Stationäre Lösungen der näherungsweisen Bewegungsgleichung

$$\boxed{i\frac{\partial}{\partial t}|\nu_i(t)> = H_{ij}^{(i)}|\nu_j(t)> = \left(E + \frac{m_i^2}{2E}\right)\delta_{ij}|\nu_j(t)>} \quad (6)$$

sind die Masseneigenzustände der Neutrinos (5):

$$|\nu_i(t)> = e^{-iE_it}|\nu_i(0)> = e^{-i(E+m_i^2/2E)t}|\nu_i(0)> .$$

Nach Neudefinition der komplexen Phasen der Massenzustände (mit $E \approx p \approx \mathrm{const.}$),

$$|\nu_i> \longrightarrow e^{iEt}|\nu_i> = e^{-i(m_i^2/2E)t}|\nu_i>,$$

ist der effektive Hamiltonoperator mit Massenmatrix M:

$$H = E + \frac{M^2}{2E} \longrightarrow H = \frac{M^2}{2E}.$$

Im folgenden wird der Einfachheit halber der Fall $n = 2$ betrachtet, der zum Verständnis des MSW-Effekts vollkommen ausreicht.

Mischungsmatrix U (reell, orthogonal):

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{=U} \cdot \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}$$

Im Vakuum gilt (zur Erinnerung):

Hamiltonoperator in der Massendarstellung:
$H^{(i)}_{ij} =< \nu_i|H|\nu_j >$:

$$\boxed{H^{(i)} = \frac{1}{2E} \begin{pmatrix} m_1^2 & 0 \\ 0 & m_2^2 \end{pmatrix}} \quad (24)$$

und in der ν-flavour-Darstellung:
$H^{(\alpha)}_{\alpha\beta} =< \nu_\alpha|H|\nu_\beta >$:

$$\boxed{H^{(\alpha)} = \frac{1}{2E} \begin{pmatrix} m_e^2 & m_{e\mu}^2 \\ m_{e\mu}^2 & m_\mu^2 \end{pmatrix} = U H^{(i)} U^\dagger} \quad (25)$$

(hermitisch: reell, symmetrisch).

Damit ist

$$
\begin{aligned}
H^{(\alpha)} &= \frac{1}{2E}\begin{pmatrix} m_1^2\cos^2\theta + m_2^2\sin^2\theta & (m_2^2-m_1^2)\sin\theta\cos\theta \\ (m_2^2-m_1^2)\sin\theta\cos\theta & m_1^2\sin^2\theta + m_2^2\cos^2\theta \end{pmatrix} \\
&\equiv \frac{1}{4E}(m_1^2+m_2^2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&+ \frac{1}{4E}\underbrace{(m_2^2-m_1^2)}_{=\delta m^2 =: D}\begin{pmatrix} -\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} \qquad (26)
\end{aligned}
$$

mit $\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta) = \sin^2\theta$ und $2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$.

In Materie:

Die schwache Wechselwirkung der Neutrinos mit Elektronen führt zu einem zusätzlichen effektiven Potential V in der Hamiltonfunktion:

$$H \longrightarrow H_m = H + V = \frac{M^2}{2E} + V$$

mit

$$V_{\alpha\beta}^{(\alpha)} =< \nu_\alpha e^- | H_{WW} | \nu_\alpha e^- > \delta_{\alpha\beta},$$

diagonal in der flavour-Darstellung (Eigenzustände der schwachen WW), d.h. für $n = 2$:

$$V^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} V_e & 0 \\ 0 & V_\mu \end{pmatrix}$$

und nach globaler Phasentransformation der flavour-Zustände, $|\nu_\alpha >\to e^{iV_\mu t}|\nu_\alpha >$:

$$V^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} V_e - V_\mu & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =: \frac{1}{2E} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Der Unterschied in der schwachen WW von ν_e und ν_μ kommt vom Beitrag der geladenen Stromwechselwirkung (Charged Currents, CC) der ν_e, der berechnet werden kann:

$$\boxed{V_e - V_\mu =< \nu_\alpha e^- | H_{WW}^{CC} | \nu_\alpha e^- >\equiv \frac{A}{2E} = \sqrt{2} G_F N_e} \quad (27)$$

d.h. $$\boxed{A = 2\sqrt{2} G_F E N_e = 2\sqrt{2} G_F E \frac{Y_e \rho}{m_N}} \quad (28)$$

mit

$$\begin{aligned} G_F = & \quad \text{Fermi-Kopplungskonstante der schwachen WW} \\ = & \quad 1.1664 \cdot 10^{-5}\ \text{GeV}^{-2}, \\ N_e = & \quad \text{Elektrondichte der Materie} =: \frac{Y_e \rho}{m_N}, \\ Y_e = & \quad \text{Zahl der Elektronen/Nukleon}, \\ \rho = & \quad \text{Massendichte der Materie}, \\ m_N = & \quad \text{Nukleonmasse (Proton, Neutron)} \approx m_p = 938\ \text{MeV}. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\boxed{A = 1.52 \cdot 10^{-7} \cdot E[\mathrm{MeV}] \cdot Y_e \rho [\mathrm{g/cm^3}]\ \mathrm{eV}^2.} \quad (29)$$

Im allgemeinen gilt, insbesondere für die Sonnenmaterie: $N_e \approx N_p \approx N_n$ (elektrisch neutral, Isospinsymmetrie der Kernmaterie), d.h. $Y_e \approx \frac{1}{2}$.

Für Antineutrinos gilt: $A \longrightarrow -A$.

Damit ist der Hamiltonoperator in Materie in der flavour-Darstellung (nach (26)):

$$
\begin{aligned}
H_m^{(\alpha)} &= H^{(\alpha)} + \frac{1}{2E}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2E}\begin{pmatrix} m_e^2 + A & m_{e\mu}^2 \\ m_{e\mu}^2 & m_\mu^2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2E}(m_1^2 + m_2^2 + A)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&+ \frac{1}{2E}\begin{pmatrix} A - D\cos 2\theta & D\sin 2\theta \\ D\sin 2\theta & -A + D\cos 2\theta \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{30}
$$

und in der Vakuum-Massendarstellung:

$$
\begin{aligned}
H_m^{(i)} &= U^\dagger H_m^{(\alpha)} U = H^{(i)} + \frac{1}{2E} U^\dagger \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U \\
&= \frac{1}{2E}\begin{pmatrix} m_1^2 + A\cos^2\theta & A\sin\theta\cos\theta \\ A\sin\theta\cos\theta & m_2^2 + A\sin^2\theta \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{31}
$$

d.h. nicht-diagonal in Materie!

$\Longrightarrow$ Die Masseneigenzustände im Vakuum (ν_1, ν_2) sind keine Masseneigenzustände in Materie (ν_{1m}, ν_{2m}).

$\Longrightarrow$ es werden zusätzlich Übergänge $\nu_1 \longleftrightarrow \nu_2$ bzw. $\nu_e \longleftrightarrow \nu_\mu$ durch die schwache WW in Materie induziert.

Man erhält die ν-Masseneigenzustände ν_{im} und die effektiven ν-Masseneigenwerte m_{im} in Materie durch simultanes Diagonalisieren des Hamiltonoperators $H_m^{(\alpha)} =: M_m^{(\alpha)2}/2E$ in (30) und der entsprechenden Massenmatrix $M_m^{(\alpha)}$ in der flavour-Darstellung,

d.h. durch Lösen der Eigenwertgleichung

$$U_m^\dagger H_m^{(\alpha)} U_m = H_m^{(m)} = \frac{1}{2E} M_m^{(m)2} := \frac{1}{2E} \begin{pmatrix} m_{1m}^2 & 0 \\ 0 & m_{2m}^2 \end{pmatrix}$$

mit dem Hamiltonoperator $H_m^{(m)}$ und der effektiven Massenmatrix $M_m^{(m)}$ in der Materie-Massendarstellung und einer orthogonalen Transformation U_m, $U_m^{-1} = U_m^T$,

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta_m & \sin\theta_m \\ -\sin\theta_m & \cos\theta_m \end{pmatrix}}_{=U_m} \cdot \begin{pmatrix} \nu_{1m} \\ \nu_{2m} \end{pmatrix}, \qquad (32)$$

$$\begin{pmatrix} \nu_{1m} \\ \nu_{2m} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta_m & -\sin\theta_m \\ \sin\theta_m & \cos\theta_m \end{pmatrix}}_{=U_m} \cdot \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix}, \qquad (32')$$

zwischen den flavour-Zuständen und den Materie-Massenzuständen.

Mit $H_m^{(\alpha)}$ (30) sind die Masseneigenwerte (zum Quadrat!) wie in der allgemeinen Beziehung (22):

$$\boxed{m_{1,2m}^2 = \frac{1}{2}\left[(m_1^2 + m_2^2 + A) \mp \sqrt{(A - D\cos 2\theta)^2 + D^2 \sin^2 2\theta}\;\right]} \tag{33}$$

Wie in (23) erhält man aus (30) für den neuen Materie-Mischungswinkel θ_m als Funktion des Vakuum-Mischungswinkels:

$$\boxed{\tan 2\theta_m(A/D) = \frac{2D\sin 2\theta}{-A+D\cos 2\theta - A + D\cos 2\theta} = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta - \frac{A}{D}}} \tag{34}$$

Die Amplitude der Übergangswahrscheinlichkeit in Materie ist damit

$$\boxed{\sin^2 2\theta_m(A/D) = \frac{\tan^2 2\theta_m}{1+\tan^2 2\theta_m} = \frac{\sin 2\theta}{(\frac{A}{D} - cos 2\theta)^2 + \sin^2 2\theta}} \tag{35}$$

'Breit-Wigner' <u>Resonanzkurve</u> als Funktion von A/D.

Die Neutrino-Massenaufspaltung in Materie ist nach (33):

$$\boxed{D_m \equiv m_{2m}^2 - m_{1m}^2 = D\sqrt{(\frac{A}{D} - \cos 2\theta)^2 + \sin^2 2\theta}\; > 0} \tag{36}$$

Mit $\Delta_m := \frac{D_m}{2}\frac{L}{E}$ ist die zeitabhängige ($L = t$) Übergangswahrscheinlichkeit:

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathcal{P}(\nu_e \to \nu_e) = 1 - \sin^2 2\theta_m \sin^2 \frac{\Delta_m}{2} \\ \mathcal{P}(\nu_e \to \nu_\mu) = \sin^2 2\theta_m \sin^2 \frac{\Delta_m}{2} \end{array}} \quad (37)$$

Maximale Amplitude (Mischung) tritt auf bei $\theta_m = 45°$, dem Resonanzwert, der für jeden Vakuum-Mischungswinkel θ bei geeignetem Verhältnis

$$\frac{A}{D} = \frac{2\sqrt{2}G_F E N_e}{\delta m^2}$$

erreicht werden kann.

Die Oszillationslänge L_m in Materie ist im Vergleich zur Vakuum-Oszillationslänge L_0:

$$\boxed{L_m \equiv \frac{4\pi E}{D_m} \overset{(36)}{=} \frac{L_0}{\sqrt{(\frac{A}{D} - \cos 2\theta)^2 + \sin^2 2\theta}} \overset{(35)}{=} \frac{\sin 2\theta_m}{\sin 2\theta} \cdot L_0} \quad (38)$$

Für Antineutrinos ($A \to -A$) tritt <u>keine</u> Resonanz auf, falls sie für Neutrinos existiert und umgekehrt.

Bei den Sonnenneutrinos handelt es sich um ν_e, nicht $\overline{\nu_e}$.