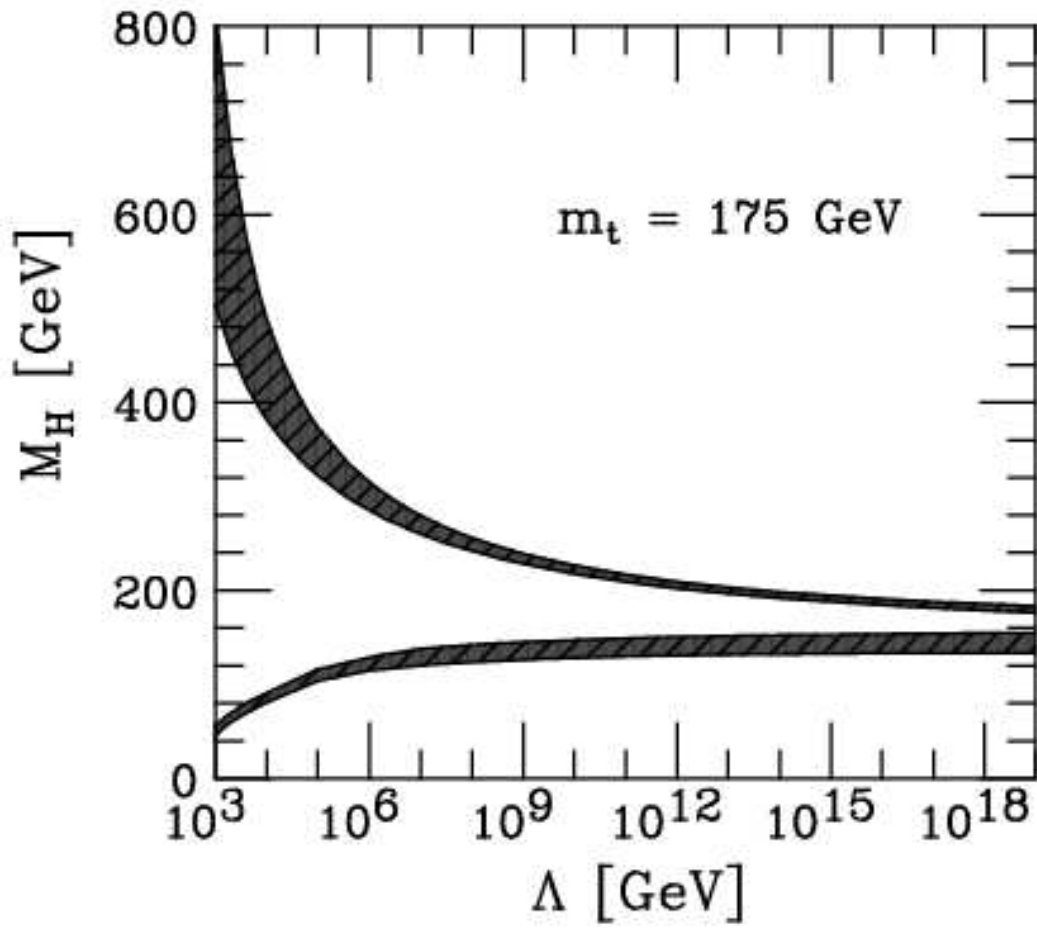
$$\begin{array}{ll} \underline{55 \leq M_H \leq 700 \text{ GeV}} & \text{für } \Lambda_H = 1 \text{ TeV,} \\ \underline{130 \leq M_H \leq 190 \text{ GeV}} & \text{für } \Lambda_H = M_{\text{Planck}}, \end{array}$$

für $m_t = 175 \pm 5 \text{ GeV}$.

D.h. untere Grenze der Higgs-Masse: $55 - 130 \text{ GeV}$,
verschärfte obere Grenze: $190 - 700 \text{ GeV}$.

Bei hoher top-Quarkmasse ist die Einschränkung der Higgs-Masse stärker.

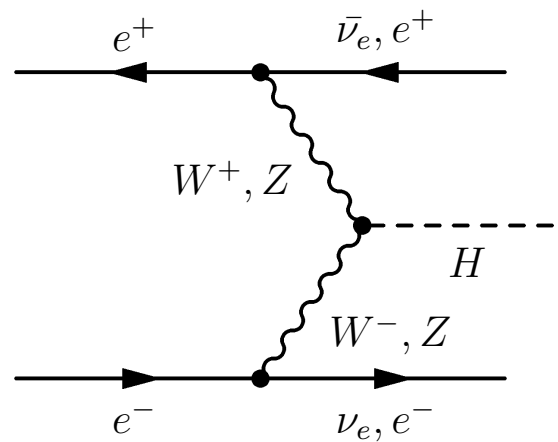
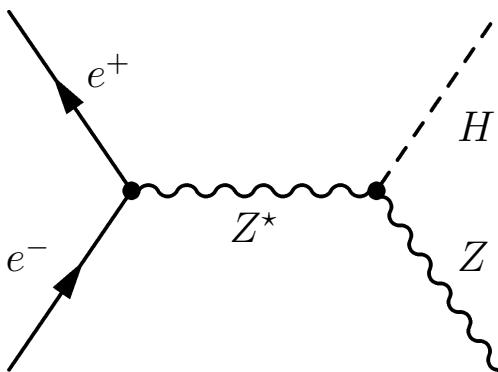
Bei $M_H \mapsto 1 \text{ TeV}$ wird die schwache Wechselwirkung stark, das SM wird inkonsistent, kein elementares Higgs-Boson, Physik jenseits des SM notwendig.



Direkte Suche bei LEP II

bei Schwerpunktsenergien bis zu 208 GeV:

Der dominierende Higgsproduktionsprozeß in der Elektron-Positron-Vernichtung ist Higgs-Abstrahlung beim Z^0 -Austausch:

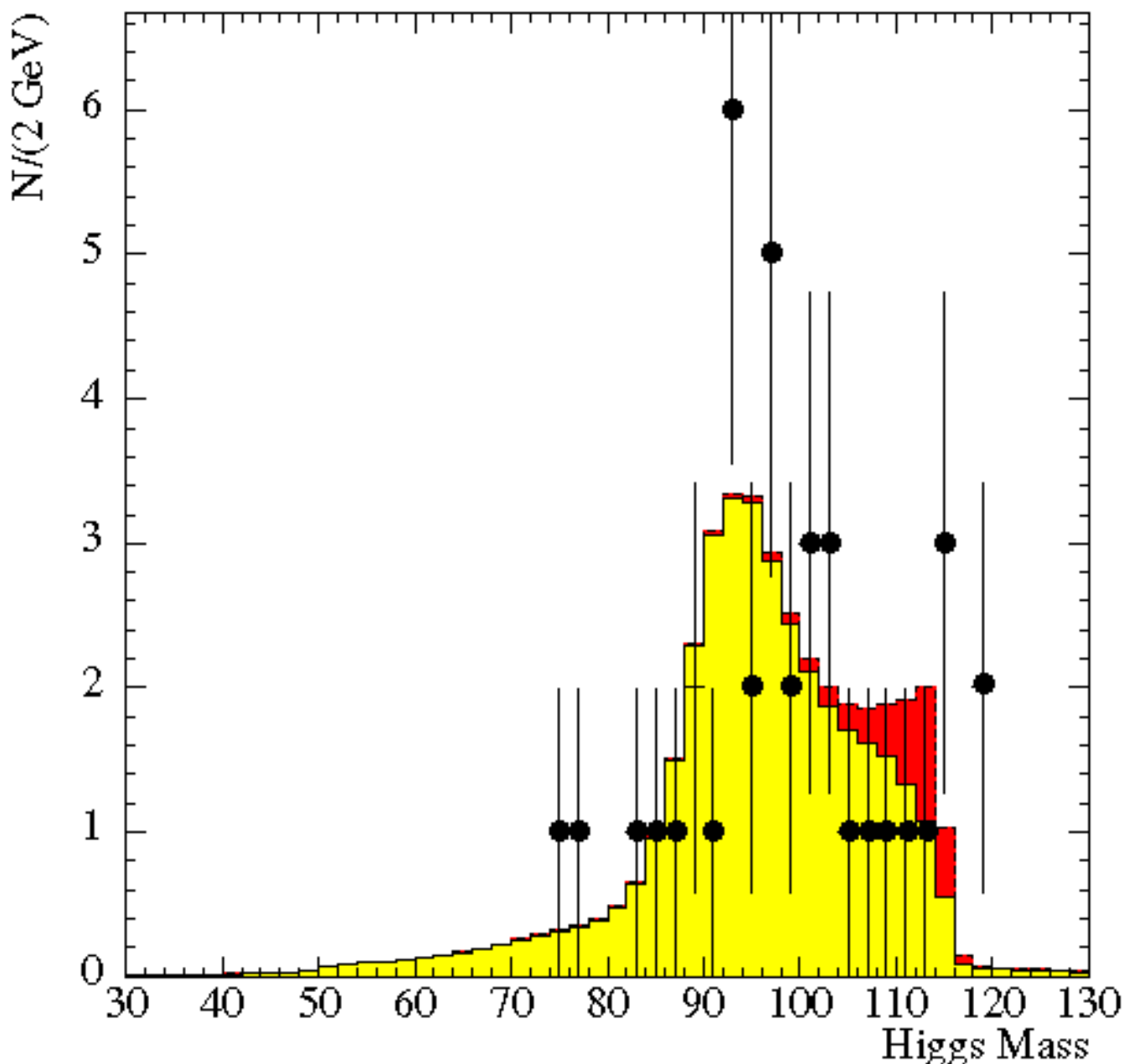


mit $H \rightarrow b\bar{b}$ ($\tau^+\tau^-$).

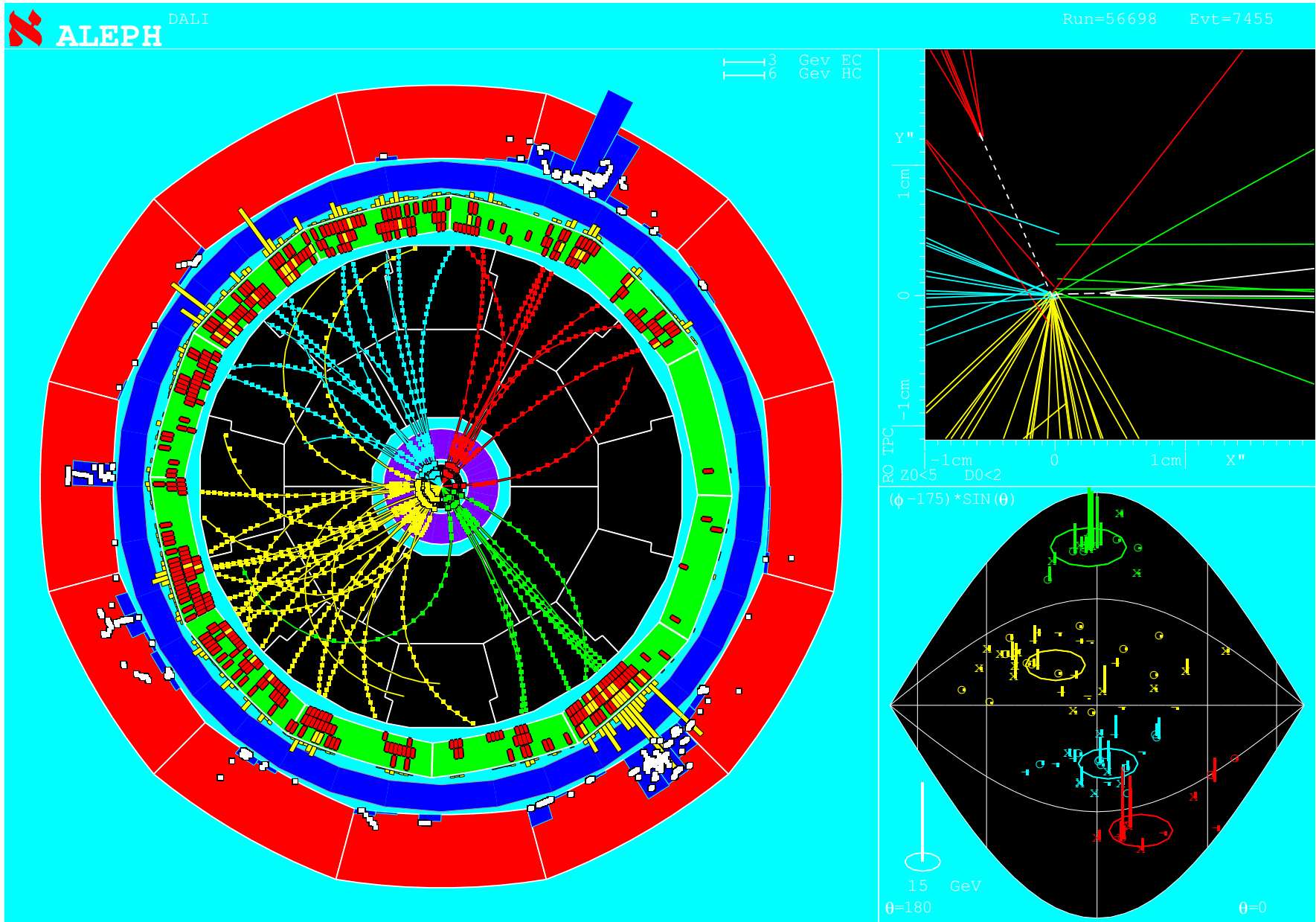
$$M_H > 114.4 \text{ GeV} \quad (95\% \text{ CL})$$

Bei einer Masse $M_H = 115.6 \text{ GeV}$ wurde 2001/02 bei LEP (vor allem beim ALEPH-Experiment) bei der höchsten Energie eine Anhäufung von Kandidatenereignissen für Higgs-Zerfälle in $b\bar{b}$ gefunden.

Die **Signifikanz** der Higgs-Ereignisse gegenüber den erwarteten Untergrundereignissen ist jedoch **nur ca. 2 Standardabweichungen**.

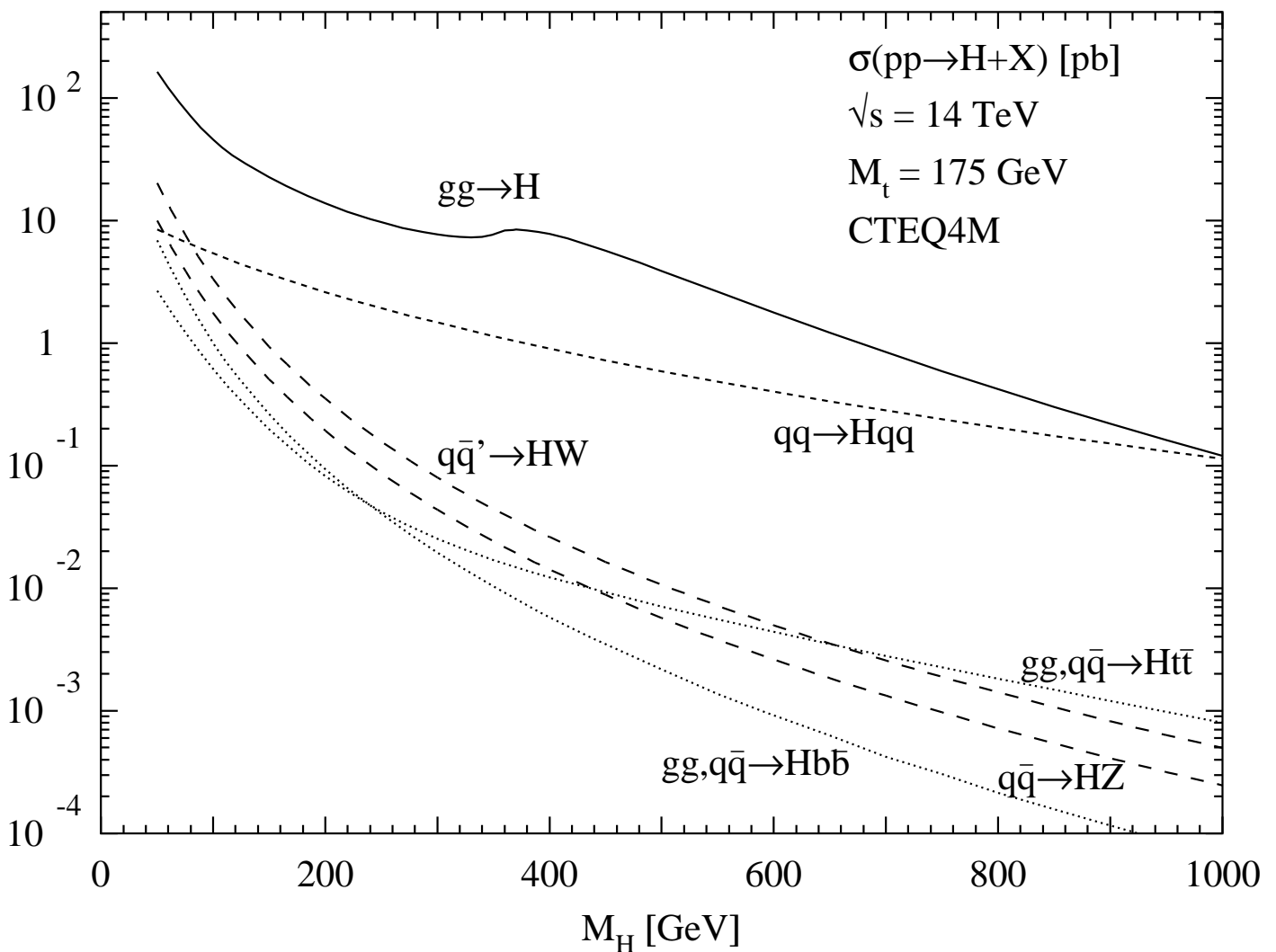
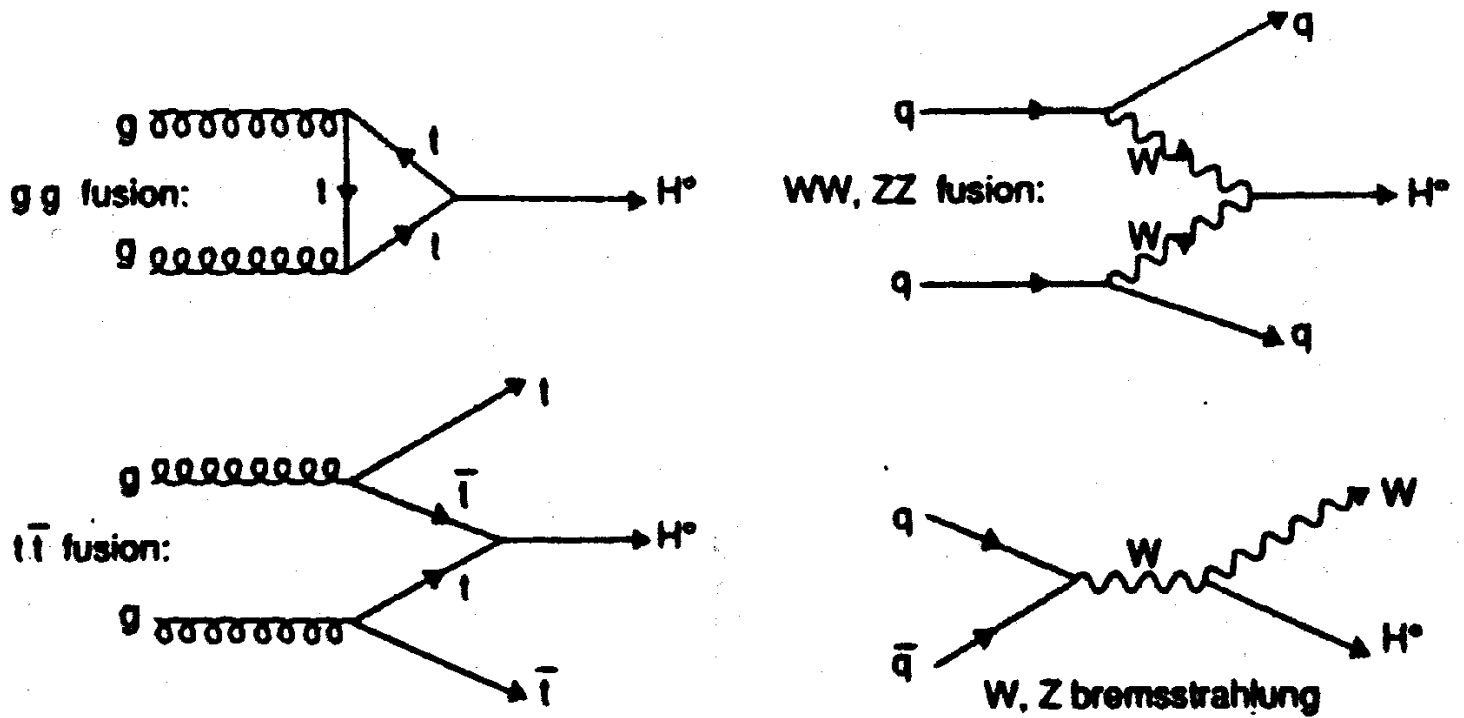


Kandidat für $H \rightarrow b\bar{b}$ -Produktion bei LEP II (ALEPH-Experiment)

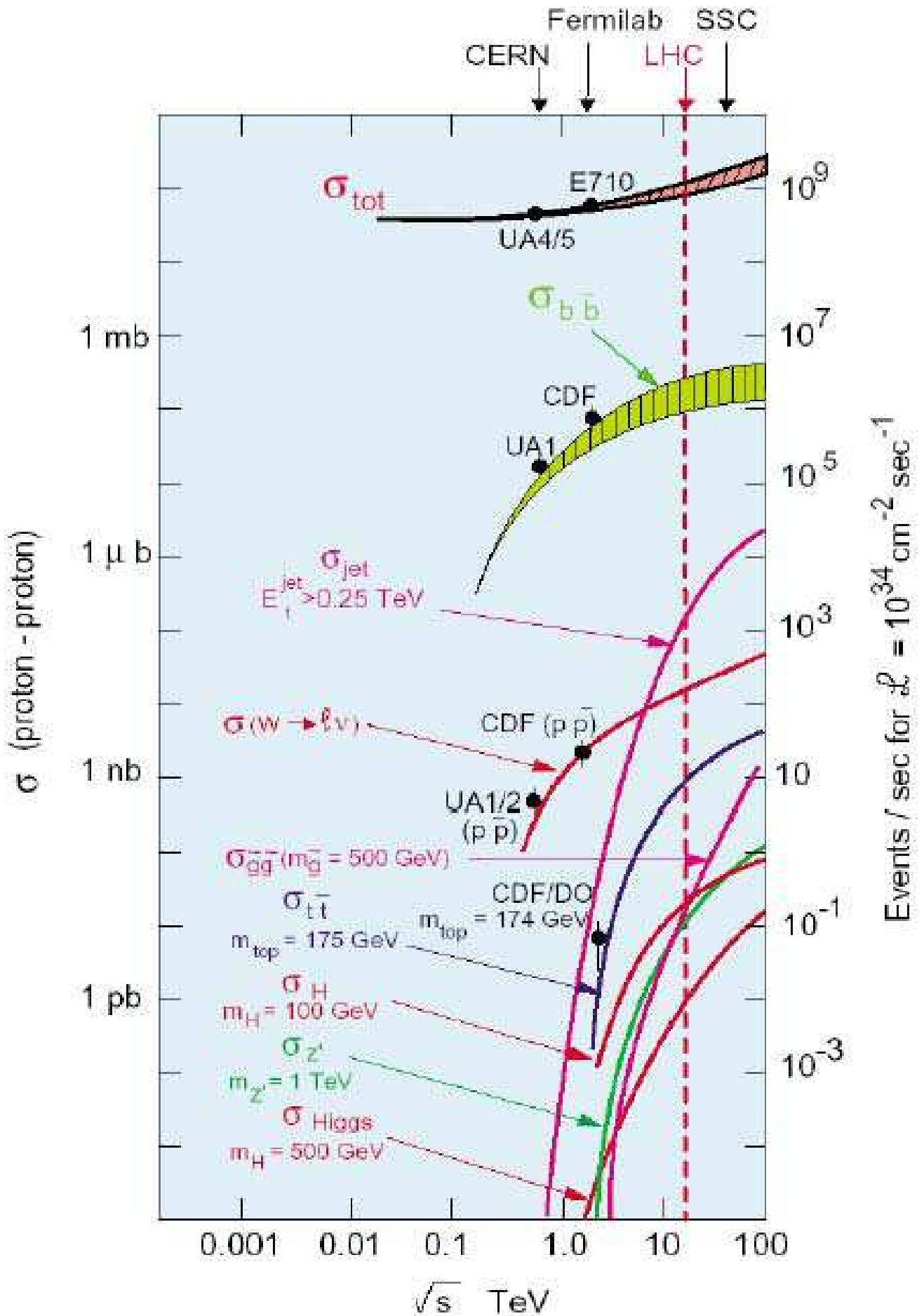


Made on 30-Aug-2000 17:24:02 by konstant with DALI_FL.
Filename: DC056698_007455_000830_1723.PS

2.2.4 Higgs-Produktion in pp-Kollisionen



Reaktionen in pp-Kollisionen:



Zerfälle des Higgs-Bosons

M_H bestimmt alle Zerfallsraten.

1) $H \rightarrow f\bar{f}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= g_f \bar{u}_f u_f = g_f 2E_f = g_f M_H; \\ |\mathcal{M}|^2 &\approx N_C^f g_f^2 M_H^2; \\ \Gamma(H \rightarrow f\bar{f}) &\approx \frac{|\mathcal{M}|^2}{16\pi M_H} = \frac{1}{16\pi} N_C^f \frac{g_f^2 m_f^2}{4M_W^2} M_H \\ &= N_C^f \frac{G_F}{4\sqrt{2}\pi} m_f^2 M_H.\end{aligned}$$

Für $M_H \leq 100$ GeV: $H \rightarrow b\bar{b}$.

Für $M_H > 2m_t = 350$ GeV: $H \rightarrow t\bar{t}$.

2) $H \rightarrow \gamma\gamma$:

$$\Gamma(H \rightarrow \gamma\gamma) = \frac{G_F \alpha^2}{128\sqrt{2}\pi^3} M_H^3 \cdot C_{\text{Ph}}$$

ist verhältnismäßig klein ($\sim \alpha^2$).

Verzweigungsverhältnis am größten für

$90 \leq M_H \leq 150$ GeV.

3) $H \rightarrow W^+W^-$ (oder Z^0Z^0):

für $M_H > 2M_W$ (bzw. $> 2M_Z$)

Für $M_H \gg M_W$: longitudinale W-Polarisation:

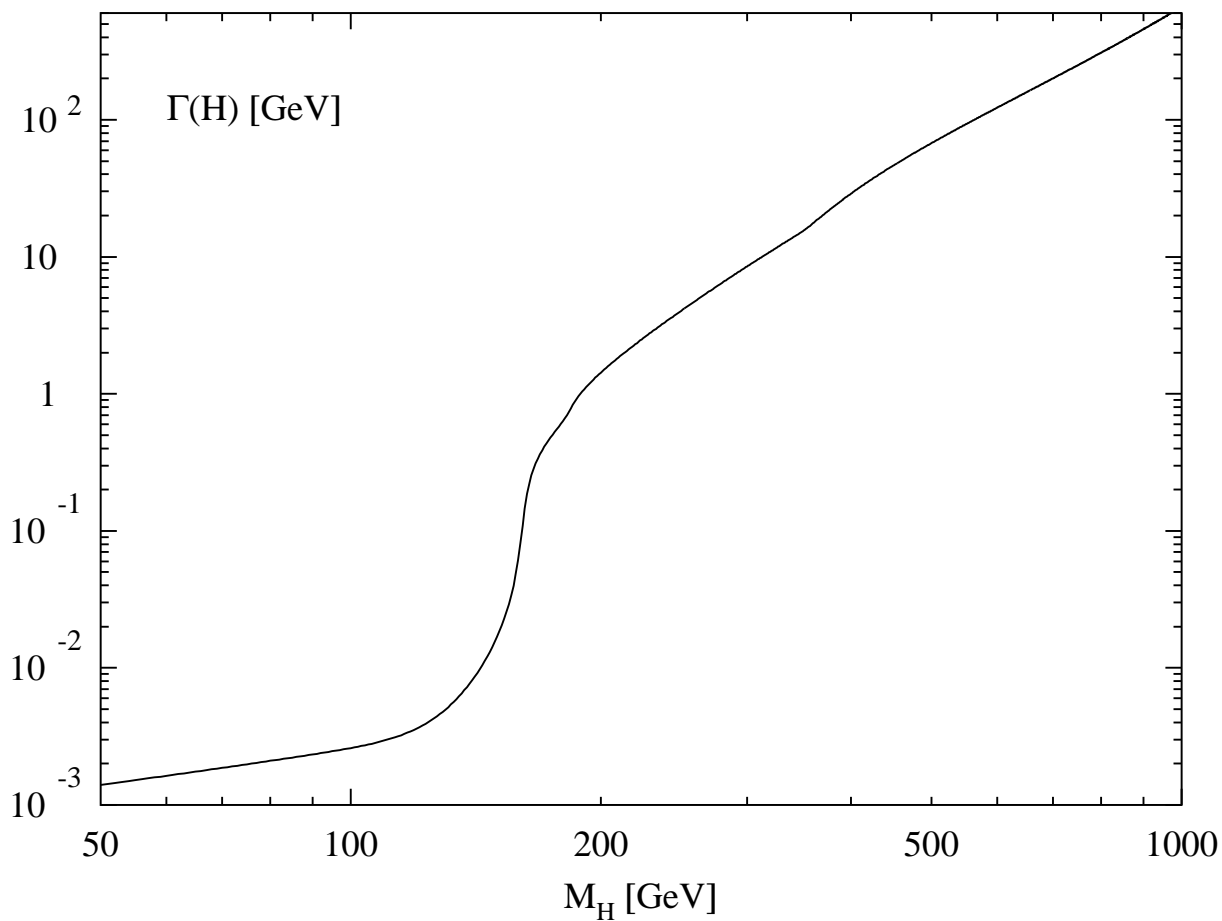
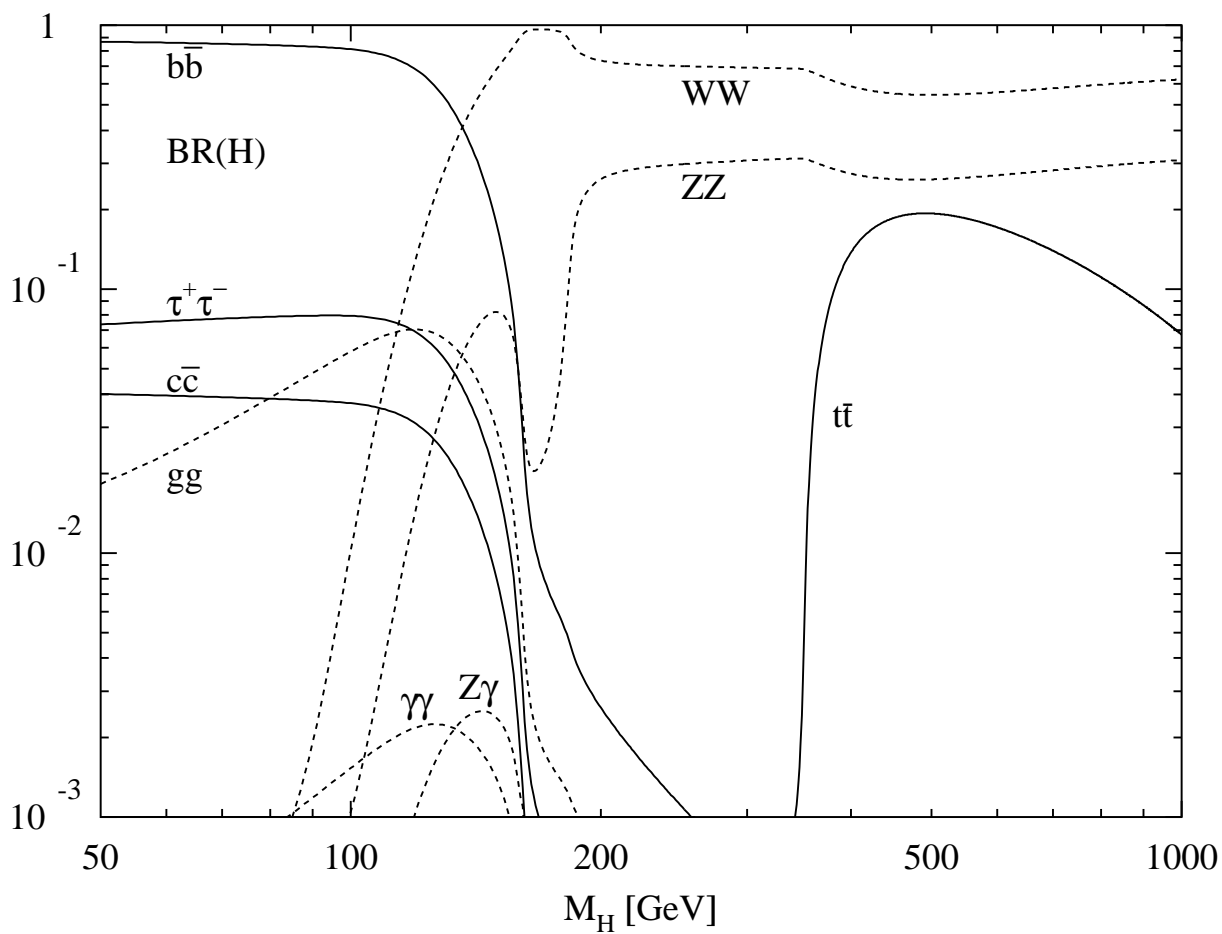
$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= igM_W \varepsilon_{\mu 1} \varepsilon_2^{\mu*} \approx igM_W \frac{k_{\mu 1} k_2^\mu}{M_W^2}; \\ |\overline{\mathcal{M}}|^2 &\approx \frac{g^2 M_H^4}{4M_W^2}; \\ \Gamma(H \rightarrow W^+W^-) &\approx \frac{1}{16\pi M_H} \frac{g^2 M_H^4}{4M_W^2} = \frac{G_F}{8\sqrt{2}\pi} M_H^3\end{aligned}$$

mit $k_{\mu 1} k_2^\mu \approx \frac{1}{2}(k_1 + k_2)^2 = \frac{1}{2}M_H^2$.

→ Totale Higgs-Zerfallsbreite:

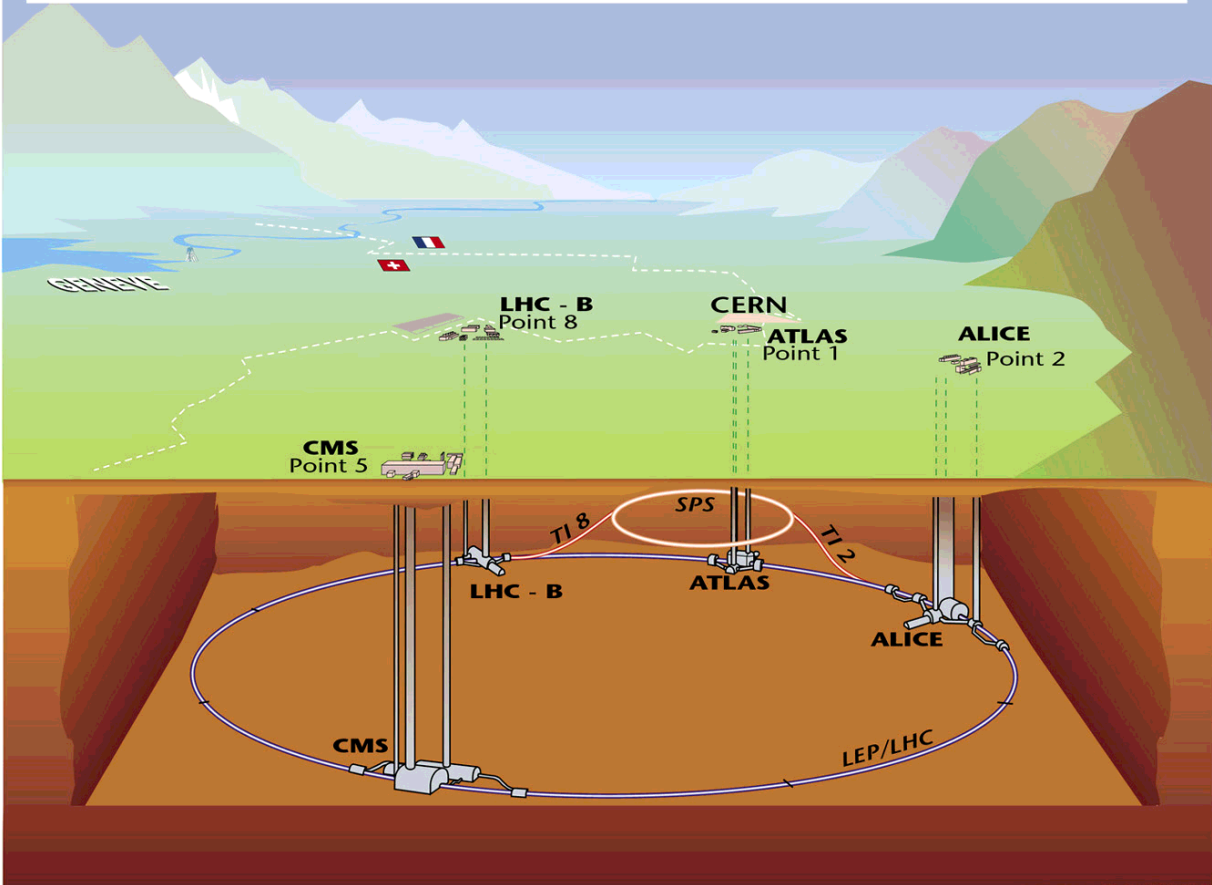
$$\Gamma_{\text{tot}} \approx \frac{1}{2} M_H^3 [\text{TeV}] \mapsto \frac{1}{2} M_H \quad \text{f. } M_H \rightarrow 1 \text{ TeV.}$$

Zerfälle des Higgs-Bosons:



Der LHC Beschleuniger

Overall view of the LHC experiments.

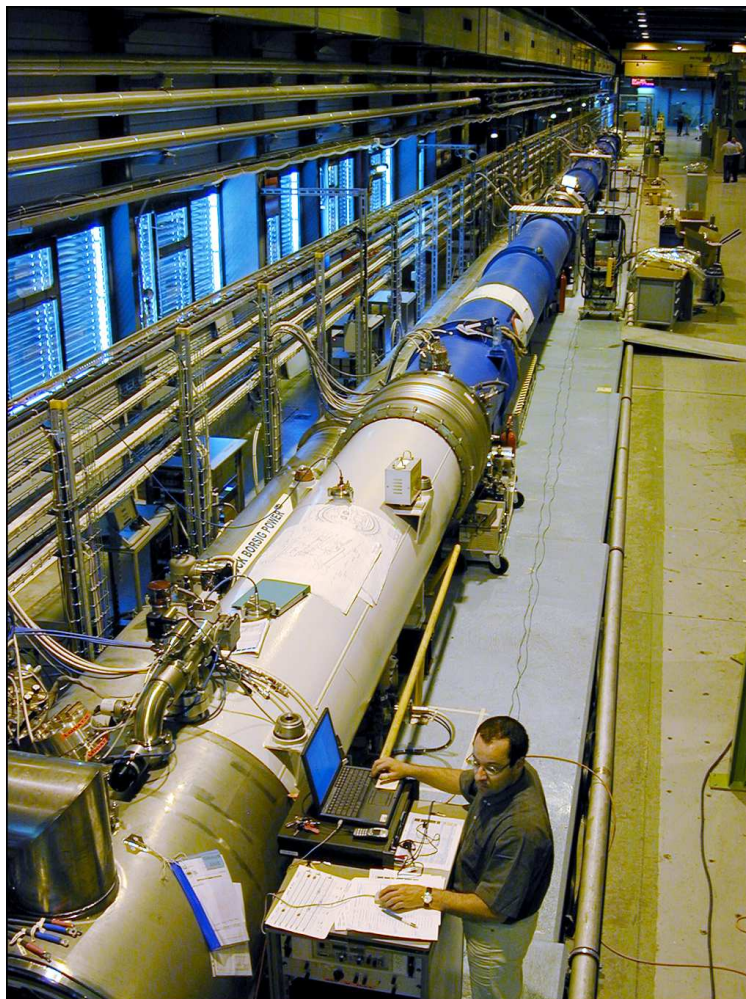


Der LHC Beschleuniger

LEP/LHC-Tunnel



1250 supraleitende Dipolmagnete mit 1.6 Mrd. km supraleitendem Kabel ($\approx 2 \times$ Erdumlaufbahn um die Sonne)

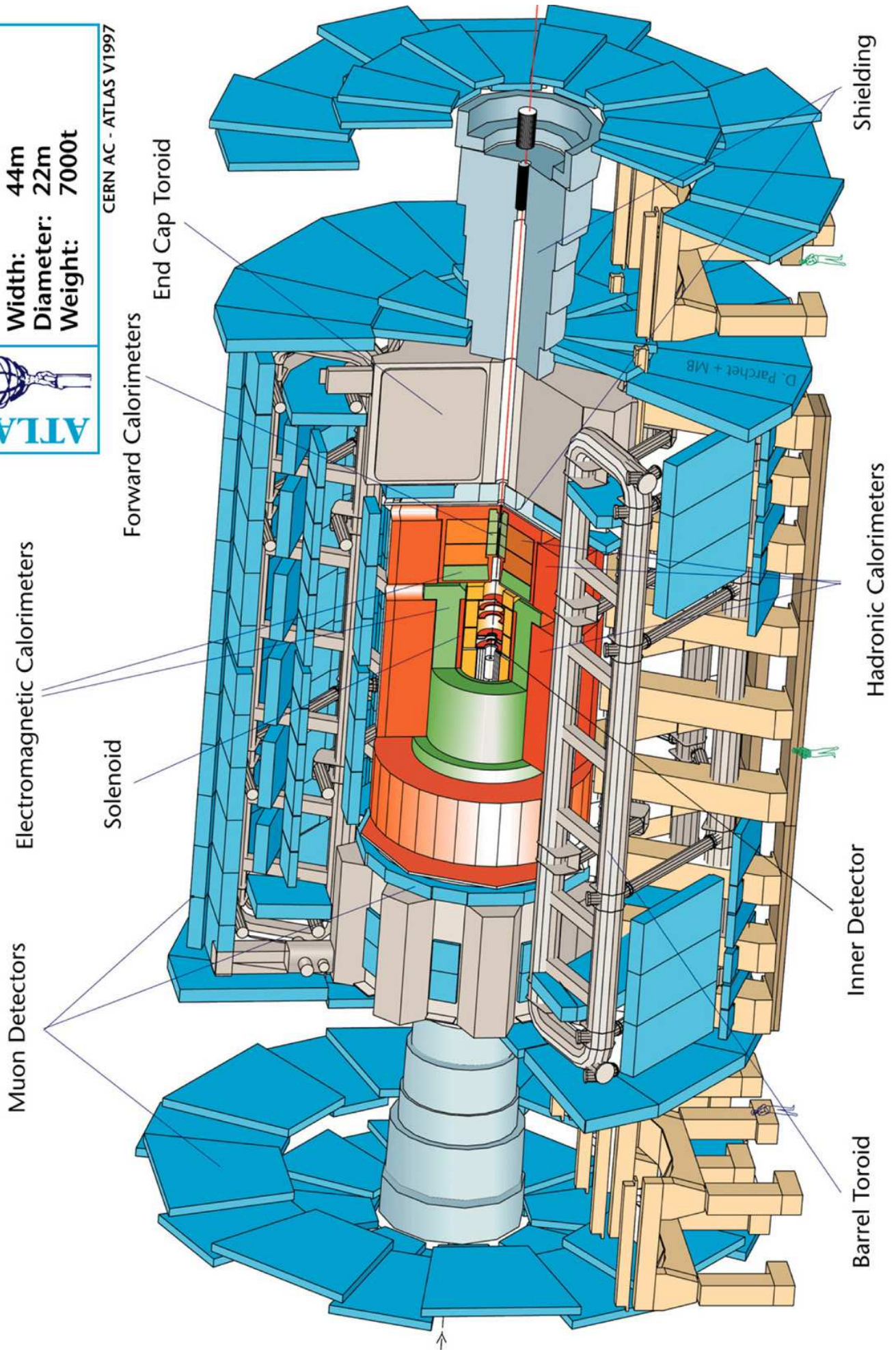


Beispiel: das ATLAS-Experiment am LHC

ATLAS

Detector characteristics
Width: 44m
Diameter: 22m
Weight: 7000t

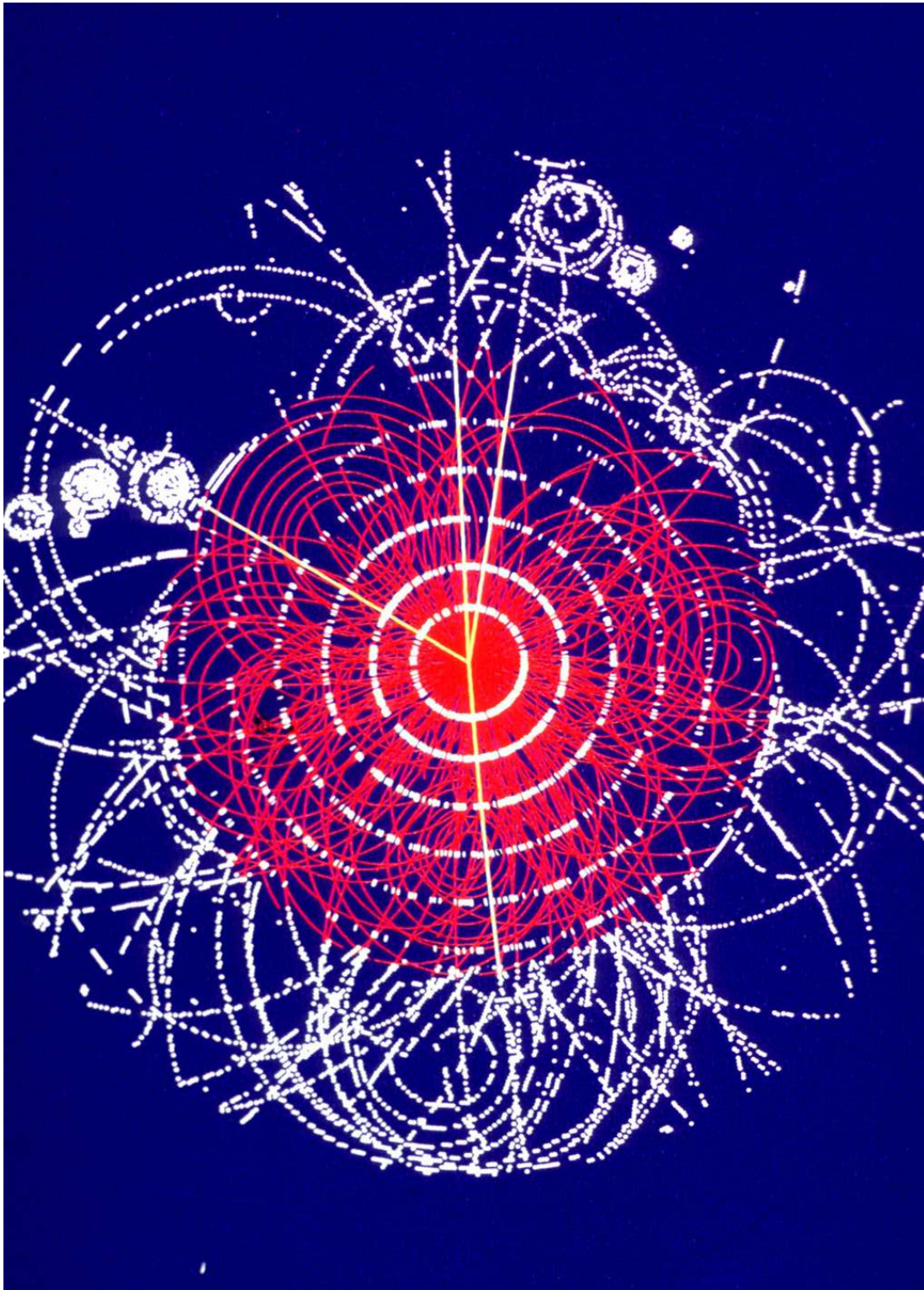
CERN AC - ATLAS V1997



Higgs-Zerfall im ATLAS Detektor

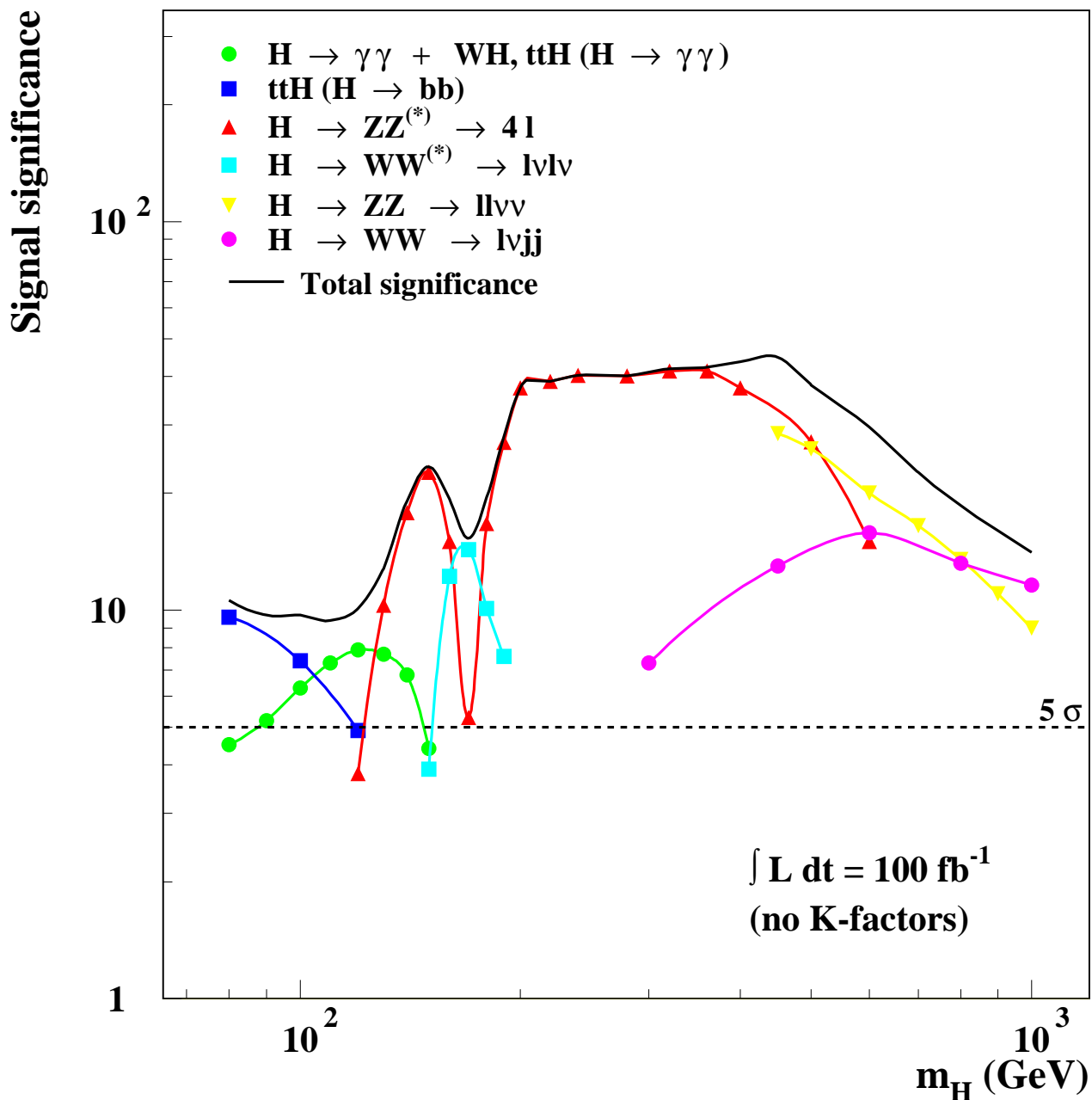
Computersimulation des Zerfalls eines Higgs-Teilchens im ATLAS Detektor:

$$\text{Higgs} \longrightarrow Z^0 Z^0 \longrightarrow (\mu^+ \mu^-)(\mu^+ \mu^-)$$



Suche nach dem Higgs-Boson am LHC:

Higgs-Signale des ATLAS-Experiments nach ca. 4 Jahren Laufzeit:



Der Massenbereich $120 < M_H < 700$ GeV wird abgedeckt durch den "Goldenen Kanal":

