$\Longrightarrow$ Neutrino-Oszillationen treten auf, wenn $\theta \neq 0$, $\delta m^2 \neq 0$.

Maximale Mischung (Oszillationsamplitude der Übergangswahrscheinlichkeit) der Neutrinogenerationen für $\theta = 45°$, d.h. $\sin^2 2\theta = 1$.

Die zeitlich gemittelten Übergangswahrscheinlichkeiten sind mit

$< \sin^2 \frac{\Delta}{2} >_{0 \leq t \leq t_0} = \frac{1}{2}$:

$$\boxed{\begin{array}{l} < \mathcal{P}(\nu_\alpha \to \nu_\alpha) >= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\theta \\ < \mathcal{P}(\nu_\alpha \to \nu_\beta) >= \frac{1}{2}\sin^2 2\theta \end{array}} \quad (21)$$

$\Longrightarrow$ Messung des Mischungswinkels θ unabhängig von der Frequenz $\sim \delta m^2$.

Phase der Oszillationen:

$\Delta = (E_2 - E_1)t \overset{m_i \ll p_\nu}{\approx} \frac{m_2^2 - m_1^2}{2E} t = 2\pi\nu_0 t = 2\pi \frac{L}{L_0}$.

Oszillationsfrequenz: $\nu_0 = \frac{|m_2^2 - m_1^2|}{4\pi E}$.

Oszillationslänge: $L_0 = T_0 = \frac{1}{\nu_0}$.

Neutrinomassen bei 2 Generationen:

Masseneigenwerte: m_1, m_2.

Massenmatrix in Massendarstellung:

$$M^{(i)} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} = U^\dagger M^{(\alpha)} U$$

Massenmatrix in flavour-Darstellung:

$$\begin{aligned} M^{(\alpha)} &= U M^{(i)} U^\dagger \\ &= \begin{pmatrix} m_1 \cos^2\theta + m_2 \sin^2\theta & (m_2 - m_1)\sin\theta\cos\theta \\ (m_1 - m_2)\sin\theta\cos\theta & m_1 \sin^2\theta + m_2\cos^2\theta \end{pmatrix} \\ &=: \begin{pmatrix} m_e & m_{e\mu} \\ m_{e\mu} & m_\mu \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit der 2×2 Mischungsmatrix U.

Diagonalisieren der Massenmatrix $M^{(\alpha)}$ ergibt für die Masseneigenwerte:

$$\boxed{m_{1,2} = \tfrac{1}{2}\left[(m_e + m_\mu) \mp \sqrt{(m_\mu - m_e)^2 + 4m_{e\mu}^2}\right]} \quad (22)$$

Die Berechnung der Eigenvektoren nach $M\vec{t_i} = m_i \vec{t_i}$ ergibt die Beziehung

$$\boxed{\tan 2\theta = \tfrac{2m_{e\mu}}{m_\mu - m_e}.} \quad (23)$$

Formalismus benötigt bei der Behandlung von Neutrino-Oszillationen in Materie ($\longrightarrow$ Übung).

1.2.2 Der realistischere Fall $n = 3$:

ν_e, ν_μ, $\nu_\tau \longleftrightarrow \nu_1$, ν_2, ν_2

3×3-Mischungsmatrix mit

$\frac{1}{2}n(n-1) \quad\quad\quad = 3$ Eulerwinkeln θ_1, θ_2, θ_3 $(0 \leq \theta_i \leq \frac{\pi}{2})$,

$\frac{1}{2}(n-1)(n-2) = 1$ komplexen Phase $\delta \neq 0$ $(-\pi \leq \delta \leq +\pi)$.

$\delta \neq 0 \Longrightarrow$ CP-und T-Verletzung,

d.h. $\mathcal{P}(\nu_\alpha \to \nu_\beta) \overset{T}{\neq} \mathcal{P}(\nu_\beta \to \nu_\alpha) \overset{CP}{\neq} \mathcal{P}(\overline{\nu}_\alpha \to \overline{\nu}_\beta)$.

Aber es gilt das CPT-Theorem: $\mathcal{P}(\overline{\nu}_\alpha \to \overline{\nu}_\beta) = \mathcal{P}(\nu_\beta \to \nu_\alpha)$.

CP-Verletzung ist nur sichtbar in zeitabhängigen Messungen; siehe (10).

Neutrino-Mischungsmatrix in der Kobayashi-Maskawa-Parametrisierung:

$$
\begin{aligned}
V_{CKM} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \\
&\cdot \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \\
&\cdot \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
= \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -s_{23}c_{12} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}
$$

mit $s_i := \sin\theta_i$ und $c_i := \cos\theta_i$ (Mischungswinkel).

NB:

Die Mischungsmatrix entspricht der Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM)-Matrix, die Mischung der drei Quark-Generationen beschreibt, konkret die Mischung zwischen den Eigenzuständen (d', s', b') der schwachen WW und den Massen- und flavour-Eigenzustaänden (d, s, b) der down-artigen Quarks.

Die CKM-Mischungsmatrix ist der Ursprung der beobachteten CP-Verletzung bei Kaon-Zerfällen, $K^0\overline{K}^0$-Mischung und, vermutlich, bei B-Mesonzerfällen, $B^0\overline{B}^0$-Mischung.