Parametrisierungen der Neutrino-Mischungsmatrix:

Kobayashi-Maskawa-Parametrisierung mit den Eulerwinkeln θ_i für Rotationen im dreidimensionalen Raum (o.E.d.A. $0 \leq \theta_i \leq \frac{\pi}{2}$) und einem komplexen Phasenfaktor δ (Konvention: $-\pi \leq \delta \leq +\pi$):

$$
\begin{aligned}
U &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & s_2 \\ 0 & -s_2 & c_2 \end{pmatrix} \\
&\cdot \begin{pmatrix} c_1 & s_1 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\delta} \end{pmatrix} \\
&\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & s_3 \\ 0 & -s_3 & c_3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
= \begin{pmatrix} c_1 & s_1 c_3 & s_1 s_3 \\ -s_1 c_2 & c_1 c_2 c_3 - s_2 s_3 e^{i\delta} & c_1 c_2 s_3 + s_2 c_3 e^{i\delta} \\ s_1 s_2 & -c_1 s_2 c_3 - c_2 s_3 e^{i\delta} & -c_1 s_2 s_3 + c_2 c_3 e^{i\delta} \end{pmatrix}
$$

mit $s_i := \sin\theta_i$ und $c_i := \cos\theta_i$.

Intuitiver:

Mit den Generationsmischungswinkeln θ_{kl} $(0 \leq \theta_{kl} \leq \frac{\pi}{2}$, $k,l = 1,2,3)$ und der komplexen Phase δ $(-\pi \leq \delta \leq +\pi)$:

$$
\begin{aligned}
U \quad = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \\
\cdot & \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \\
\cdot & \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
= \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -s_{23}c_{12} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}
$$

mit $s_{kl} := \sin\theta_{kl}$ und $c_{kl} := \cos\theta_{kl}$.

Interessante Grenzfälle:

1. Falls Außerdiagonalelemente der Neutrino-Mischungsmatrix $\ll$ Diagonalelemente (≈ 1) (wie bei der Kobayash-Maskawa-Mischungsmatrix der Quarks), dann gilt:

   ν_1 dominiert in ν_e, ν_2 dominiert in ν_μ und ν_3 dominiert in ν_τ,

   d.h. nach (18) ist

   $m_e \approx m_1$, $m_\mu \approx m_2$ und $m_\tau \approx m_3$

   (dominante Masseneigenzustände mit $|U_{\alpha i}| \approx 1$).

2. Falls z.B. $m_1 \approx m_2 \ll m_3$, d.h.

   $|\delta m_{12}^2| \ll |\delta m_{13}^2| \approx |\delta m_{23}^2| =: \delta m^2$ und

   $\Delta_{13} \approx \Delta_{23} =: \Delta = \frac{\delta m^2}{2} \frac{L}{E}$, $\Delta_{12} \approx 0$

   gilt nach (13) für den dominanten Übergang:

$$\mathcal{P}(\nu_e \to \nu_\mu) \approx 4U_{e3}^2 U_{\mu 3}^2 \sin^2 \frac{\Delta}{2},$$

   der durch Mischung mit dem dritten Masseneigenzustand stattfindet ('indirekte' Neutrino-Oszillation).

2. Suche nach Neutrino-Oszillationen

2.1 Experimentelle Gesichtspunkte

Ziele:

1. Nachweis von Neutrino-Oszillationen $\Longrightarrow$ Neutrinomassen.

2. Messung der Mischungswinkel θ_i (Oszillationsamplituden) und der Massenquadratdifferenzen δm_{ij}^2 (Oszillationsfrequenzen).

Typisches Neutrino-Oszillationsexperiment:

ν-Quelle:
erzeugt bekannten
flavour ν_α
bei $t = 0$

$\longrightarrow$

ν-Detektor:
mißt
Zustand $\nu(t)$
bei $L = ct$

$$\nu(t) = \sum_{i,\beta} U_{\alpha i} U^*_{\beta i} e^{-iE_i t} |\nu_\beta >$$

Messung von ν-flavour und ν-Energie im Abstand $L = ct$.

Zwei experimentelle Optionen (Klassifizierung der Experimente):

1. 'Disappearance'-Experimente

Nachweis des **gleichen** Neutrinoflavours ν_α im Detektor, wie in der Quelle erzeugt.

Messung des ν_α-Neutrinoflusses (=Neutrinorate/Flächeneinheit) im Detektor bei bestimmter Energie (Neutrinoenergiespektrum):

Überlebenswahrscheinlichkeit $\mathcal{P}(\nu_\alpha \to \nu_\alpha; L)$

bzw.

Wahrscheinlichkeit für das **Verschwinden** von ν_α (d.h. Umwandlung in einen nichtidentifizierten anderen flavour ν_X)

$$\mathcal{P}(\nu_\alpha \to \nu_X \neq \nu_\alpha; L) \equiv 1 - \mathcal{P}(\nu_\alpha \to \nu_\alpha; L)$$

Die Messung verlangt

- genaue Kenntnis des Neutrinoflußes an der Quelle oder
- Messung des Neutrinoflußes in mehreren Abständen zur Quelle.

2. 'Appearance'-Experimente

Nachweis eines **anderen** Neutrinoflavours $\nu_\beta \neq \nu_\alpha$ im Detektor, als in der Quelle erzeugt.

Messung der

Wahrscheinlichkeit für das **Erscheinen** eines neuen flavours ν_β

$$\mathcal{P}(\nu_\alpha \to \nu_\beta; L)$$

Die Messung verlangt

- eine geringe Verunreinigung der Quelle mit ν_β
- (oder die genaue Kenntnis der ν-flavour-Zusammensetzung der Quelle).

Experimentelle Empfindlichkeit für ν-Oszillationen:

Entscheidend ist der Oszillationsterm (für jede Oszillationskomponente):

$$S := \sin^2 \frac{\Delta}{2} = \sin^2 \left[\frac{\delta m^2}{4} \frac{L}{E} \right]$$

Drei Bereiche können unterschieden werden:

a) $S \approx 0$ für $\frac{L}{E} \ll \frac{4}{\delta m^2}$ oder $L \ll L_0 = \frac{4E}{\delta m^2}$

$\Longrightarrow$ keine Sensitivität für Neutrino-Oszillationen

b) $\Longrightarrow$ Bedingung für Sensitivität:

$$\frac{L \ [\mathrm{m}]}{E \ [\mathrm{MeV}]} \geq \frac{1}{\delta m^2 \ [\mathrm{eV}^2]}$$

oder minimale noch nachweisbare Massenquadratdifferenz

$$\delta m^2_{\mathrm{min}} \approx \frac{E \ [\mathrm{MeV}]}{L \ [\mathrm{m}]} \ \mathrm{eV}^2$$

$\Longrightarrow$ große Abstände L Quelle–Detektor und kleine ν-Energie erhöhen die Sensitivität für kleine Massendifferenzen.

Aber: der ν-Fluß nimmt mit der Entfernung von der Quelle (isotrop oder divergenter Strahl) ab.

c) Falls $\frac{L}{E} \gg \frac{4}{\delta m^2}$, d.h. $L \gg L_0$

$\Longrightarrow$ viele Oszillationen zwischen Quelle und Detektor

$\Longrightarrow$ $\frac{L}{E}$ muß sehr genau gemessen werden, um die Oszillationen auflösen zu können, oder man kann nur die mittleren Übergangswahrscheinlichkeiten

$$
\begin{aligned}
< \mathcal{P}(\alpha \to \beta) > &= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta \text{ bzw.} \\
< \mathcal{P}(\alpha \to \beta \neq \alpha) > &= \frac{1}{2} \sin^2 \theta
\end{aligned}
$$

messen, d.h. nur die Amplitude (θ) und nicht die Frequenz ($\sim \delta m^2$) der Oszillationen.

Das Verhältnis $\frac{L}{E}$ bestimmt die Sensitivität der Experimente für die Messung kleiner δm^2.

Neutrinoquellen für Oszillationsexperimente:

1. Kernreaktoren:

   Erzeugung niederenergetischer Anti-Elektronneutrinos $\overline{\nu}_e$ aus nuklearen β^--Zerfällen: $n \to pe^-\overline{\nu}_e$.

   Hoher $\overline{\nu}_e$-Fluß, aber abnehmend $\sim \frac{1}{L^2}$ (isotrope Erzeugung).

2. Hochenergiebeschleuniger:

   Erzeugung hochenergetischer Myonneutrinos und -antineutrinos ν_μ, $\overline{\nu}_\mu$ aus Pion- und Kaon-Zerfällen im Flug:

$$\mathrm{p_{Beschl.}\, N_{Target} \to (\pi,\ K) + X}$$

$$\pi^+,\ K^+ \to \mu^+\nu_\mu;\ \ \pi^-,\ K^- \to \mu^-\overline{\nu}_\mu$$

   (Die Zerfälle $\pi,\ K \to e\nu_e$ sind wegen Drehimpulserhaltung $\sim \frac{m_e^2}{m_\mu^2}$ unterdrückt.)

   $\Longrightarrow$ Neutrinostrahlen relativ hoher Intensität durch Bündelung bei hoher Energie und hohe π, K-Produktionsrate (Multiplizität).

   Außerdem: ν-Reaktionsrate im Detektor $\sim \sigma(\nu N) \sim E_\nu$.

3. Niederenergiebeschleuniger (sog. ‘Meson-Fabriken’):

Erzeugung niederenergetischer Myonneutrinos und -antineutrinos ν_μ, $\overline{\nu}_\mu$ aus Pion- und Kaon-Zerfällen in Ruhe.

$\Longrightarrow$ Zerfallsort (und evtl. Zerfallszeit) relativ genau bekannt.

4. Atmosphärische Neutrinos:

Elektron- und Myonneutrinos ν_e, $\overline{\nu}_e$, ν_μ, $\overline{\nu}_\mu$ aus Kernreaktionen kosmischer Strahlung (vor allem Protonen, auch Kerne bis Fe) in der Erdatmosphäre. Die lawinenartigen Folgereaktionen lösen große Teilchenschauer mit vielen erzeugten Teilchen (‘Luftschauer’) aus:

$$\mathrm{p_{kosm.}\ N_{Atm.}} \rightarrow \mathrm{viele}\ \pi^{\pm}\mathrm{K}^{\pm} + \mathrm{X}$$

$$\pi^+,\ K^+ \rightarrow \mu^+\nu_\mu;\ \ \pi^-,\ K^- \rightarrow \mu^-\overline{\nu}_\mu$$

$$\mu^+ \rightarrow e^+\nu_e\overline{\nu}_\mu;\ \ \mu^- \rightarrow e^-\overline{\nu}_e\nu_\mu$$

5. Sonnenneutrinos:

Elektronneutrinos ν_e aus den Kernfusionsreaktionen in der Sonne.

Bei der berechneten Temperatur von $T = 15.6 \cdot 10^6$ K im Zentrum der Sonne (Sonnenmodelle) werden 98.4% der Sonnenenergie durch Proton-Proton-Fusion erzeugt, mit der Summenreaktion:

$$4p \rightarrow He^4 + 2e^+ + 2\nu_e$$

$\Longrightarrow$ Lange Distanzen in Materie (Sonne und Erde) und Vakuum vom Sonnenzentrum zur Erde.

$\Longrightarrow$ Empfindlichkeit bis zu sehr kleinen Massenquadrat-differenzen.

Grenzen der Meßgenauigkeit von $\frac{L}{E}$:

1. L ungenau bekannt:

- Ausgedehnte Neutrinoquellen,
  z.B. Sonne, Erdatmosphäre.
- Schlecht lokalisierter Zerfallsort in Neutrinos:
  Zerfallsstrecke der Pionen und Kaonen bei Experimenten an Hochenergiebeschleunigern.
- Schlecht lokalisierter Nachweisort der Neutrinos im Detektor:
  große Detektorvolumina benötigt für Neutrinonachweis.

2. E ungenau bekannt:

Im allgemeinen nur ν-Energieverteilungen (Spektren) $dN(E)/dE$ von der Quelle, keine festen ν-Energien.

$\Longrightarrow$ Vergleich der E_ν-Spektren der Quelle und im Detektor bzw. bei verschiedenen Abständen Quelle–Detektor Messung der gewichteten Übergangswahrscheinlichkeiten

$$\int \left(\frac{dN(E)}{dE}\right)_{\mathrm{Quelle}} \mathcal{P}(\alpha \to \beta; t, E)dE$$

zur Bestimmung der Oszillationsparameter.

Begrenzung: E_ν-Meßgenauigkeit des Detektors.

1. Mechanismus der Neutrino-Oszillationen

1.3 Neutrino-Oszillationen in Materie

Erstmals untersucht von

Wolfenstein (1978):

Andere Oszillationsfrequenzen und -amplituden als im Vakuum.

Mikheyev und Smirnov (1985):

Verstärkung von ν-Oszillationen in Materie, Resonanzkonversion der ν-flavours in kontinuierlich veränderlicher Materiedichte (z.B. in der Sonne).

$\longrightarrow$ MSW-Effekt

$\Longrightarrow$ Neue, bevorzugte Erklärung für das sog. 'Solare Neutrinodefizit'.

Was ist neu für Neutrinos in Materie?

Bei den relativ niedrigen Energien der Neutrinos aus der Kernfusion im Sonnenzentrum,

$E_\nu \leq \ 0.42$ MeV (pp-Fusion),

$E_\nu \leq 14.6$ MeV (B^8-Fusion),

$E_\nu \leq 18.8$ MeV (hep-Fusion),

ist Materie transparent für Neutrinos,

es findet nur elastische Vorwärtsstreuung an Elektronen statt:

$\nu_e \, e^- \rightarrow \nu_e \, e^-$

Die schwache Wechselwirkung führt zu einem effektiven Brechungsindex für Neutrinos in Materie,

wie bei der elastischen Streuung von Licht in Glas etc.,

wobei die WW und damit der Brechungsindex für ν_e und ν_μ verschieden ist: $n_e \neq n_\mu$.