

3. Suche nach Erweiterungen des Standardmodells

3.1 Ungelöste Fragen im Standardmodell

1. Existiert das Higgs-Boson als elementares Teilchen?

Dynamischer Mechanismus der Eichsymmetriebrechung?

—→ Substruktur des Higgs-Bosons mit neuer starker Wechselwirkung?

(Analogie zu den Cooper-Paaren ('Higgs-Feld') im Supraleiter.)

2. Ursache der Paritätsverletzung?

z.B. durch spontane Symmetriebrechung in einer links-rechts-symmetrischen Theorie?

3. Erklärung der Paarung der $SU(2)_L$ -Doublets von Quarks und Leptonen ($\implies$ Renormierbarkeit der schwachen WW!),

Verknüpfung zwischen elektrischer Ladung und Farbquantenzahl, zwischen Quarks und Leptonen?

—→ Vereinheitlichung der Eichwechselwirkungen: Grand Unified Theories (GUT)?

4. Erklärung der Quantisierung der elektrischen Ladung:

$Q_e = -Q_p$ mit einer Genauigkeit von 10^{-21} .

Warum ist $Q_d = \frac{1}{3}Q_e$ und $Q_\nu + Q_e + 3Q_u + 3Q_d = 0$?

→ Vereinheitlichung der Eichwechselwirkungen: GUTs.

5. Warum nur 3 Generationen von Quarks und Leptonen?

(Minimum für CP-Verletzung durch eine komplexe Mischungsmatrix.)

Hierarchie der Fermion-Massen und -Mischungswinkel.

→ Substruktur der Quarks und Leptonen und evtl. der Eichbosonen mit neuer starker (Eich-) Wechselwirkung?

6. Warum sind die Neutrinomassen so klein?

→ Vereinheitlichung der Eichwechselwirkungen, GUTs.

7. Ursprung der CP-Verletzung, die für die Existenz von Materie im Universum (Baryon-Antibaryon-Asymmetrie) notwendig ist?

(Sacharov 1967).

Der Effekt der CP-Verletzung im Standardmodell allein ist dafür zu klein.

→ Vereinheitlichung der Eichwechselwirkungen, GUTs.

8. 25 freie Parameter des Standardmodells:

- 3 Eichkopplungskonstanten: e , g_w , g_s oder α , $\sin^2 \theta_W$, α_s ($g = e / \sin \theta_W$, $g' = e / \cos \theta_W$).
- 6 Lepton- und 6 Quark-Massen (Yukawa-Kopplungen).
- Je 4 Parameter der Mischungsmatrizen für Quarks und Leptonen.
- Masse und Selbstkopplungskonstante des Higgs-Bosons (allgemein: Parameter des Higgs-Potentials bzw. des elektroschwachen Phasenübergangs).

—> Substruktur der Quarks und Leptonen und/oder GUTs.

9. Stabilisierung der Higgsboson-Masse bei $\leq 1 \text{ TeV}$ unter Strahlungskorrekturen?

—> Supersymmetrie zwischen Fermionen und Bosonen.

10. Ursprung der 'Dunklen Materie' im Weltall?

99% der Materie im Universum ist nicht sichtbar!

—> Supersymmetrie zwischen Fermionen und Bosonen.

11. Ursprung der dunklen Energie?

Warum ist der Effekt so klein?

12. Quantentheorie der Gravitation?

Verbindung der Gravitation mit den anderen fundamentalen Wechselwirkungen?

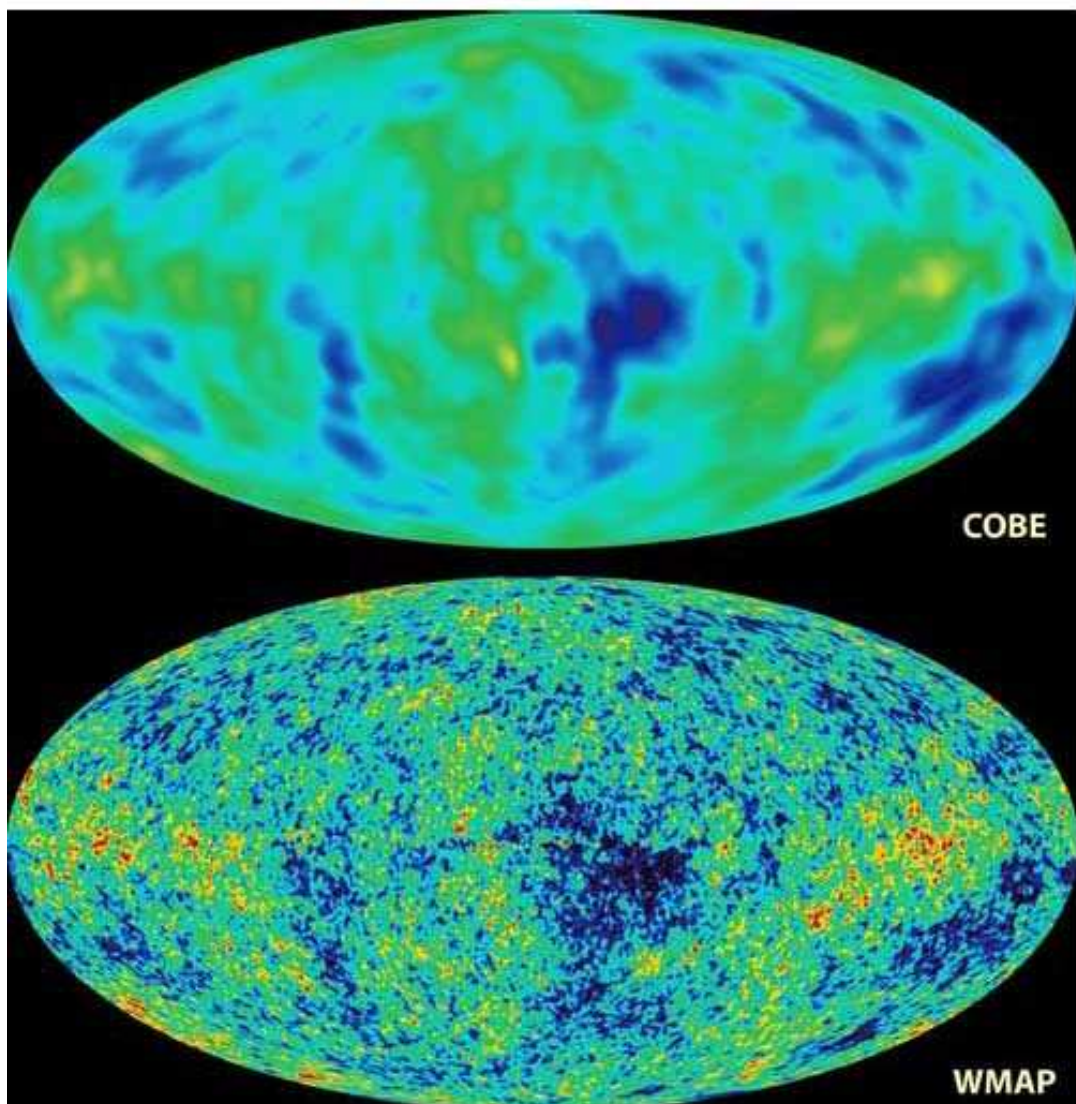
—> Supersymmetrie, Superstrings?

Materiezusammensetzung des Universums:

$\Omega = \text{Energiedichte/kritische Dichte}$

Beobachtungen (Präzisionsmessungen!):

- Isotropie der kosmischen Mikrowellen-Hintergrundstrahlung (COBE, WMAP Satelliten)
 $\implies$ Inflationsphase (exponentielle Expansion) im frühen Universum $\implies \Omega_{\text{tot}} = 1$
(flaches Universum, Grenzfall zwischen offenem und geschlossenem Universum).

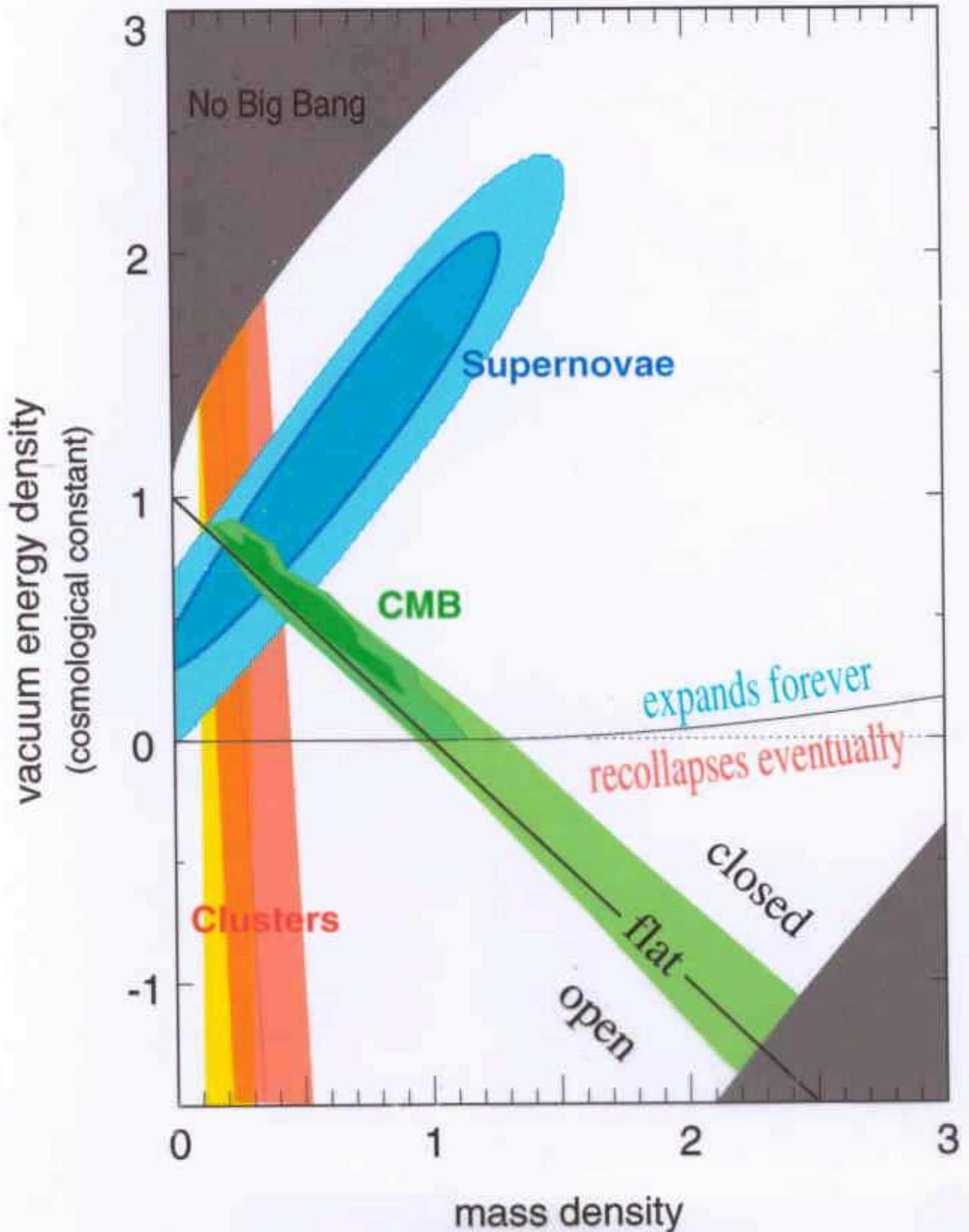


- **Materiedichte $\Omega_M \approx 30\%$**
(Gravitationseffekte: Galaxienbewegung, Gravitationslinsen, langreichweitige Struktur des Universums).
 - Davon **baryonische Materie (Elemente): $\Omega_B \approx 5\%$**
(Nukleosynthese).
 - Davon **sichtbare Materie (Sterne): $\Omega_{\text{lum}} \approx 0.4\%$** .
- ⇒ Nicht-baryonische, **“dunkle Materie”**: $\Omega_{DM} \approx 25\%$
(massive Neutrinos, Axionen, SUSY-Teilchen,...?).
- **“Dunkle Energie”**: $\Omega_\Lambda \approx 70\%$
(entspricht einer positiven kosmologischen Konstanten Λ , globalem Druck, “Antigravitation”, in der Allg. Relativitätstheorie) zur Erklärung der beobachteten beschleunigten Expansion des Universums (Supernova-Rotverschiebung).
Ursprung in der Vakuumenergie der Quantenfeldtheorie oder der Stringtheorie: ergibt etwa **120–128 Größenordnungen** zu großen Wert! Erklärung?

Perlmutter, et al. (1999)

Jaffe et al. (2000)

Bahcall and Fan (1998)



3.2 Vereinheitlichung der Wechselwirkungen

Vereinheitlichung der Eichwechselwirkungen des Standardmodells durch Einbettung in eine größere einfache Eichgruppe G mit einer einzigen Kopplungskonstanten (**Grand Unified Theories, GUTs**):

$$G \supset SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y.$$

Das Standardmodell ist eine effektive Theorie bei niedrigen Energien nach spontaner Symmetriebrechung der Eichsymmetrien:

$$G \xrightarrow{M_{GUT}} SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y \xrightarrow{M_{\text{el.schw.}}} SU(3)_C \otimes U(1)_Q.$$

Die **Vereinheitlichungsskala**, bei der alle Wechselwirkungen gleich stark werden (gemeinsame Kopplungskonstante) kann im Standardmodell berechnet werden: $M_{GUT} \approx 10^{15} \text{ GeV}$.

(vergleiche die Skala der elektroschwachen Symmetriebrechung: $M_{\text{el.schw.}} \approx \frac{v}{\sqrt{2}} \approx M_W$).

3.2.1 Das $SU(5)$ -Modell:

Die kleinste einfache Lie-Gruppe, die die Eichgruppen des Standardmodells als Untergruppen enthält ist $SU(5)$,

mit $n^2 - 1 = 24$ Generatoren T^a und 24 Eichfeldern $V_\mu^a(x)$ ($a = 1, \dots, 24$), von denen nur 12 schon im Standardmodell enthalten sind (8 Gluonen, $W^\pm$, Z^0 , γ):

$$\mathcal{L}_{SU(5)} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} + \bar{\psi} i \gamma^\mu D_\mu \psi_f;$$

$$D_\mu = \partial_\mu - i g_5 T^a V_\mu^a.$$

Die fundamentale Darstellung hat die Dimension $n = 5$ und ist komplex: d.h. es gibt zwei verschiedene 5, 5^* .

Um alle 15 Fermion-Zustände der ersten Generation des SM in $SU(5)$ -Multipletts unterzubringen, wird zusätzlich die 10-dim. irreduzible Darstellung 10 benötigt:

d.h. reduzible Darstellung der SM-Teilchen $5^* + 10$ (zusammen Renormierbarkeit in der $SU(5)$ -Eichtheorie).

Zerlegung in irreduzible $(SU(3)_C, SU(2)_L)$ -Darstellungen ergibt ($i = r, g, b$):

$$5_L = \underbrace{(3, 1)}_{\bar{d}_{iL}} + \underbrace{(1, 2)}_{(\nu_e, e^-)_L} \quad \text{und} \quad 5_R^* = \underbrace{(3^*, 1)}_{d_{iR}} + \underbrace{(1, 2)}_{(\bar{\nu}_e, e^+)_R}.$$

$$10_L = \underbrace{(3, 2)}_{(u_i, d_i)_L} + \underbrace{(3^*, 1)}_{\bar{u}_{iL}} + \underbrace{(1, 1)}_{e_L^+}.$$

Das fundamentale $SU(5)$ -Multipllett enthält die Zustände:

$$5 : \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \\ \bar{d}_r \\ \bar{d}_g \\ \bar{d}_b \end{pmatrix}_L \quad \begin{matrix} Q \\ 0 \\ -1 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{matrix} \quad \begin{matrix} Y \\ -1 \\ -1 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{matrix} \quad \begin{matrix} I^0 \\ +\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

$\Rightarrow$ Leptonen und Quarks in Multipletts der Eichgruppe vereinigt

(mit gleichen Helizitäten: Drehimpulserhaltung, $[\vec{J}, T_a] = 0$).

$\Rightarrow$ da für $SU(n)$ -Generatoren, wie Q , die Spur $\equiv 0$, gilt z.B. in der 5-Darstellung:

$$Q(\nu_e) + Q(e^-) + 3 \cdot Q(\bar{d}) = 0 - 1 + 3 \cdot \frac{1}{3} = 0,$$

d.h. die $SU(5)$ -Symmetrie verlangt $Q(\bar{d}) = +\frac{1}{3}$!

Verknüpfung zwischen drittelzahligen Quarkladungen und Zahl der Farben. Garantiert Anomaliefreiheit (Renormierbarkeit) des Standardmodells.

Erklärung für die exakte Ladungsquantisierung:

$$Q(e^-) \equiv -Q(p) \text{ (neutrale Atome).}$$

⇒ Kein Platz für rechtshändige Neutrinos; d.h. Vorhersage masseloser Neutrinos.

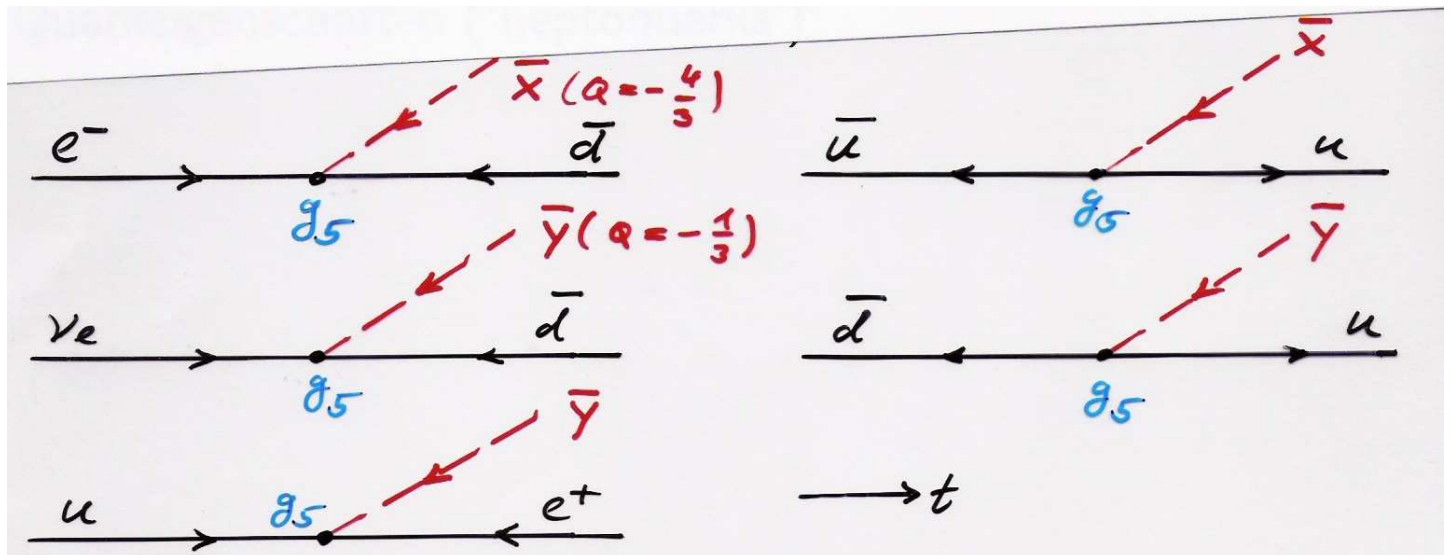
Die $SU(5)$ -Eichbosonen füllen die 24-dimensionale adjungierte Darstellung, ausgedrückt durch die Darstellungen der Untergruppen ($SU_C(3), SU_L(2)$):

$$24 = \underbrace{(8, 1)}_{\text{Gluonen}} + \underbrace{(1, 3)}_{W_{1,2,3}} + \underbrace{(1, 1)}_B + \underbrace{(3^*, 2)}_{(X,Y)} + \underbrace{(3, 2)}_{(\bar{X}, \bar{Y})}.$$

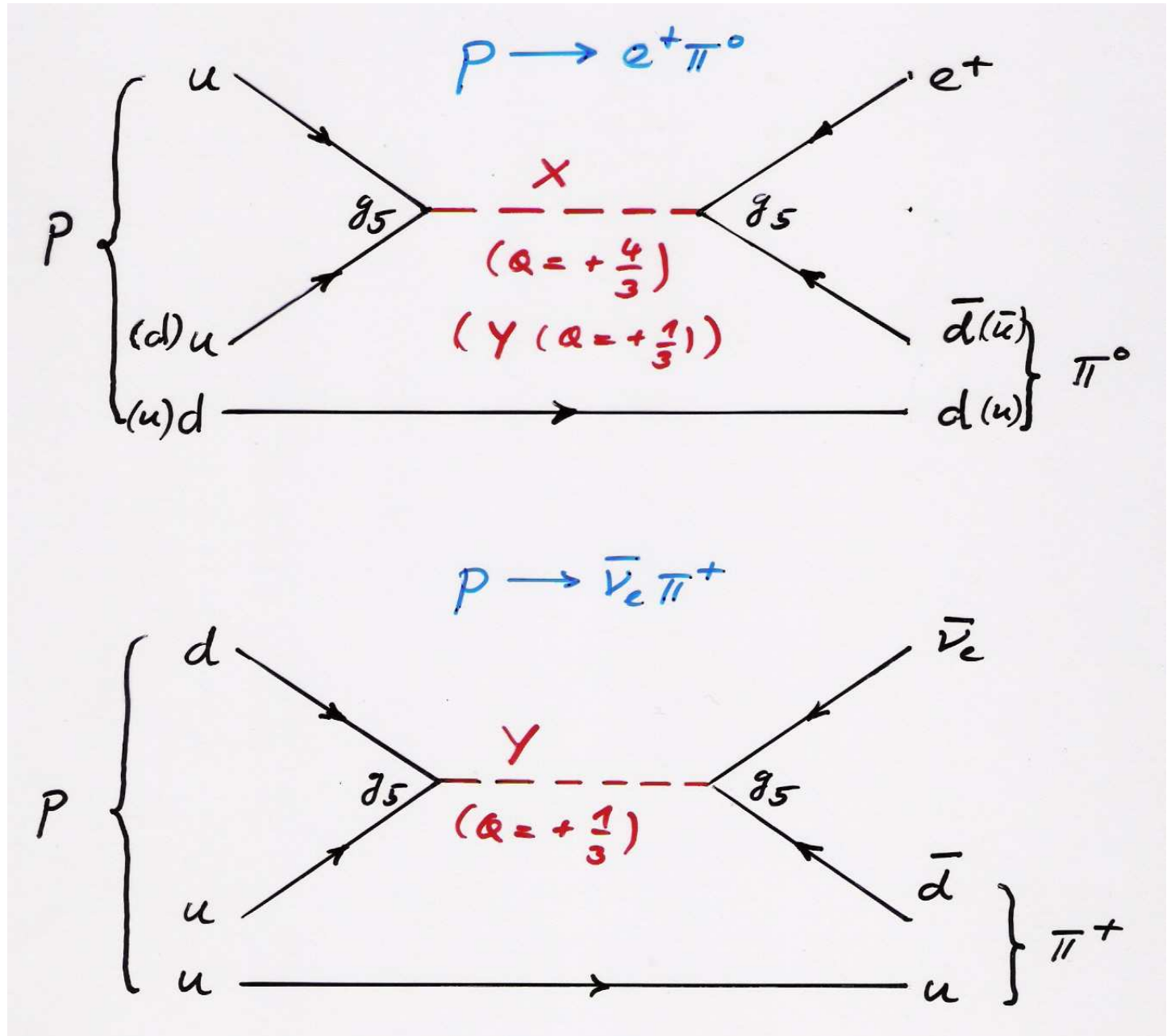
$W^{\pm}, Z^0, \gamma$

⇒ 12 neue schwere Eichbosonen X, Y ($SU(2)$ -Dublett) und ihre Antiteilchen mit elektrischen Ladungen $Q_X = +\frac{4}{3}$ und $Q_Y = +\frac{1}{3}$ in jeweils 3 Farben und Massen $M_{X,Y} \approx M_{GUT}$ nach $SU(5)$ -Brechung.

Vermitteln Übergänge zwischen Quarks und Leptonen innerhalb der $SU(5)$ -Multipletts, tragen also Lepton und Quarkeigenschaften ('Leptoquarks'):



Dies führt u.a. zur Vorhersage des Protonzerfalls mit einer Lebensdauer von $\approx 10^{31}$ Jahren (für SU(5)), was inzwischen experimentell ausgeschlossen ist (Kamiokande-, IMB-, Mont Blanc-Experimente in den 1980er Jahren mit $\tau_p > 10^{31}$ Jahren):



$$\Gamma(p \rightarrow e^+ \pi^0) \approx \frac{\alpha_5^2 m_p^5}{M_X^4} \approx \frac{\alpha_5^2 m_p^5}{M_{GUT}^4}$$

(wie Myonzerfall $\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$).

$\Rightarrow \tau_p = \frac{1}{\Gamma_p} \approx 10^{31}$ Jahre für $M_{GUT} \approx 10^{15}$ GeV.

Alternative einfache GUT Lie-Gruppen mit der Vorhersage rechtshändiger und damit potentiell massiver Neutrinos:

- $SO(10) = E_5 \supset SU(5)$:
16-dim. fundamentale irreduzible Darstellung (Leptonen und Quarks) und 45 Eichbosonen (adjungierte Darstellung).
- $E_6 \supset SO(10)$:
27-dim. fundamentale Darstellung und 78 Eichbosonen.

Mit $SU(5) = E_4$ sind dies die einzigen natürlichen Kandidaten mit komplexen Darstellungen für separate Multipletts für links- bzw. rechtshändige Fermion- und Antifermionzustände, so daß P-Verletzung bei Drehimpulserhaltung möglich ist (immer noch ohne fundamentalere Erklärung als im Standardmodell).

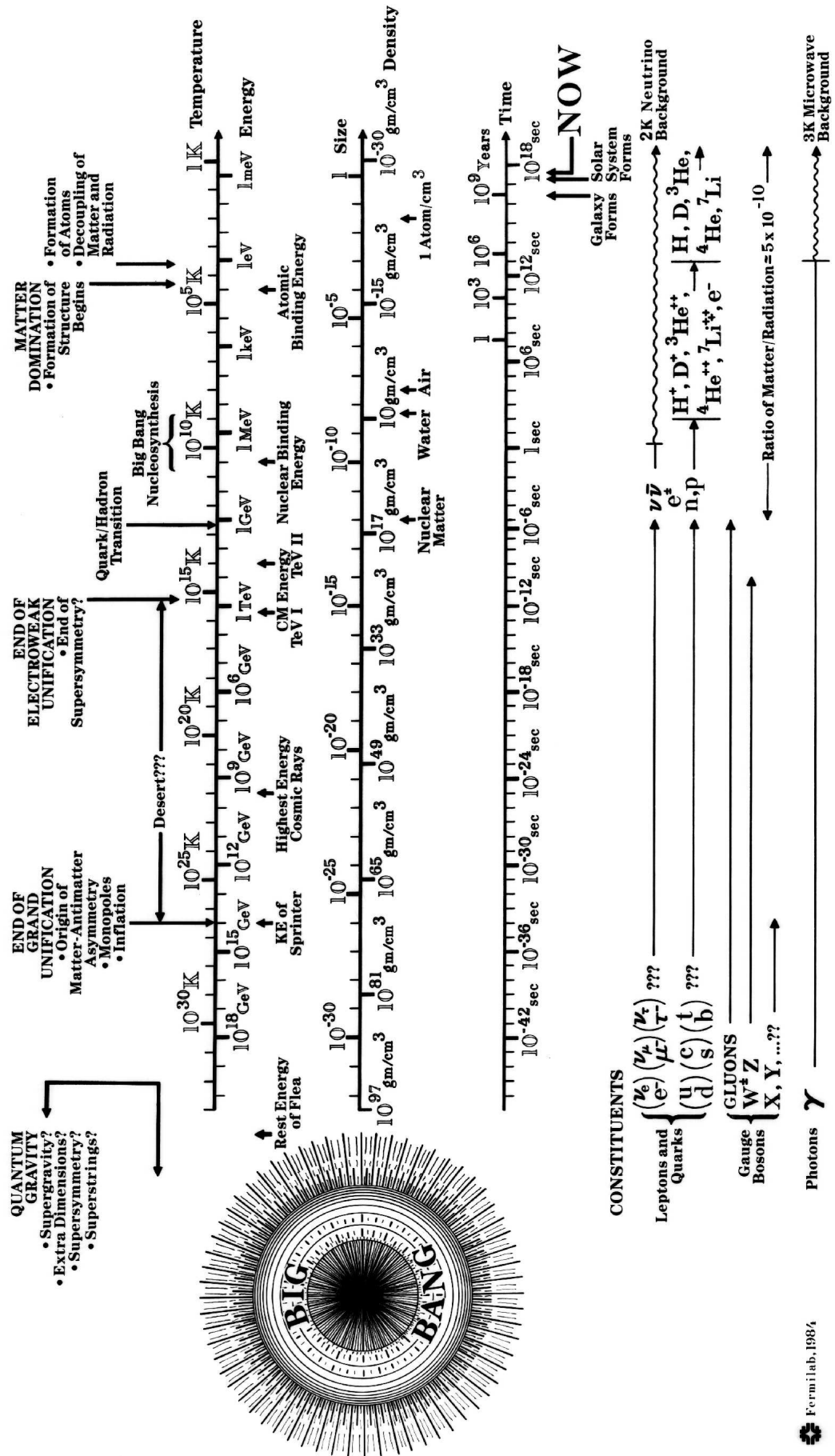
Spontane Brechung der GUT-Eichsymmetrien:

⇒ Zahlreiche neue, schwere Higgs-Bosonen.

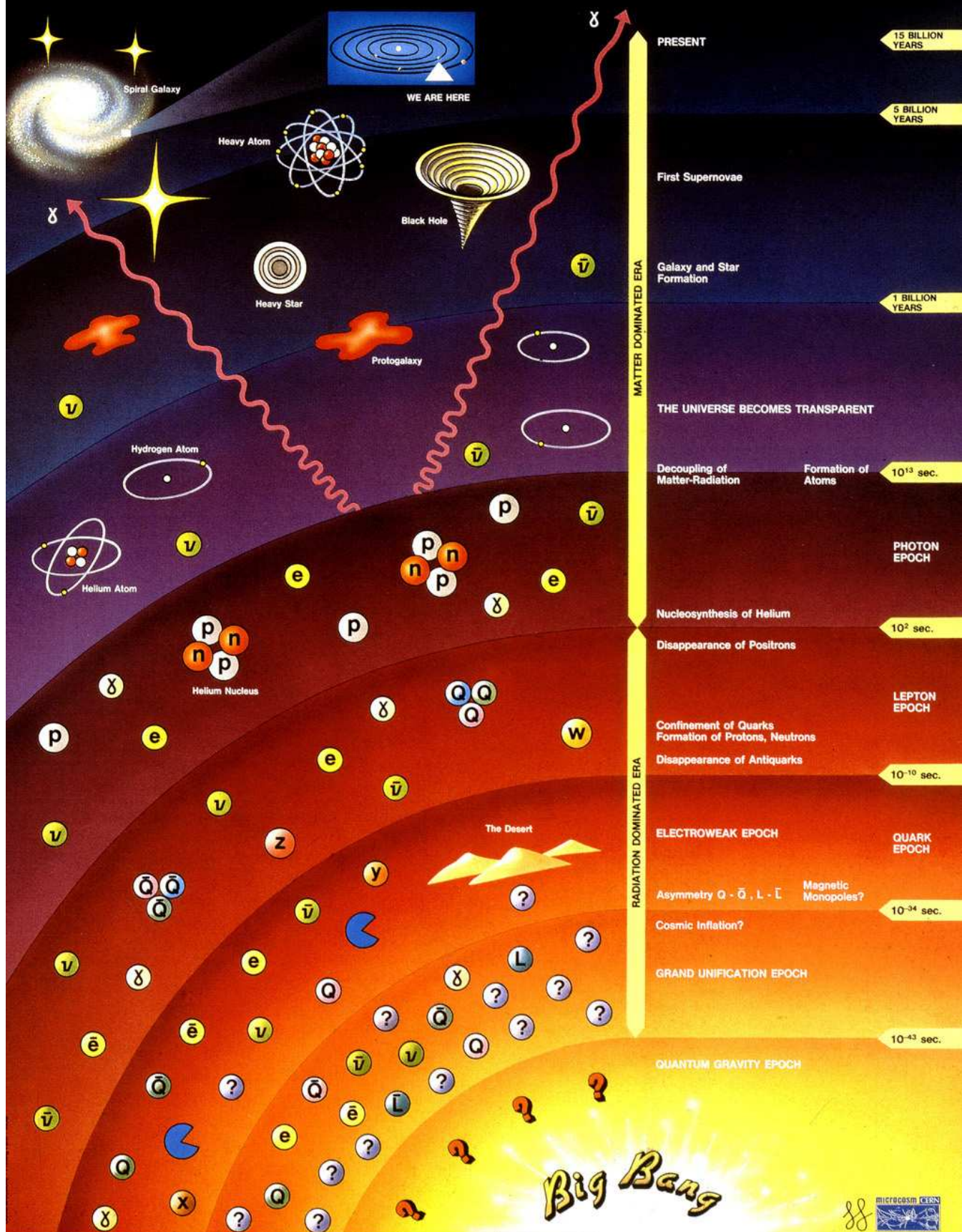
⇒ Weitere Phasenübergänge im frühen Universum bei $kT \approx M_{GUT}$.

Motivation für das Modell des inflationären Universums: exponentielle Expansion des neuen Vakuums beim Phasenübergang mit spontaner Symmetriebrechung.

Entwicklung des Universums



History of the Universe



3.2.2 Vereinheitlichung der Kopplungsstärken

Mit den neutralen $U(1)_Y$ - und den $SU_L(2)$ -Eichfeldern

$$\begin{aligned} B^\mu &= A^\mu \cos \theta_W + Z^\mu \sin \theta_W, \\ W_3^\mu &= -A^\mu \sin \theta_W + Z^\mu \cos \theta_W \end{aligned}$$

gilt für die kovariante Ableitung der $SU(5)$ -Eichtheorie mit 24 Eichfeldern V_a^μ und der universellen Eichkopplungskonstanten g_5 :

$$\begin{aligned} D^\mu &= \partial^\mu - ig_5 T_a V_a^\mu = \partial^\mu - ig_5 [T_1 B^\mu + T_3 W_3^\mu + \dots] \\ &= \partial^\mu - ig_5 [T_1 \cos \theta_W A^\mu - T_3 \sin \theta_W A^\mu + \dots], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d.h. } -eQ &= -g_5 T_3 \sin \theta_W + g_5 T_1 \cos \theta_W \\ &= -g_5 \sin \theta_W (T_3 - \cot \theta_W T_1). \end{aligned}$$

$$\implies Q = T_3 + cT_1 = T_3 - \cot \theta_W T_1$$

$$\text{mit } c = -\cot \theta_W \quad e = g_5 \sin \theta_W.$$

Mit $Q = I_3 + Y/2$ (Standardmodell) und $T_3 = I_3$, $Y/2 = cT_1$ und

$$\begin{aligned} g' \bar{\psi} \gamma^\mu \frac{Y}{2} \psi B_\mu &= g' \bar{\psi} \gamma^\mu (Q - T_3) \psi B_\mu \\ \equiv g_5 \bar{\psi} \gamma^\mu T_1 \psi B_\mu &= g_5 \bar{\psi} \gamma^\mu \frac{(Q - T_3)}{c} \psi B_\mu \end{aligned}$$

$$\implies g_5 = cg'$$

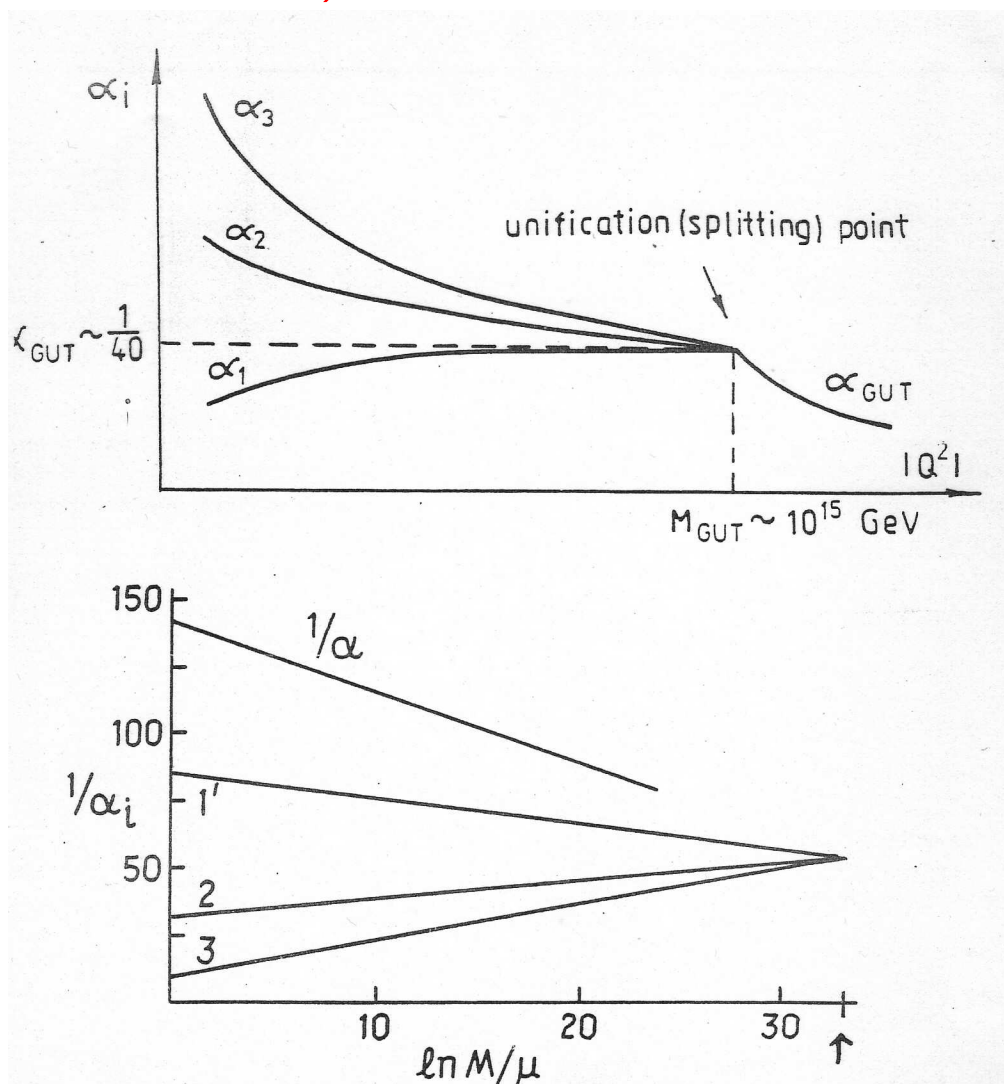
$$\alpha_5 = \alpha_1(M_{GUT}^2) = \cot^2 \theta_W \alpha'(M_{GUT}^2); \quad \alpha' \equiv \frac{g'^2}{4\pi}.$$

Vereinheitlichung der elektroschwachen und starken Wechselwirkungen bei der GUT-Skala M_{GUT} in der $SU(5)$ -Theorie bedeutet:

$$\underbrace{\alpha_1(M_{GUT}^2)}_{U(1)_{T_1}} = \underbrace{\alpha_2(M_{GUT}^2)}_{SU(2)_L} = \underbrace{\alpha_3(M_{GUT}^2)}_{SU(3)_C} = \alpha_5 = \frac{g_5^2}{4\pi}.$$

Möglich wegen der unterschiedlichen q^2 -Abhängigkeiten der gemessenen Kopplungen:

$\alpha(q^2) = \frac{e^2}{4\pi}$ und damit $\alpha_1(q^2) = \alpha(q^2)/\sin^2 \theta_W(q^2)$ steigen, $\alpha_W(q^2) = \frac{g^2}{4\pi} = \alpha_2(q^2)$ und $\alpha_s(q^2) = \alpha_3(q^2)$ fallen (asymptotische Freiheit) mit zunehmendem q^2 .



Für jede Darstellung D einer einfachen Lie-Gruppe mit Generatoren T_a gilt (vergleiche Spin!):

$$Sp_D T_a T_b = N_D \delta_{ab}.$$

$$\implies Sp Q^2 = Sp(T_3 + cT_1) = Sp T_3^2 + c^2 Sp T_1^2 = (1 + c^2) Sp T_3^2$$

mit $Sp T_1 T_3 = 0$ und $Sp T_1^2 = Sp T_3^2 = N_D$.

Mit $Sp_5 Q^2 = 0 + 1 + 3 \cdot \frac{1}{9} = \frac{4}{3}$ und

$Sp_5 T_3^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 0 + 0 + 0 = \frac{1}{2}$ gilt:

$$c^2 = \frac{5}{3} = \cot^2 \theta_W.$$

$\implies$ **Vorhersage** für den Weinberg-Winkel bei $q^2 = M_{GUT}$:

$$\sin^2 \theta_W(M_{GUT}^2) = \frac{1}{1 + c^2} = \frac{3}{8} = 0.375.$$

q^2 -Abhängigkeit der Eichkopplungen:

$$\alpha_i(q^2) = \frac{\alpha_i(q_0^2)}{1 + b_i \frac{\alpha_i(q_0^2)}{4\pi} \ln\left(\frac{q^2}{q_0^2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\alpha_i(q^2)} = \frac{1}{\alpha_i(q_0^2)} + \frac{b_i}{4\pi} \ln\left(\frac{q^2}{q_0^2}\right)$$

mit $(N_G = \text{Zahl der Fermion-Generationen})$: $\# N_G / 2$

$b_3 = 11 - \frac{4}{3}N_G > 0$ (für $N_G \leq 8$) $= \underline{\text{QCD}} \rightarrow \alpha_s(q^2)$
 $SU(3) \subset SU(5)$

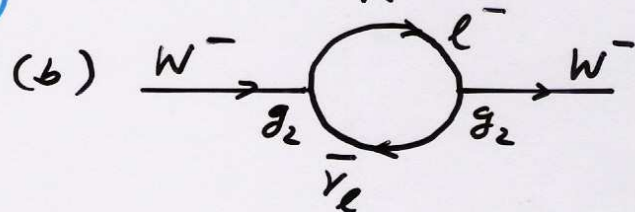
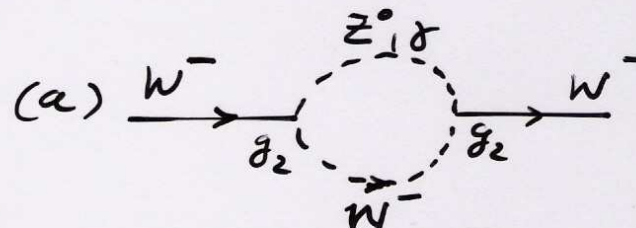
$b_2 = \frac{22}{3} - \frac{4}{3}N_G > 0$ (für $N_G \leq 5$)
 $SU(2) \subset SU(5)$

$\underline{\text{GSW}} \rightarrow \alpha_w(q^2) = \frac{g_2^2}{4\pi}$

$b'_1 = -\frac{4}{3}N_G < 0$

wie $\underline{\text{QED}} \rightarrow \alpha(q^2)$

$U(1) \subset SU(5)$



z.B.:

$$\alpha_2(M_{GUT}^2) \equiv \alpha_3(M_{GUT}^2) = \alpha_5, \text{ d.h.}$$

$$\frac{1}{\alpha_3(q_0^2)} + \frac{b_3}{4\pi} \ln\left(\frac{M_{GUT}^2}{q_0^2}\right) = \frac{1}{\alpha_2(q_0^2)} + \frac{b_2}{4\pi} \ln\left(\frac{M_{GUT}^2}{q_0^2}\right),$$

$$\frac{1}{\alpha_3(q_0^2)} - \frac{1}{\alpha_2(q_0^2)} = -\frac{11}{12\pi} \ln\left(\frac{M_{GUT}^2}{q_0^2}\right).$$

Ebenso:

$$\underbrace{\frac{1}{\alpha_3(q_0^2)} - \frac{1}{\alpha_1(q_0^2)}} = -\frac{11}{4\pi} \ln\left(\frac{M_{GUT}^2}{q_0^2}\right)$$

$$= \frac{1}{\alpha_3(q_0^2)} - \frac{3}{5} \left(\frac{1}{\alpha(q_0^2)} - \frac{1}{\alpha_2(q_0^2)} \right)$$

$$\text{mit } \frac{1}{\alpha_1} = \frac{1}{c^2 \alpha'} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{\alpha'}$$

$$\text{und } \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha'} + \frac{1}{\alpha_2}, \quad \text{da } e^2 = \frac{g^2 g'^2}{g^2 + g'^2}.$$

$$\Rightarrow \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{\alpha_3(q_0^2)} - \frac{1}{\alpha(q_0^2)} = -\frac{11}{2\pi} \ln\left(\frac{M_{GUT}^2}{q_0^2}\right).$$

Mit $q_0^2 = M_Z^2$, $\alpha_3(M_Z^2) = \alpha_s(M_Z^2) = 0.119$ und $\alpha(M_Z^2) = 1/128.9$ Vorhersage für die GUT-Skala möglich:

$$\ln\left(\frac{M_{GUT}^2}{M_Z^2}\right) = 30.4 \quad \text{und}$$

$$M_{GUT} = 1.5 \cdot 10^{15} \text{ GeV} \ll M_{\text{Planck}} \approx 10^{19} \text{ GeV}.$$

Vorhersage von $\sin^2 \theta_W(M_W^2)$:

$$\sin^2 \theta_W = \frac{g_1^2}{g_1^2 + g_2^2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} = \frac{1}{1 + \frac{\alpha_2(q^2)}{\alpha_1(q^2)}}.$$

$$\sin^2 \theta_W(M_{GUT}^2) = \frac{1}{1 + c^2} = \frac{3}{8}.$$

Rückentwicklung von M_{GUT} :

$$\begin{aligned} & \cdot \frac{1}{\alpha'(M_W^2)} = \frac{5}{3} \frac{1}{\alpha_1(M_W^2)} \\ = & \frac{5}{3} \left[\frac{1}{\alpha_1(M_{GUT}^2)} + \frac{b'_1}{4\pi} \ln \left(\frac{M_W^2}{M_{GUT}^2} \right) \right] \\ \equiv & \frac{5}{3} \left[\frac{1}{\alpha_2(M_{GUT}^2)} - \frac{4N_G}{12\pi} \ln \left(\frac{M_W^2}{M_{GUT}^2} \right) \right] \\ = & \frac{5}{3} \left[\frac{1}{\alpha_2(M_W^2)} + \frac{22 - 4N_G}{12\pi} \ln \left(\frac{M_{GUT}^2}{M_W^2} \right) - \frac{4N_G}{12\pi} \ln \left(\frac{M_W^2}{M_{GUT}^2} \right) \right] \\ = & \frac{5}{3} \left[\frac{1}{\alpha_2(M_W^2)} - \frac{11}{6\pi} \ln \left(\frac{M_W^2}{M_{GUT}^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{\alpha_2}{\alpha_1}(M_W^2) &= \frac{5}{3} \left[1 - \frac{11\alpha_2(M_W^2)}{6\pi} \ln \left(\frac{M_W^2}{M_{GUT}^2} \right) \right] \\
&= \frac{5}{3} \left[1 - \frac{11G_F M_W^2}{3\pi^2 \sqrt{2}} \ln \left(\frac{M_W^2}{M_{GUT}^2} \right) \right] = 3.79,
\end{aligned}$$

unabhängig von N_G . Mit $M_W = 80.33$ GeV ist

$$\Rightarrow \sin^2 \theta_W(M_W^2) = \frac{1}{1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}(M_W^2)} = 0.209.$$