Neutrinophysik:

Neutrinomassen und Neutrino-Oszillationen

Übersicht:

Standardmodell der Teilchenphysik: $m_\nu = 0$.

Experimentelle obere Grenzwerte für Neutrinomassen:

Generation			
$m_1 \approx m_{\nu_e}$	< 2.8	eV	
	< 0.56	eV	(Majorana-Neutrino)
$m_2 \approx m_{\nu_\mu}$	< 170	keV	
$m_3 \approx m_{\nu_\tau}$	< 24	MeV	

viel kleiner als die Massen der geladenen Leptonen der gleichen Generation

$m_\nu \neq 0$ ist nicht ausgeschlossen;

wird von einigen Vereinheitlichten Eichtheorien der fundamentalen Wechselwirkungen (GUTs) vorhergesagt.

Konsequenzen nichtverschwindender Neutrinomassen:

- Neutrino-Oszillationen $\Longrightarrow m_\nu \neq 0$.
- Neutrinozerfälle, Leptonzahlverletzung.
- Kosmologie: Bestandteil der “Dunklen Materie” im Universum, Erklärung der Galaxienentstehung.
- Erklärung der vergleichsweise kleinen Neutrinomassen notwendig.

3 Leptonfamilien:

Leptonarten ("Leptonflavours") gekennzeichnet durch Leptonflavourzahlen L_α.

Linkshändige Dublettzustände der schwachen Wechselwirkung (geladene Ströme, schwacher Isospin I, SU(2)-Symmetrie):

$$\begin{array}{cccccc}
L_\alpha = 1 & L_e = 1 & L_\mu = 1 & L_\tau = 1 & Q & I_z \\
\\
\begin{pmatrix} \alpha \\ \nu_\alpha \end{pmatrix}_L = & \begin{pmatrix} e^- \\ \nu_e \end{pmatrix}_L & \begin{pmatrix} \mu^- \\ \nu_\mu \end{pmatrix}_L & \begin{pmatrix} \tau^- \\ \nu_\tau \end{pmatrix}_L & \begin{matrix} -1 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} -\frac{1}{2} \\ +\frac{1}{2} \end{matrix}
\end{array}$$

$$\text{Rechtshändige Singulettzustände :}$$

$$\begin{array}{cccccc}
 & e^-_R & \mu^-_R & \tau^-_R & -1 & 0 \\
 & \nu_{eR} & \nu_{\mu R} & \nu_{\tau R} & 0 & 0
\end{array}$$

(Paritätsverletzung durch die schwache Wechselwirkung.)

Bei $m_{\nu_\alpha} = 0$ keine rechtshändigen Neutrinozustände $\nu_{\alpha R}$.

Selbst bei $m_\nu \neq 0$ keine Wechselwirkung der rechtshändigen Neutrinozustände mit der übrigen Materie außer Gravitation ("sterile Neutrinos").

Additive Leptonquantenzahlen:

$$\begin{aligned} L_\alpha|\nu_\beta> &= \delta_{\alpha\beta}|\nu_\beta> \\ L_\alpha|\overline{\nu}_\beta> &= -\delta_{\alpha\beta}|\overline{\nu}_\beta> \end{aligned}$$

Antileptonen: $L_\alpha = -1$.

Globale Leptonzahl $L = \sum_\alpha L_\alpha$ ist erhalten in bisherigen Experimenten.

Neutrino-Oszillationen:

- Zeitlich oszillierende Übergänge $\nu_\alpha \longleftrightarrow \nu_\beta$, $\alpha \neq \beta$

  (ν-flavour-Oszillationen)

  Erstmals vorgeschlagen von B. Pontecorvo, 1958 ($\nu \longleftrightarrow \overline{\nu}$),
  Z. Maki et al., 1962 ($\nu_\alpha \longleftrightarrow \nu_\beta$)

- Notwendige Bedingungen:

  1. $m_{\nu_\alpha} \neq m_{\nu_\beta}$ und nicht alle Neutrinoflavours masselos.
  2. Leptonzahlen L_α nicht erhalten, d.h. Mischung der ν-flavours möglich.

Leptonzahlerhaltung im Standardmodell der schwachen WW automatisch, falls Punkt 1) nicht zutrifft.

Es existiert kein eigenes Symmetrieprinzip für die Erhaltung der Leptonzahl.

Verletzung der Leptonzahlerhaltung ist daher nicht grundsätzlich ausgeschlossen.

In diesem Fall sind auch Zerfälle geladenen Leptonen und der Neutrinos möglich, wie $\mu^- \to e^-\gamma$, die noch nicht beobachtet wurden.

1.1 Mechanismus der Neutrino-Oszillationen im Vakuum

Neutrinoflavour-Mischung: typischer QM-Effekt

(allgemein für n flavours)

$$\boxed{\nu\text{-flavour-Eigenzustände } |\nu_\alpha>, \quad \alpha = e, \mu, \tau, ...}$$

Eigenzustände der schwachen WW mit definierter Leptonzahl,

sind im allgemeinen Linearkombinationen der

$$\boxed{\nu\text{-Masseneigenzustände } |\nu_i>, \quad i = 1, 2, 3, ..., n}$$

verbunden durch eine unitäre Transformation U.

In der Massendarstellung (Massenoperator diagonal):

$$< \nu_i | M | \nu_j >= m_i \, \delta_{ij}.$$

In der Flavour-Darstellung (Massenmatrix nicht diagonal):

$$< \nu_\alpha | M | \nu_\beta > \neq 0.$$

D.h. der Massenoperator (Hamiltonoperator) vermittelt Übergänge zwischen den schwachen flavour-Eigenzuständen.

Unitäre Transformation U (Erhaltung der Wahrscheinlichkeit):

Rotation im n-dim. Neutrinoflavour-Raum bis auf komplexe Phasenfaktoren,

ν-flavour-Mischungsmatrix

Unitäre Transformation (Linearkombination) der Neutrinozustände:

$$\boxed{|\nu_\alpha >= \sum_{i=1}^{n} U_{\alpha i} |\nu_i >} \quad (1)$$

mit der $n \times n$ Mischungsmatrix U ($UU^\dagger = UU^{*T} = 1$):

$$\boxed{\sum_i U_{\alpha i} U^*_{\beta i} = \delta_{\alpha\beta}} \quad (2)$$

$$\sum_\alpha U_{\alpha i} U^*_{\alpha j} = \delta_{ij}$$

und der invertierten Transformation ($U^{-1} = U^\dagger$):

$$\boxed{|\nu_i >= \sum_\alpha (U^\dagger)_{i\alpha} |\nu_\alpha >= \sum_\alpha U^*_{\alpha i} |\nu_\alpha >} \quad (3)$$

$$< \nu_i|\nu_j >= \delta_{ij}, < \nu_\alpha|\nu_\beta >= \delta_{\alpha\beta}$$

<u>Für Antineutrinos</u>: $U_{\alpha i}$ ersetzt durch $U^*_{\alpha i}$

(Ladungskonjugation C: $C|\overline{\nu}_\alpha >= \eta_c|\nu_\alpha >$, η_c komplexer Phasenfaktor):

$$\boxed{|\overline{\nu}_\alpha >= \sum_i U^*_{\alpha i} |\overline{\nu}_i >} \quad (4)$$

Eigenschaften der Mischungsmatrix: komplex, unitär

Allgemein gilt:

Komplexe $n \times n$-Matrix: $2n^2$ unabhängige Parameter.

Unitäre Matrix mit n^2 Nebenbedingungen ($U^\dagger U = 1$): $2n^2 - n^2 = n^2$ Parameter.

Davon sind $n(n-1)/2$ reelle Mischungswinkel;

die übrigen $n^2 - n(n-1)/2 = n(n+1)/2$ Parameter sind komplexe Phasenfaktoren.

Denn eine reelle unitäre Matrix (orthogonale Matrix) mit $n + n(n-1)/2$ Nebenbedingungen ($U^T U = 1$) hat $n^2 - n - n(n-1)/2 = n(n-1)/2$ unabhängige reelle Parameter (Rotationswinkel).

n Phasenfaktoren können in den n Neutrino-Feldern $|\nu_i>$ durch Neudefinition ihrer Phase absorbiert werden (aus der 1. Spalte der Mischungsmatrix: $\alpha = 1, ..., n$).

$n-1$ weitere Phasenfaktoren können aus den noch nicht festgelegten Elementen der 1. Zeile der Mischungsmatrix ($j = 2, ..., n$) in $n-1$ Antineutrinofeldern $|\overline{\nu}_i>$ absorbiert werden.

Insgesamt lassen sich also $2n-1$ Phasenfaktoren eliminieren.

Danach bleiben $n(n+1)/2 - (2n-1) = (n-1)(n-2)/2$ unabhängige Phasenfaktoren übrig.

Wichtige Beispiele:

2 Neutrino-Generationen ($n = 2$):

1 Mischungswinkel (Drehung in der Ebene), keine Phase (reelle Mischungsmatrix)

3 Neutrino-Generationen ($n = 3$, Standardmodell):

3 Mischungswinkel (Eulerwinkel für Drehungen im Raum), 1 Phasenfaktor (komplexe Mischungsmatrix)

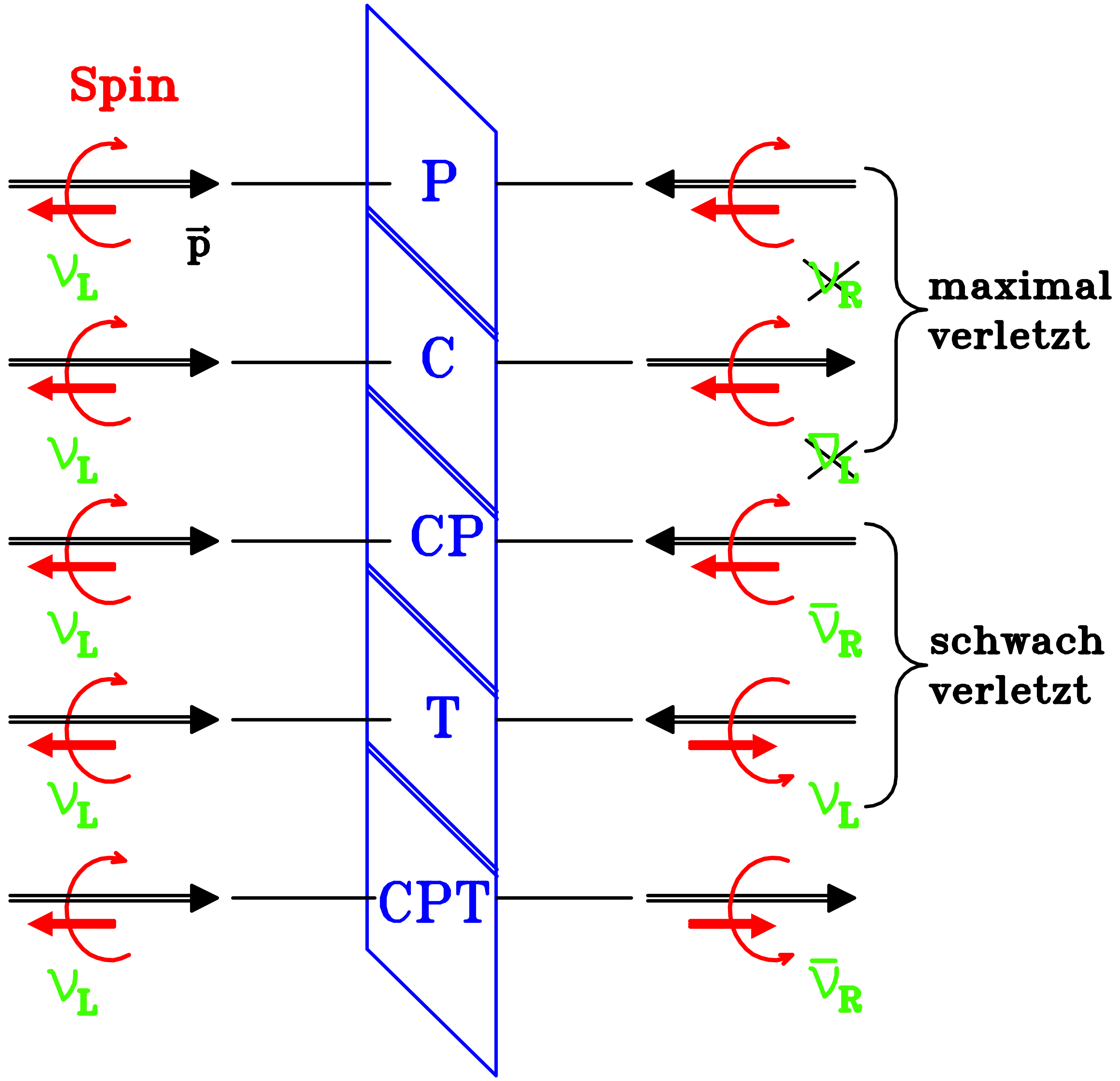
NB:

Komplexe Phasenfaktoren in der Mischungsmatrix führen zur Verletzung der CP-Symmetrie durch die schwache Wechselwirkung; möglich für $n \geq 3$.

(C: Ladungskonjugation, P: Raumspiegelung, Parität; beide separat verletzt durch die schwache WW.)

Dieser Effekt wurde beobachtet in den (unterschiedlichen) Zerfallsraten von K^0-und $\overline{K}^0$-Mesonen und der $K^0 - \overline{K}^0$-Mischung. Er wird im Standardmodell auf die Mischung der 3 Quarkgenerationen mit der komplexen CKM-Matrix (Cabibbo-Kobayashi-Maskawa) zurückgeführt.

Diskrete Symmetrien der Elementarteilchen



Entdeckung der CP-Verletzung in schwachen K^0-Zerfällen: Christenson, Cronin, Fitch und Turlay (1964).

CPT-Erhaltung bedeutet identische Massen und Lebensdauern von Teilchen und Antiteilchen.

d.h. CP-Verletzung $\Longleftrightarrow$ Zeitumkehrasymmetrie.

Zeitabhängigkeit der Masseneigenzustände:

$$\boxed{\hbar = c = 1}$$

$\Longrightarrow$ Stationäre Zustände (zeitlich propagierend):

$$\boxed{|\nu_i(t) >= e^{-iE_it}|\nu_i >} \quad (5)$$

mit $E_i = \sqrt{p^2 + m_i^2} \stackrel{m_i \ll p}{\approx} p + \frac{1}{2}\frac{m_i^2}{p} \approx E + \frac{1}{2}\frac{m_i^2}{E}$,

und der Neutrinoenergie $E \approx p \approx const.$ (relativistische Teilchen), die im Experiment gemessen wird.

Lösungen der Bewegungsgleichung:

Relativistische Dirac-Gleichung (Fermionen mit Spin $\frac{1}{2}$):

$$\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m_i\right) |\nu_i(x) > = 0$$

nimmt im Grenzfall $p \gg m_i$ die Form einer Schrödingergleichung an:

$$\boxed{i\frac{\partial}{\partial t}\,|\nu_i(t) > \approx H_{ij}^{(i)}|\nu_j(t) >} \quad (6)$$

mit dem Hamiltonoperator in der Massendarstellung (diagonal):

$$\boxed{H_{ij}^{(i)} =< \nu_i|H|\nu_j >= \left(p + \frac{m_i^2}{2E}\right)\delta_{ij}} \quad (7)$$

Annahme:

zur Zeit $t = 0$ existiert ein reiner flavour-Zustand

$$|\nu(0)> \equiv |\nu_\alpha> \stackrel{(1)}{=} \sum_i U_{\alpha i}|\nu_i>,$$

der sich nach der Zeit t in den Zustand

$$\boxed{\begin{aligned} |\nu(t)> &\stackrel{(5)}{=} \textstyle\sum_i U_{\alpha i} e^{-iE_it}|\nu_i> \\ &\stackrel{(3)}{=} \textstyle\sum_i \sum_\gamma U_{\alpha i} U^*_{\gamma i} e^{-iE_it}|\nu_\gamma> \end{aligned}} \quad (7)$$

entwickelt, d.h. Beimischung anderer Neutrinoflavours.

Die Übergangsamplitude in einen anderen Neutrinoflavour β, mit $<\nu_\beta|\nu_\gamma> = \delta_{\beta\gamma}$,

$$\boxed{\mathcal{A}(\alpha \longrightarrow \beta; t) = <\nu_\beta|\nu(t)> = \textstyle\sum_i U_{\alpha i} U^*_{\beta i} e^{-iE_it}} \quad (8)$$

ist zeitabhängig und periodisch.

D.h. Neutrino-Oszillationen zwischen den verschiedenen Neutrinoflavours.

Eigenschaften der Übergangsamplituden:

für Antineutrinos gilt nach (4):

$$\boxed{\mathcal{A}(\overline{\alpha} \longrightarrow \overline{\beta}; t) = < \overline{\nu}_\beta | \overline{\nu}(t) > = \sum_i U^*_{\alpha i} U_{\beta i} e^{-iE_i t}} \quad (9)$$

$$\Longrightarrow \boxed{\mathcal{A}(\overline{\alpha} \longrightarrow \overline{\beta}) \neq A(\alpha \longrightarrow \beta)}$$

T- und CP-Symmetrie i.a. nicht erhalten durch die schwache Wechselwirkung.

$$\Longrightarrow \boxed{\mathcal{A}(\overline{\alpha} \longrightarrow \overline{\beta}) = \mathcal{A}(\beta \longrightarrow \alpha)}$$

CPT-Symmetrie bleibt erhalten (Theorem).

Falls die CP bzw. T-Symmetrie erhalten ist,

$\Longleftrightarrow$ keine komplexen Phasenfaktoren,
d.h. Mischungsmatrix $(U_{\alpha i})$ reell,

muß gelten:

$$\boxed{\mathcal{A}(\overline{\alpha} \to \overline{\beta}) \overset{\mathrm{CP\ Inv}}{=} \mathcal{A}(\alpha \to \beta) \overset{\mathrm{T\ Inv}}{=} \mathcal{A}(\beta \to \alpha) \overset{\mathrm{CP\ Inv}}{=} \mathcal{A}(\overline{\beta} \to \overline{\alpha})}$$

Übergangswahrscheinlichkeiten:

$$\boxed{\begin{aligned}&\mathcal{P}(\alpha \longrightarrow \beta; t) = |\mathcal{A}(\alpha \longrightarrow \beta; t)|^2 \\ &= \left(\sum_i U_{\alpha i} U^*_{\beta i} e^{-iE_i t}\right) \cdot \left(\sum_j U^*_{\alpha j} U_{\beta j} e^{iE_j t}\right) \\ &= \underbrace{\sum_i |U_{\alpha i} U^*_{\beta i}|^2}_{(a)} + \underbrace{2\mathcal{R}e \sum_i \sum_{j>i} U_{\alpha i} U^*_{\beta i} U^*_{\alpha j} U_{\beta j} e^{-i\Delta_{ij}}}_{(b)}\end{aligned}} \tag{10}$$

mit $$\boxed{\Delta_{ij} = (E_i - E_j) \cdot t = \frac{m_i^2 - m_j^2}{2E} \cdot t =: \frac{\delta m_{ij}^2}{2} \cdot \frac{L}{E}} \tag{11}$$

$(L = t; c \equiv 1)$.

$(a) =$ zeitunabhängige mittlere Übergangswahrscheinlichkeit
$< \mathcal{P}(\alpha \to \beta) > \equiv < \mathcal{P}(\beta \to \alpha) >$.

$(b) =$ zeitabhängiger Oszillationsterm;
Oszillationen, falls nicht alle $\delta m_{ij}^2 = 0$,
mit möglicher Zeitumkehrasymmetrie (CP-Verletzung),
gibt Information über Neutrinomassen.

Unter Verwendung der Unitarität der Mischungsmatrix,

$$\sum_i U_{\alpha i} U^*_{\beta i} = \sum_i U^*_{\alpha i} U_{\beta i} = \delta_{\alpha\beta}, \mathrm{d.h.}$$

$$\begin{aligned} \cdot \quad & \sum_{i,j} U_{\alpha i} U^*_{\beta i} U^*_{\alpha j} U_{\beta j} = \delta^2_{\alpha\beta} \equiv \delta_{\alpha\beta} \\ = \quad & \sum_i |U_{\alpha i} U^*_{\beta i}|^2 + 2\mathcal{R}e \sum_i \sum j > i U_{\alpha i} U^*_{\beta i} U^*_{\alpha j} U_{\beta j} \end{aligned}$$

ergibt sich die Form:

$$\boxed{\mathcal{P}(\alpha \to \beta; t) = \delta_{\alpha\beta} - 2\mathcal{R}e \sum_i \sum_{j>i} U_{\alpha i} U^*_{\beta i} U^*_{\alpha j} U_{\beta j} \left[1 - e^{-i\Delta_{ij}} \right]}$$
(12)

Falls <u>CP erhalten</u> ist, d.h. $(U_{\alpha i})$ reell, gilt:

$$\boxed{\mathcal{P}_{CP}(\alpha \to \beta; t) = \sum_i U^2_{\alpha i} U^2_{\beta i} + 2 \sum_i \sum_{j>i} U_{\alpha i} U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j} \cos \Delta_{ij}}$$

oder mit (12) und $\frac{1}{2}(1 - \cos \Delta_{ij}) = \sin^2 \frac{\Delta_{ij}}{2}$:

$$\boxed{\mathcal{P}_{CP}(\alpha \to \beta; t) = \delta_{\alpha\beta} - 4\mathcal{R}e \sum_i \sum j > i U_{\alpha i} U^*_{\beta i} U^*_{\alpha j} U_{\beta j} \sin^2 \frac{\Delta_{ij}}{2}}$$
(13)

Die Übergangswahrscheinlichkeit $\mathcal{P}(\alpha \to \beta; t)$ enthält allgemein

$(n-1)^2$ unabhängige (komplexe) Parameter der Mischungsmatrix; $\longrightarrow$ Oszillationsamplituden

außerdem

$(n-1)$ verschiedene ν-Massen^2-Differenzen; $\longrightarrow$ Oszillationsfrequenzen

insgesamt $n(n-1)$ reelle Parameter.

Bei CP-Erhaltung:

$n(n-1)/2$ reelle Mischungswinkel (Amplituden)

$(n-1)$ Frequenzen

insgesamt $(n+2)(n-1)/2$ reelle Parameter.

Zur numerischen Auswertung:

$$\Delta_{ij} = \frac{E_i - E_j}{\hbar} \cdot t \stackrel{L=ct}{=} \frac{1}{2\hbar c} \underbrace{(m_i^2 - m_j^2)c^4}_{=:\delta m_{ij}^2} \cdot \frac{L}{E}$$

$$= 2.534 \cdot \delta m_{ij}^2 [\mathrm{eV}^2] \frac{L\ [\mathrm{m}]}{E\ [\mathrm{MeV}]} \quad (14)$$

mit $\hbar c = 1.973 \cdot 10^{-13}\ \mathrm{MeV} \cdot \mathrm{m}$.

Es gilt:

$$\cos \Delta_{ij} = \cos\left(2\pi \frac{t}{t_0}\right) = \cos\left(2\pi \frac{L}{L_0}\right)$$

mit der Oszillationslänge $L_0 = ct_0$:

$$L_0 = \frac{2\pi L}{|\Delta_{ij}|} \stackrel{(12)}{=} \frac{4\pi\hbar c E}{|\delta m_{ij}^2| c^4} = 2.48 \cdot \frac{E\ [\mathrm{MeV}]}{|\delta m_{ij}^2|\ [\mathrm{eV}^2]}\ \mathrm{m}. \quad (15)$$

und der Oszillationsfrequenz $\nu_0 = 1/t_0 = c/L_0$:

$$\nu_0 = \frac{c \cdot |\Delta_{ij}|}{2\pi L} = \frac{|\delta m_{ij}^2| c^4}{4\pi\hbar E} = 1.2 \cdot 10^8 \cdot \frac{|\delta m_{ij}^2|\ [\mathrm{eV}^2]}{E\ [\mathrm{MeV}]}\ \mathrm{Hz}. \quad (16)$$

Neutrino-Massenmatrix M:

In der Massendarstellung diagonal (Definition):

$$< \nu_i | M | \nu_j > \;=\; m_i \delta_{ij} \quad (17)$$

In der flavour-Darstellung i.a. nicht-diagonal, d.h. vermittelt flavour-Übergänge:

$$\begin{aligned} m_{\alpha\beta} &= < \nu_\beta | M | \nu_\alpha >= \sum_{i,j} \underbrace{< \nu_\beta | \nu_j >}_{=U^*_{\beta j}} \underbrace{< \nu_j | M | \nu_i >}_{=m_i \delta_{ij}} \underbrace{< \nu_i | \nu_\alpha >}_{=U_{\alpha i}} \\ &= \sum_i m_i U_{\alpha i} U^*_{\beta i} \end{aligned}$$

mit $\sum_i |\nu_i >< \nu_i| = 1$ (orthonormale Basis im Raum der Neutrinozustände).

Die flavour-Darstellung ist nur diagonal, falls alle Neutrinomassen gleich sind ($m_i = m$, degenerierte Masseneigenwerte):

$$m_{\alpha\beta} = m \; \delta_{\alpha\beta}.$$

$\Longrightarrow$ Massen der flavour-Zustände $|\nu_\alpha >$:

$$\boxed{m_\alpha =< \nu_\alpha | M | \nu_\alpha > \;= \textstyle\sum_i |U_{\alpha i}|^2 m_i} \; (18)$$

d.h. gewichtete Mittelwerte der Masseneigenwerte m_i.

1.2 Spezialfälle mit 2 und 3 Neutrinogenerationen

1.2.1 Der einfachste Fall: $n = 2$

Häufig der Einfachheit halber benutzt zur ersten Interpretation der Experimente,

z.B. $\nu_e, \nu_\mu \longleftrightarrow \nu_1, \nu_2$.

Die reelle 2×2-Mischungsmatrix ist orthogonal (2D-Rotation) mit 1 Mischungswinkel $0 \leq \theta \leq \pi/2$ und ohne CP-verletzenden Phasenparameter:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{=U} \cdot \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}$$

Eine Oszillationsfrequenz: $\delta m^2 = m_1^2 - m_2^2,\ \Delta = \frac{\delta m^2}{2}\frac{L}{E} = 2\pi\nu_0 t.$

Übergangswahrscheinlichkeiten:

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathcal{P}(\nu_e \to \nu_e) = \mathcal{P}(\nu_\mu \to \nu_\mu) = \\ &\mathcal{P}(\overline{\nu}_e \to \overline{\nu}_e) = \mathcal{P}(\overline{\nu}_\mu \to \overline{\nu}_\mu) = \\ &= 1 - 4\cos^2\theta \sin^2\theta \cdot \sin^2\tfrac{\Delta}{2} = 1 - \sin^2 2\theta\ \sin^2\tfrac{\Delta}{2} \end{aligned}} \quad (19)$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathcal{P}(\nu_e \to \nu_\mu) = \mathcal{P}(\nu_\mu \to \nu_e) = \\ &\mathcal{P}(\overline{\nu}_e \to \overline{\nu}_m u) = \mathcal{P}(\overline{\nu}_\mu \to \overline{\nu}_e) = \\ &= \sin^2 2\theta\ \sin^2\tfrac{\Delta}{2} = 1 - \mathcal{P}(\nu_e \to \nu_e) \end{aligned}} \quad (20)$$