

3. Suche nach Erweiterungen des Standardmodells

3.1 Ungelöste Fragen im Standardmodell

1. Existiert das Higgs-Boson als elementares Teilchen?

Dynamischer Mechanismus der Eichsymmetriebrechung?

→ Substruktur des Higgs-Bosons mit neuer starker Wechselwirkung?

(Analogie zu den Cooper-Paaren ('Higgs-Feld') im Supraleiter.)

2. Ursache der Paritätsverletzung?

z.B. durch spontane Symmetriebrechung in einer links-rechts-symmetrischen Theorie?

3. Erklärung der Paarung der $SU(2)_L$ -Doublets von Quarks und Leptonen ($\implies$ Renormierbarkeit der schwachen WW!),

Verknüpfung zwischen elektrischer Ladung und Farbquantenzahl, zwischen Quarks und Leptonen?

→ Vereinheitlichung der Eichwechselwirkungen: Grand Unified Theories (GUT)?

4. Erklärung der Quantisierung der elektrischen Ladung:

$Q_e = -Q_p$ mit einer Genauigkeit von 10^{-21} .

Warum ist $Q_d = \frac{1}{3}Q_e$ und $Q_\nu + Q_e + 3Q_u + 3Q_d = 0$?

→ Vereinheitlichung der Eichwechselwirkungen: GUTs.

5. Warum nur 3 Generationen von Quarks und Leptonen?

(Minimum für CP-Verletzung durch eine komplexe Mischungsmatrix.)

Hierarchie der Fermion-Massen und -Mischungswinkel.

→ Substruktur der Quarks und Leptonen und evtl. der Eichbosonen mit neuer starker (Eich-) Wechselwirkung?

6. Warum sind die Neutrinomassen so klein?

→ Vereinheitlichung der Eichwechselwirkungen, GUTs.

7. Ursprung der CP-Verletzung, die für die Existenz von Materie im Universum (Baryon-Antibaryon-Asymmetrie) notwendig ist?

(Sacharov 1967).

Der Effekt der CP-Verletzung im Standardmodell allein ist dafür zu klein.

→ Vereinheitlichung der Eichwechselwirkungen, GUTs.

8. 25 freie Parameter des Standardmodells:

- 3 Eichkopplungskonstanten: e , g_w , g_s oder α , $\sin^2 \theta_W$, α_s ($g = e / \sin \theta_W$, $g' = e / \cos \theta_W$).
- 6 Lepton- und 6 Quark-Massen (Yukawa-Kopplungen).
- Je 4 Parameter der Mischungsmatrizen für Quarks und Leptonen.
- Masse und Selbstkopplungskonstante des Higgs-Bosons (allgemein: Parameter des Higgs-Potentials bzw. des elektroschwachen Phasenübergangs).

—> Substruktur der Quarks und Leptonen und/oder GUTs.

9. Stabilisierung der Higgsboson-Masse bei $\leq 1 \text{ TeV}$ unter Strahlungskorrekturen?

—> Supersymmetrie zwischen Fermionen und Bosonen.

10. Ursprung der 'Dunklen Materie' im Weltall?

99% der Materie im Universum ist nicht sichtbar!

—> Supersymmetrie zwischen Fermionen und Bosonen.

11. Ursprung der dunklen Energie?

Warum ist der Effekt so klein?

12. Quantentheorie der Gravitation?

Verbindung der Gravitation mit den anderen fundamentalen Wechselwirkungen?

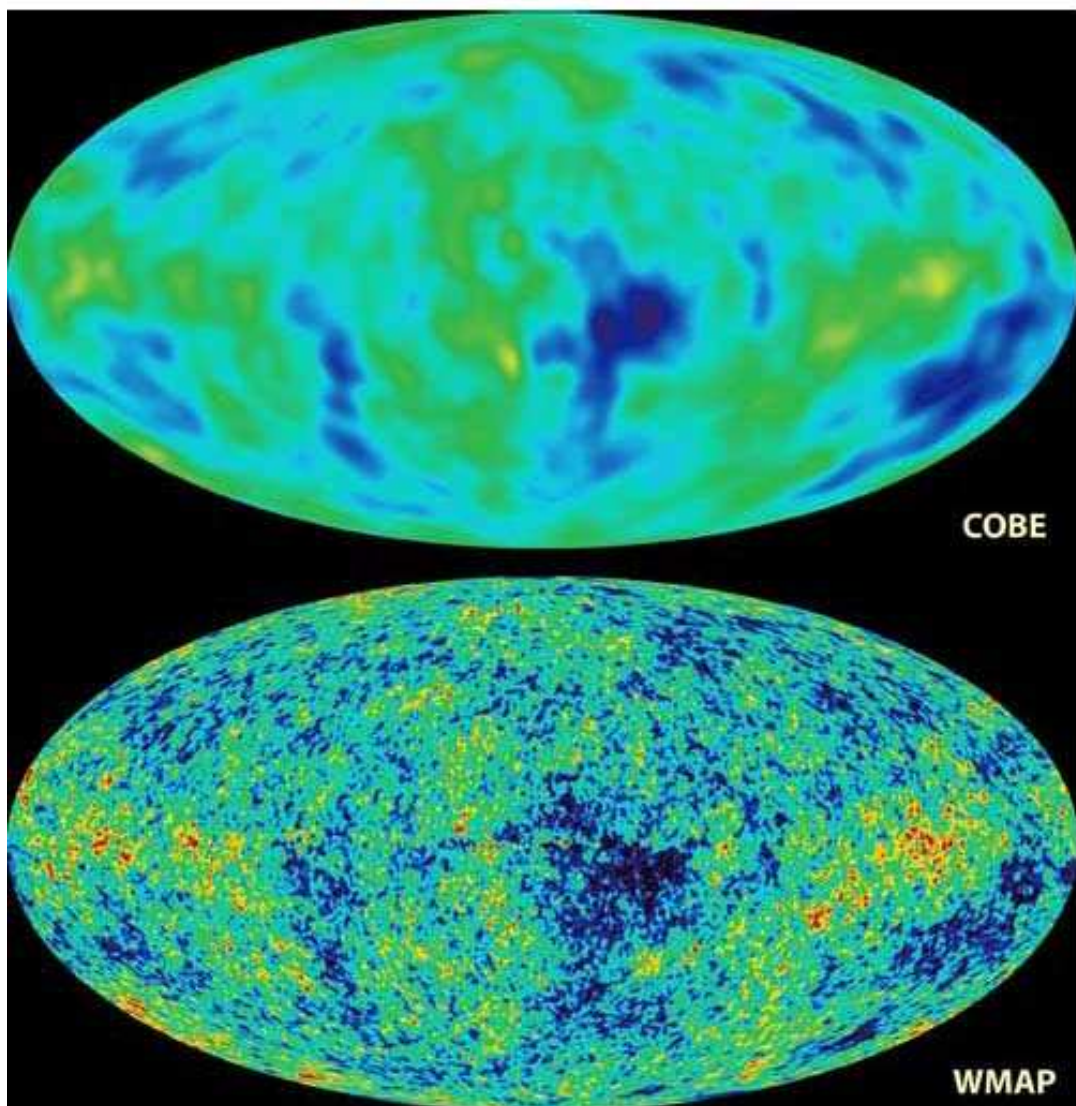
—> Supersymmetrie, Superstrings?

Materiezusammensetzung des Universums:

$\Omega = \text{Energiedichte/kritische Dichte}$

Beobachtungen (Präzisionsmessungen!):

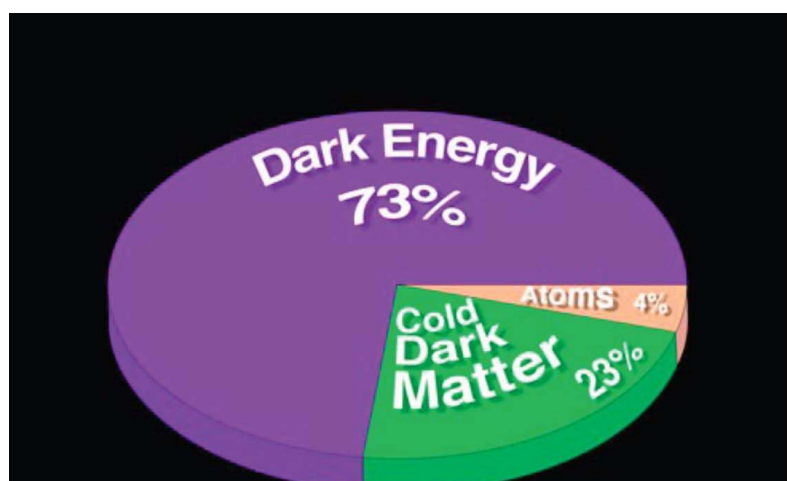
- Isotropie der kosmischen Mikrowellen-Hintergrundstrahlung (COBE, WMAP Satelliten)
 $\implies$ Inflationsphase (exponentielle Expansion) im frühen Universum $\implies \Omega_{\text{tot}} = 1$
(flaches Universum, Grenzfall zwischen offenem und geschlossenem Universum).

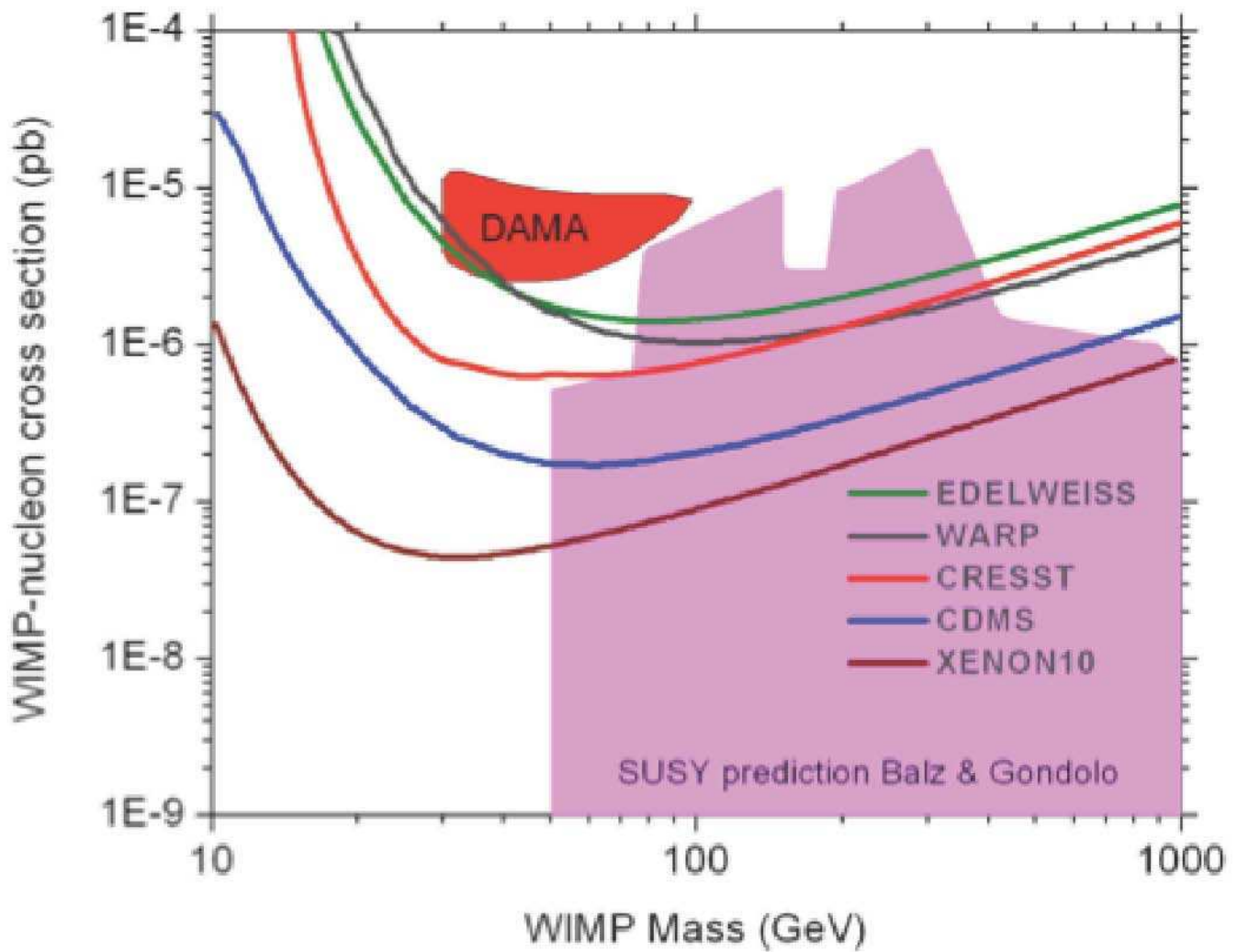
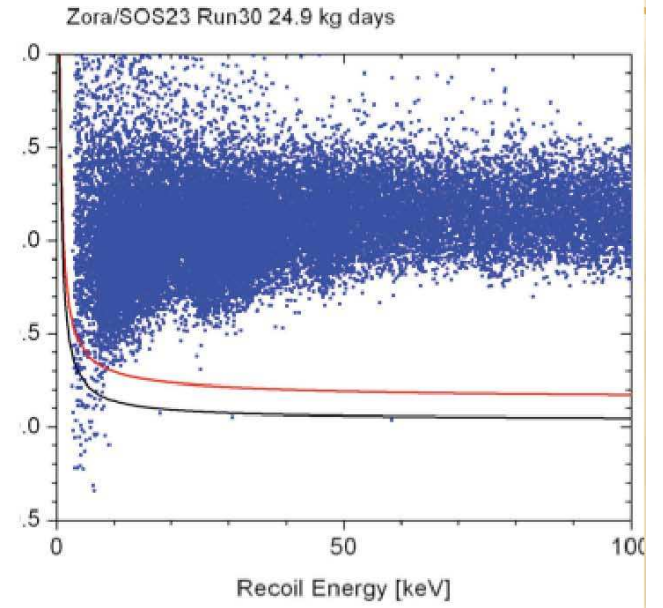
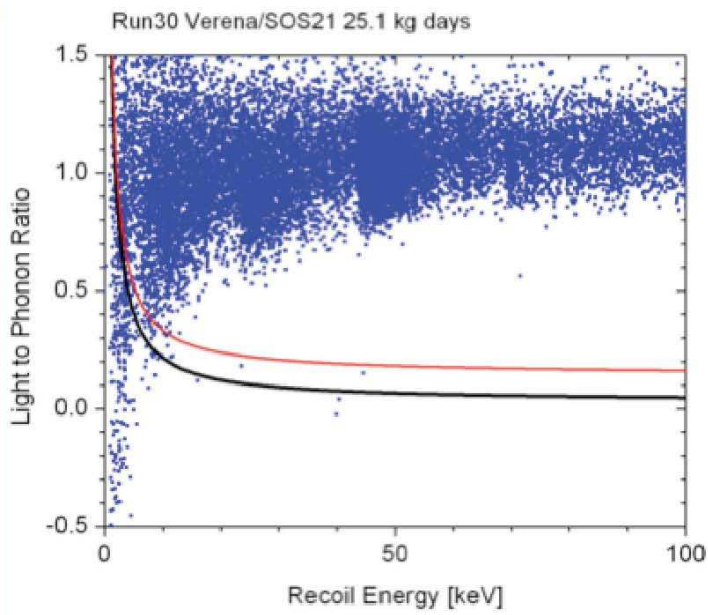


- **Materiedichte $\Omega_M \approx 30\%$**
(Gravitationseffekte: Galaxienbewegung, Gravitationslinsen, langreichweitige Struktur des Universums).
- Davon **baryonische Materie (Elemente): $\Omega_B \approx 5\%$**
(Nukleosynthese).
- Davon **sichtbare Materie (Sterne): $\Omega_{lum} \approx 0.4\%$** .

⇒ Nicht-baryonische, **“dunkle Materie”**: $\Omega_{DM} \approx 25\%$
(massive Neutrinos, Axionen, SUSY-Teilchen,...?).

- **“Dunkle Energie”**: $\Omega_\Lambda \approx 70\%$
(entspricht einer positiven kosmologischen Konstanten Λ , globalem Druck, “Antigravitation”, in der Allg. Relativitätstheorie) zur Erklärung der beobachteten beschleunigten Expansion des Universums (Supernova-Rotverschiebung).
Ursprung in der Vakuumenergie der Quantenfeldtheorie oder der Stringtheorie: ergibt etwa **120–128 Größenordnungen** zu großen Wert! Erklärung?

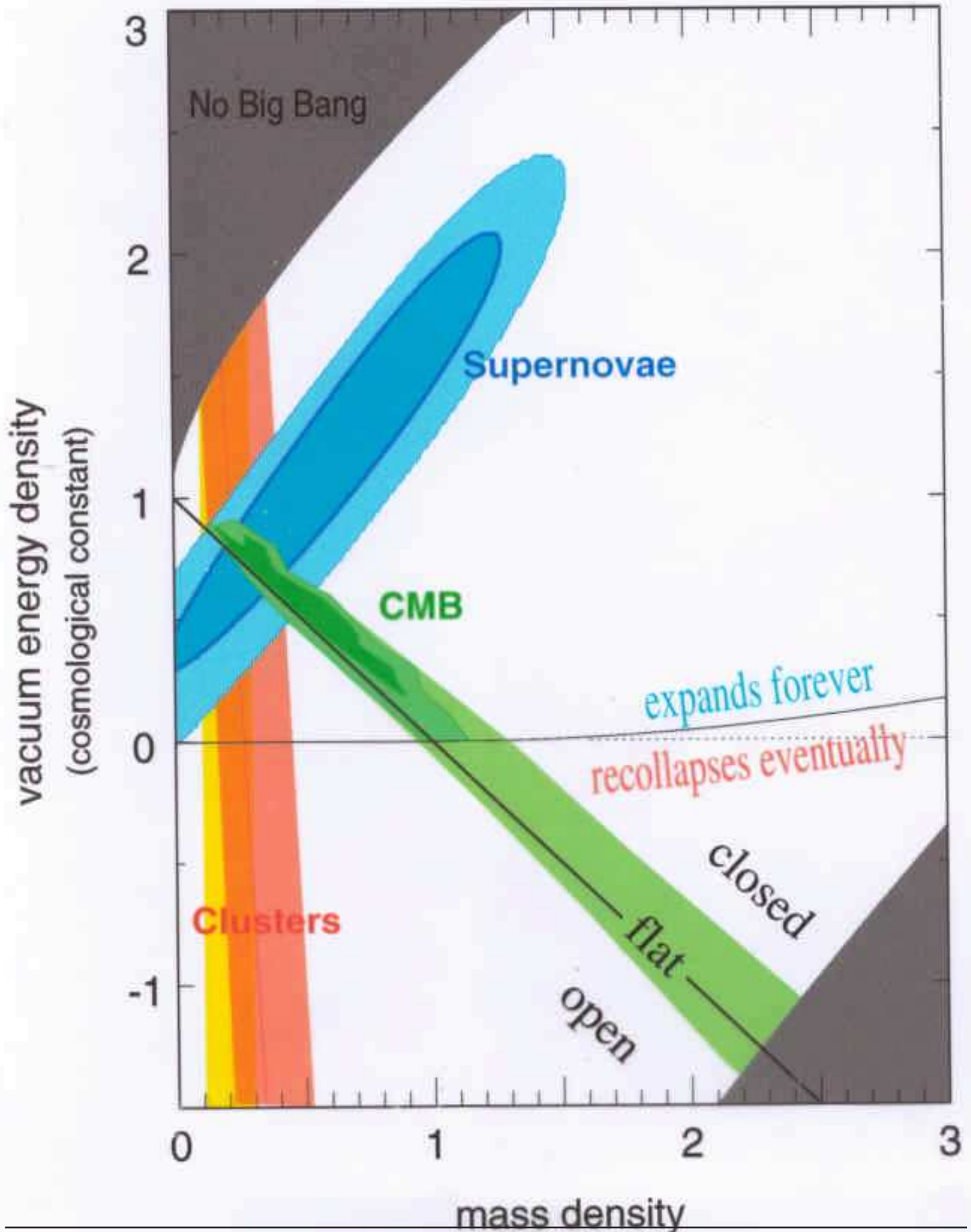




Perlmutter, et al. (1999)

Jaffe et al. (2000)

Bahcall and Fan (1998)



3.2 Vereinheitlichung der Wechselwirkungen

Vereinheitlichung der Eichwechselwirkungen des Standardmodells durch Einbettung in eine größere einfache Eichgruppe G mit einer einzigen Kopplungskonstanten (**Grand Unified Theories, GUTs**):

$$G \supset SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y.$$

Das Standardmodell ist eine effektive Theorie bei niedrigen Energien nach spontaner Symmetriebrechung der Eichsymmetrien:

$$G \xrightarrow{M_{GUT}} SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y \xrightarrow{M_{\text{el.schw.}}} SU(3)_C \otimes U(1)_Q.$$

Die **Vereinheitlichungsskala**, bei der alle Wechselwirkungen gleich stark werden (gemeinsame Kopplungskonstante) kann im Standardmodell berechnet werden: $M_{GUT} \approx 10^{15} \text{ GeV}$.

(vergleiche die Skala der elektroschwachen Symmetriebrechung: $M_{\text{el.schw.}} \approx \frac{v}{\sqrt{2}} \approx M_W$).

3.2.1 Das $SU(5)$ -Modell:

Die kleinste einfache Lie-Gruppe, die die Eichgruppen des Standardmodells als Untergruppen enthält ist $SU(5)$,

mit $n^2 - 1 = 24$ Generatoren T^a und 24 Eichfeldern $V_\mu^a(x)$ ($a = 1, \dots, 24$), von denen nur 12 schon im Standardmodell enthalten sind (8 Gluonen, $W^\pm$, Z^0 , γ):

$$\mathcal{L}_{SU(5)} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} + \bar{\psi} i \gamma^\mu D_\mu \psi_f;$$
$$D_\mu = \partial_\mu - i g_5 T^a V_\mu^a.$$

Die fundamentale Darstellung hat die Dimension $n = 5$ und ist komplex: d.h. es gibt zwei verschiedene 5, 5^* .

Um alle 15 Fermion-Zustände der ersten Generation des SM in $SU(5)$ -Multipletts unterzubringen, wird zusätzlich die 10-dim. irreduzible Darstellung 10 benötigt:

d.h. reduzible Darstellung der SM-Teilchen $5^* + 10$ (zusammen Renormierbarkeit in der $SU(5)$ -Eichtheorie).

Zerlegung in irreduzible $(SU(3)_C, SU(2)_L)$ -Darstellungen ergibt ($i = r, g, b$):

$$5_L = \underbrace{(3, 1)}_{\bar{d}_{iL}} + \underbrace{(1, 2)}_{(\nu_e, e^-)_L} \quad \text{und} \quad 5_R^* = \underbrace{(3^*, 1)}_{d_{iR}} + \underbrace{(1, 2)}_{(\bar{\nu}_e, e^+)_R} .$$

$$10_L = \underbrace{(3, 2)}_{(u_i, d_i)_L} + \underbrace{(3^*, 1)}_{\bar{u}_{iL}} + \underbrace{(1, 1)}_{e_L^+} .$$

Das fundamentale $SU(5)$ -Multipllett enthält die Zustände:

$$5 : \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \\ \bar{d}_r \\ \bar{d}_g \\ \bar{d}_b \end{pmatrix}_L \quad \begin{array}{ccc} Q & Y & I^0 \\ 0 & -1 & +\frac{1}{2} \\ -1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{array}$$

$\Rightarrow$ Leptonen und Quarks in Multipletts der Eichgruppe vereinigt

(mit gleichen Helizitäten: Drehimpulserhaltung, $[\vec{J}, T_a] = 0$).

$\Rightarrow$ da für $SU(n)$ -Generatoren, wie Q , die Spur $\equiv 0$, gilt z.B. in der 5-Darstellung:

$$Q(\nu_e) + Q(e^-) + 3 \cdot Q(\bar{d}) = 0 - 1 + 3 \cdot \frac{1}{3} = 0,$$

d.h. die $SU(5)$ -Symmetrie verlangt $Q(\bar{d}) = +\frac{1}{3}$!

Verknüpfung zwischen drittelzahligen Quarkladungen und Zahl der Farben. Garantiert Anomaliefreiheit (Renormierbarkeit) des Standardmodells.

Erklärung für die exakte Ladungsquantisierung:

$$Q(e^-) \equiv -Q(p) \text{ (neutrale Atome).}$$

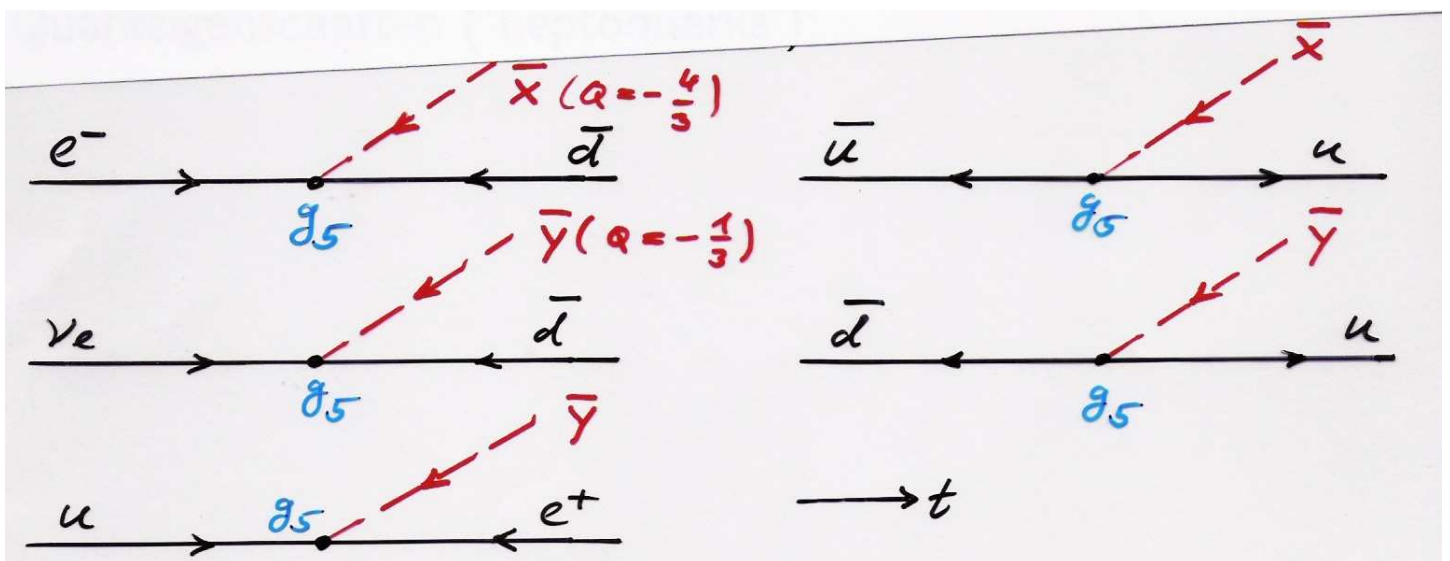
⇒ Kein Platz für rechtshändige Neutrinos; d.h. Vorhersage masseloser Neutrinos.

Die $SU(5)$ -Eichbosonen füllen die 24-dimensionale adjungierte Darstellung, ausgedrückt durch die Darstellungen der Untergruppen ($SU_C(3), SU_L(2)$):

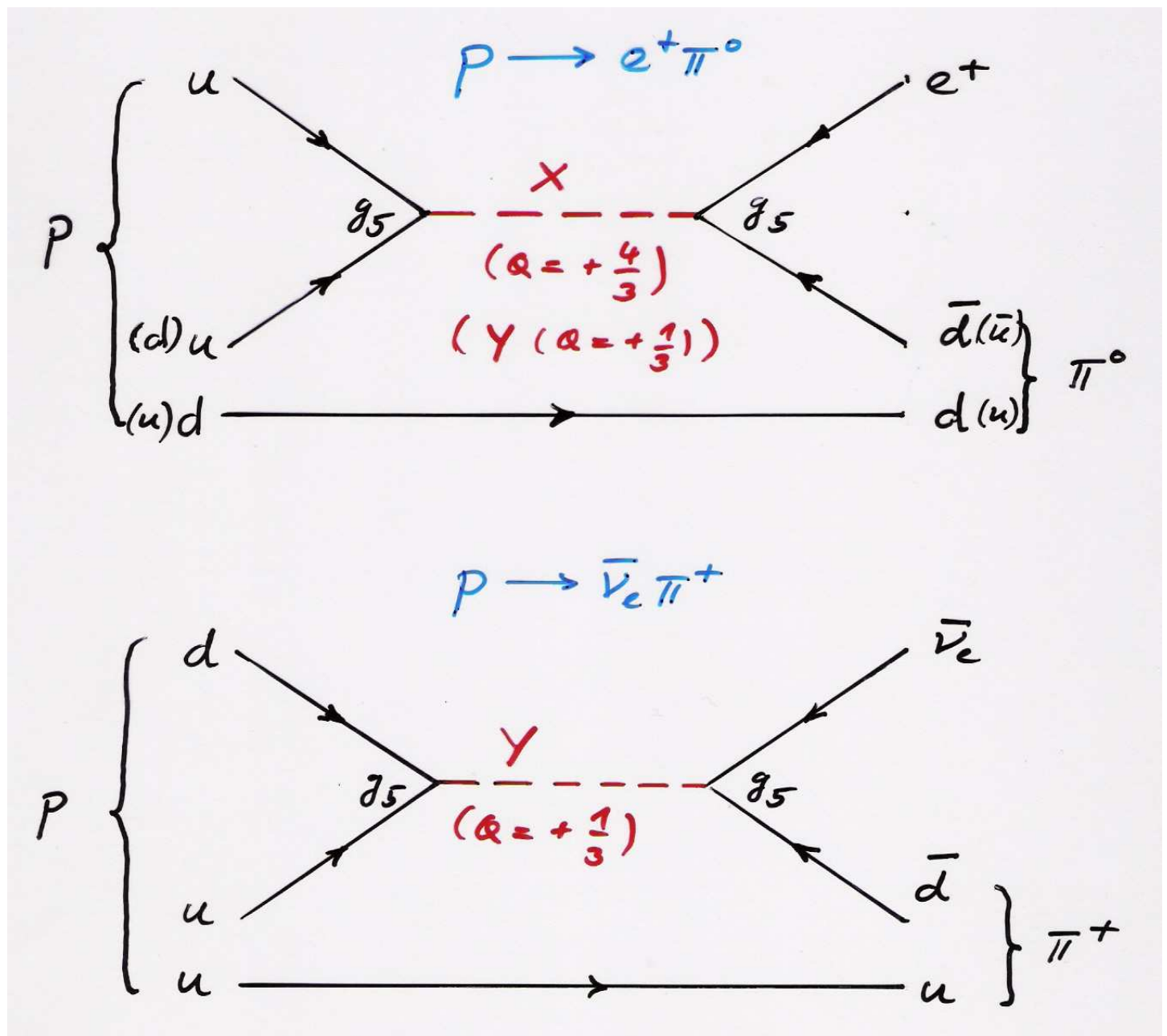
$$24 = \underbrace{(8, 1)}_{\text{Gluonen}} + \underbrace{(1, 3) + (1, 1)}_{W^{\pm}, Z^0, \gamma} + \underbrace{(3^*, 2)}_{(X, Y)} + \underbrace{(3, 2)}_{(\bar{X}, \bar{Y})}.$$

⇒ 12 neue schwere Eichbosonen X, Y ($SU(2)$ -Dublett) und ihre Antiteilchen mit elektrischen Ladungen $Q_X = +\frac{4}{3}$ und $Q_Y = +\frac{1}{3}$ in jeweils 3 Farben und Massen $M_{X,Y} \approx M_{GUT}$ nach $SU(5)$ -Brechung.

Vermitteln Übergänge zwischen Quarks und Leptonen innerhalb der $SU(5)$ -Multipletts, tragen also Lepton und Quarkeigenschaften ('Leptoquarks'):



Dies führt u.a. zur Vorhersage des Protonzerfalls mit einer Lebensdauer von $\approx 10^{31}$ Jahren (für SU(5)), was inzwischen experimentell ausgeschlossen ist (Kamiokande-, IMB-, Mont Blanc-Experimente in den 1980er Jahren mit $\tau_p > 10^{31}$ Jahren):



$$\Gamma(p \rightarrow e^+ \pi^0) \approx \frac{\alpha_5^2 m_p^5}{M_X^4} \approx \frac{\alpha_5^2 m_p^5}{M_{GUT}^4}$$

(wie Myonzerfall $\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$).

$$\Rightarrow \tau_p = \frac{1}{\Gamma_p} \approx 10^{31} \text{ Jahre für } M_{GUT} \approx 10^{15} \text{ GeV.}$$

Alternative einfache GUT Lie-Gruppen mit der Vorhersage rechtshändiger und damit potentiell massiver Neutrinos:

- $SO(10) = E_5 \supset SU(5)$:
16-dim. fundamentale irreduzible Darstellung (Leptonen und Quarks) und 45 Eichbosonen (adjungierte Darstellung).
- $E_6 \supset SO(10)$:
27-dim. fundamentale Darstellung und 78 Eichbosonen.

Mit $SU(5) = E_4$ sind dies die einzigen natürlichen Kandidaten mit komplexen Darstellungen für separate Multipletts für links- bzw. rechtshändige Fermion- und Antifermionzustände, so daß P-Verletzung bei Drehimpulserhaltung möglich ist (immer noch ohne fundamentalere Erklärung als im Standardmodell).

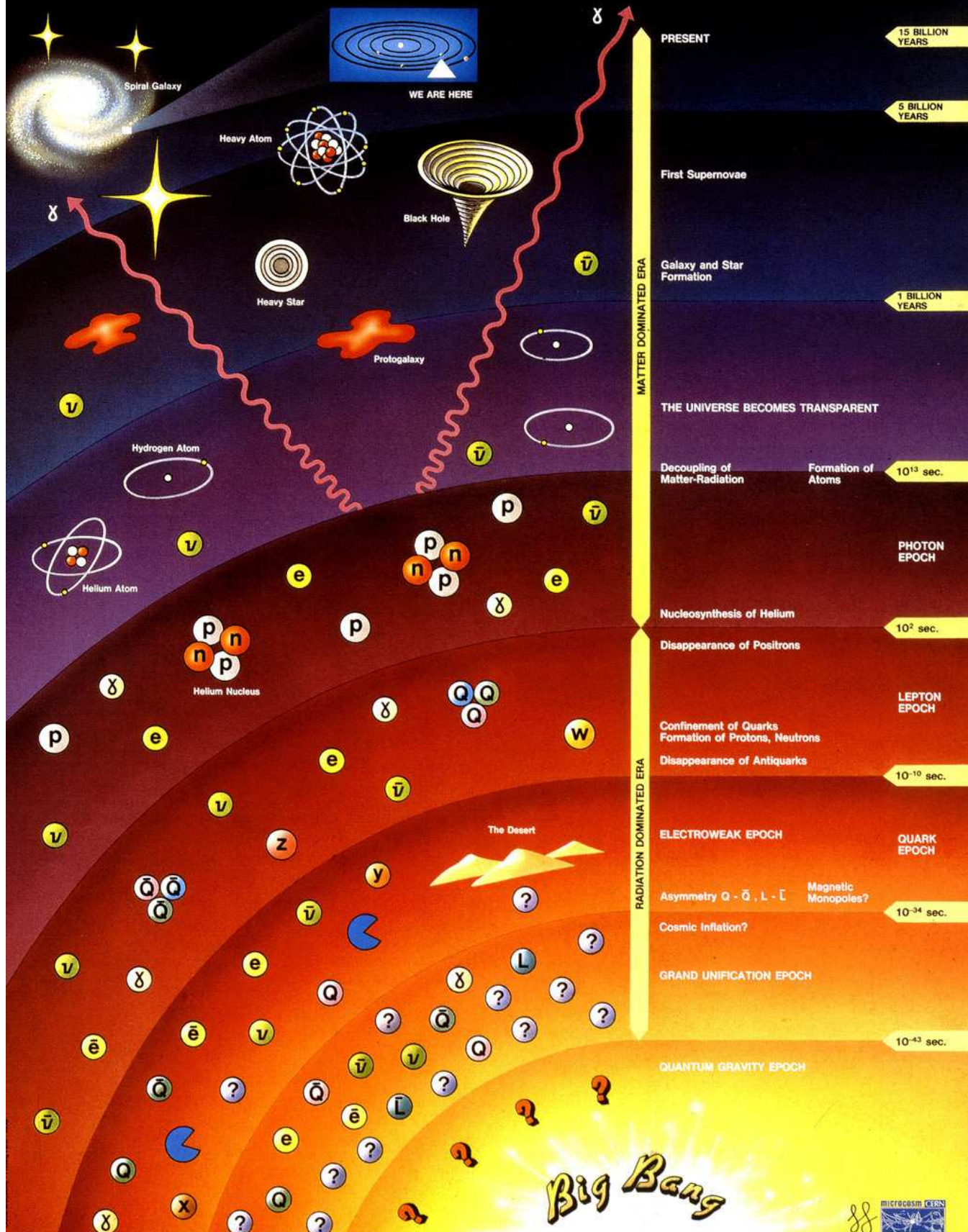
Spontane Brechung der GUT-Eichsymmetrien:

⇒ Zahlreiche neue, schwere Higgs-Bosonen.

⇒ Weitere Phasenübergänge im frühen Universum bei $kT \approx M_{GUT}$.

Motivation für das Modell des inflationären Universums: exponentielle Expansion des neuen Vakuums beim Phasenübergang mit spontaner Symmetriebrechung.

History of the Universe



3.2.2 Vereinheitlichung der Kopplungsstärken

Mit den neutralen $U(1)_Y$ - und den $SU_L(2)$ -Eichfeldern

$$\begin{aligned} B^\mu &= A^\mu \cos \theta_W + Z^\mu \sin \theta_W, \\ W_3^\mu &= -A^\mu \sin \theta_W + Z^\mu \cos \theta_W \end{aligned}$$

gilt für die kovariante Ableitung der $SU(5)$ -Eichtheorie mit 24 Eichfeldern V_a^μ und der universellen Eichkopplungskonstanten g_5 :

$$\begin{aligned} D^\mu &= \partial^\mu - ig_5 T_a V_a^\mu = \partial^\mu - ig_5 [T_1 B^\mu + T_3 W_3^\mu + \dots] \\ &= \partial^\mu - ig_5 [T_1 \cos \theta_W A^\mu - T_3 \sin \theta_W A^\mu + \dots], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d.h. } -eQ &= -g_5 T_3 \sin \theta_W + g_5 T_1 \cos \theta_W \\ &= -g_5 \sin \theta_W (T_3 - \cot \theta_W T_1). \end{aligned}$$

$$\Rightarrow Q = T_3 + cT_1 = T_3 - \cot \theta_W T_1$$

$$\text{mit } c = -\cot \theta_W \quad e = g_5 \sin \theta_W.$$

Mit $Q = I_3 + Y/2$ (Standardmodell) und $T_3 = I_3$, $Y/2 = cT_1$ und

$$\begin{aligned} g' \bar{\psi} \gamma^\mu \frac{Y}{2} \psi B_\mu &= g' \bar{\psi} \gamma^\mu (Q - T_3) \psi B_\mu \\ \equiv g_5 \bar{\psi} \gamma^\mu T_1 \psi B_\mu &= g_5 \bar{\psi} \gamma^\mu \frac{(Q - T_3)}{c} \psi B_\mu \end{aligned}$$

$$\Rightarrow g_5 = cg'$$

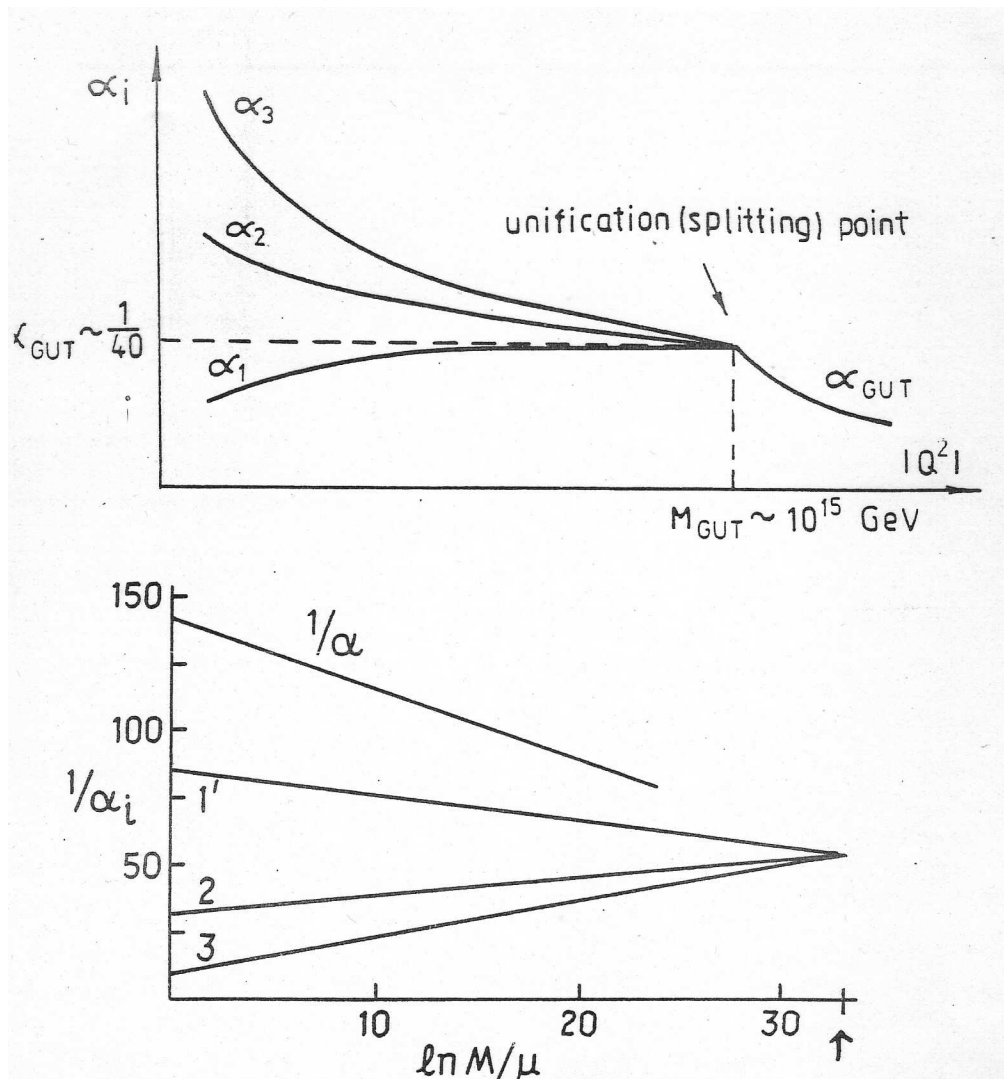
$$\alpha_5 = \alpha_1(M_{GUT}^2) = \cot^2 \theta_W \alpha'(M_{GUT}^2); \quad \alpha' \equiv \frac{g'^2}{4\pi}.$$

Vereinheitlichung der elektroschwachen und starken Wechselwirkungen bei der GUT-Skala M_{GUT} in der $SU(5)$ -Theorie bedeutet:

$$\underbrace{\alpha_1(M_{GUT}^2)}_{U(1)_{T_1}} = \underbrace{\alpha_2(M_{GUT}^2)}_{SU(2)_L} = \underbrace{\alpha_3(M_{GUT}^2)}_{SU(3)_C} = \alpha_5 = \frac{g_5^2}{4\pi}.$$

Möglich wegen der unterschiedlichen q^2 -Abhängigkeiten der gemessenen Kopplungen:

$\alpha(q^2) = \frac{e^2}{4\pi}$ und damit $\alpha_1(q^2) = \alpha(q^2)/\sin^2 \theta_W(q^2)$ steigen, $\alpha_W(q^2) = \frac{g^2}{4\pi} = \alpha_2(q^2)$ und $\alpha_s(q^2) = \alpha_3(q^2)$ fallen (asymptotische Freiheit) mit zunehmendem q^2 .



Für jede Darstellung D einer einfachen Lie-Gruppe mit Generatoren T_a gilt (vergleiche Spin!):

$$Sp_D T_a T_b = N_D \delta_{ab}.$$

$$\implies Sp Q^2 = Sp(T_3 + cT_1) = Sp T_3^2 + c^2 Sp T_1^2 = (1 + c^2) Sp T_3^2$$

mit $Sp T_1 T_3 = 0$ und $Sp T_1^2 = Sp T_3^2 = N_D$.

Mit $Sp_5 Q^2 = 0 + 1 + 3 \cdot \frac{1}{9} = \frac{4}{3}$ und

$Sp_5 T_3^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 0 + 0 + 0 = \frac{1}{2}$ gilt:

$$c^2 = \frac{5}{3} = \cot^2 \theta_W.$$

$\implies$ **Vorhersage** für den Weinberg-Winkel bei $q^2 = M_{GUT}$:

$$\sin^2 \theta_W(M_{GUT}^2) = \frac{1}{1 + c^2} = \frac{3}{8} = 0.375.$$

q^2 -Abhängigkeit der Eichkopplungen:

$$\alpha_i(q^2) = \frac{\alpha_i(q_0^2)}{1 + b_i \frac{\alpha_i(q_0^2)}{4\pi} \ln\left(\frac{q^2}{q_0^2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\alpha_i(q^2)} = \frac{1}{\alpha_i(q_0^2)} + \frac{b_i}{4\pi} \ln\left(\frac{q^2}{q_0^2}\right)$$

mit ($N_G =$ Zahl der Fermion-Generationen):

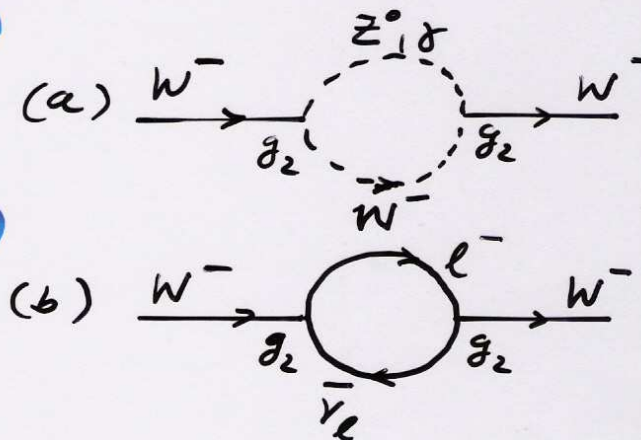
(g) (q) $b_3 = 11 - \frac{4}{3}N_G > 0$ (für $N_G \leq 8$) $= \underline{QCD} \rightarrow \alpha_s(q^2)$
 $SU(3) \subset SU(5)$

(a) (b) $b_2 = \frac{22}{3} - \frac{4}{3}N_G > 0$ (für $N_G \leq 5$)
 $SU(2) \subset SU(5)$

$\underline{GSW} \rightarrow \alpha_w(q^2)$
 $= \frac{g_2^2}{4\pi}$

$b'_1 = -\frac{4}{3}N_G < 0$

wie $\underline{QED} \rightarrow \alpha(q^2)$



z.B.:

$$\alpha_2(M_{GUT}^2) \equiv \alpha_3(M_{GUT}^2) = \alpha_5, \text{ d.h.}$$

$$\frac{1}{\alpha_3(q_0^2)} + \frac{b_3}{4\pi} \ln\left(\frac{M_{GUT}^2}{q_0^2}\right) = \frac{1}{\alpha_2(q_0^2)} + \frac{b_2}{4\pi} \ln\left(\frac{M_{GUT}^2}{q_0^2}\right),$$

$$\frac{1}{\alpha_3(q_0^2)} - \frac{1}{\alpha_2(q_0^2)} = -\frac{11}{12\pi} \ln\left(\frac{M_{GUT}^2}{q_0^2}\right).$$

Ebenso:

$$\underbrace{\frac{1}{\alpha_3(q_0^2)} - \frac{1}{\alpha_1(q_0^2)}} = -\frac{11}{4\pi} \ln\left(\frac{M_{GUT}^2}{q_0^2}\right)$$

$$= \frac{1}{\alpha_3(q_0^2)} - \frac{3}{5} \left(\frac{1}{\alpha(q_0^2)} - \frac{1}{\alpha_2(q_0^2)} \right)$$

$$\text{mit } \frac{1}{\alpha_1} = \frac{1}{c^2 \alpha'} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{\alpha'}$$

$$\text{und } \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha'} + \frac{1}{\alpha_2}, \quad \text{da } e^2 = \frac{g^2 g'^2}{g^2 + g'^2}.$$

$$\Rightarrow \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{\alpha_3(q_0^2)} - \frac{1}{\alpha(q_0^2)} = -\frac{11}{2\pi} \ln\left(\frac{M_{GUT}^2}{q_0^2}\right).$$

Mit $q_0^2 = M_Z^2$, $\alpha_3(M_Z^2) = \alpha_s(M_Z^2) = 0.119$ und $\alpha(M_Z^2) = 1/128.9$ Vorhersage für die GUT-Skala möglich:

$$\ln\left(\frac{M_{GUT}^2}{M_Z^2}\right) = 30.4 \quad \text{und}$$

$$M_{GUT} = 1.5 \cdot 10^{15} \text{ GeV} \ll M_{\text{Planck}} \approx 10^{19} \text{ GeV}.$$

3.2.3 Vorhersage von $\sin^2 \theta_W(M_W^2)$:

$$\sin^2 \theta_W = \frac{g_1^2}{g_1^2 + g_2^2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} = \frac{1}{1 + \frac{\alpha_2(q^2)}{\alpha_1(q^2)}}.$$

$$\sin^2 \theta_W(M_{GUT}^2) = \frac{1}{1 + c^2} = \frac{3}{8}.$$

Rückentwicklung von M_{GUT} :

$$\begin{aligned} & \cdot \frac{1}{\alpha'(M_W^2)} = \frac{5}{3} \frac{1}{\alpha_1(M_W^2)} \\ = & \frac{5}{3} \left[\frac{1}{\alpha_1(M_{GUT}^2)} + \frac{b'_1}{4\pi} \ln \left(\frac{M_W^2}{M_{GUT}^2} \right) \right] \\ \equiv & \frac{5}{3} \left[\frac{1}{\alpha_2(M_{GUT}^2)} - \frac{4N_G}{12\pi} \ln \left(\frac{M_W^2}{M_{GUT}^2} \right) \right] \\ = & \frac{5}{3} \left[\frac{1}{\alpha_2(M_W^2)} + \frac{22 - 4N_G}{12\pi} \ln \left(\frac{M_{GUT}^2}{M_W^2} \right) - \frac{4N_G}{12\pi} \ln \left(\frac{M_W^2}{M_{GUT}^2} \right) \right] \\ = & \frac{5}{3} \left[\frac{1}{\alpha_2(M_W^2)} - \frac{11}{6\pi} \ln \left(\frac{M_W^2}{M_{GUT}^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{\alpha_2}{\alpha_1}(M_W^2) &= \frac{5}{3} \left[1 - \frac{11\alpha_2(M_W^2)}{6\pi} \ln \left(\frac{M_W^2}{M_{GUT}^2} \right) \right] \\
&= \frac{5}{3} \left[1 - \frac{11G_F M_W^2}{3\pi^2 \sqrt{2}} \ln \left(\frac{M_W^2}{M_{GUT}^2} \right) \right] = 3.79,
\end{aligned}$$

unabhängig von N_G . Mit $M_W = 80.33$ GeV ist

$$\Rightarrow \sin^2 \theta_W(M_W^2) = \frac{1}{1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}(M_W^2)} = 0.209.$$

3.3 Neue Symmetrien: Supersymmetrie

Maximale nicht-triviale Erweiterung der Raum-Zeit-Symmetrien (sog. Poincaré-Gruppe):

Die Poincaré-Gruppe P besitzt die Generatoren:

P_μ : Raum-Zeit-Translationen und

$M_{\mu\nu}$: antisymmetrischer Tensor mit den unabhängigen Komponenten:

$\vec{J} = (M_{23}, M_{31}, M_{12})$ und $\vec{K} = (M_{01}, M_{02}, M_{03})$, wobei

J_i : Rotation um die i -Achse; K_i : Lorentz-Boost in i -Richtung ($i = x, y, z$).

Einzige konsistente Vereinigung der Raum-Zeit-Symmetrien mit einer internen Symmetriegruppe G , die nicht einfach ein direktes Produkt $P \otimes G$ ist (Coleman-Mandula-Theorem, 1967),

durch Einführung neuer **anti-kommutierender** Generatoren Q_α ($\alpha = 1, \dots, 4$) mit Spinor-Transformationseigenschaften (SUSY-Generatoren) mit

$$\begin{aligned} \{Q_\alpha, Q_\beta\} &\equiv Q_\alpha Q_\beta + Q_\beta Q_\alpha = \{\bar{Q}_\alpha, \bar{Q}_\beta\} = 0; \\ \{Q_\alpha, \bar{Q}_\beta\} &= 2(\gamma^\mu)_{\alpha\beta} P_\mu; \\ [Q_\alpha, P_\mu] &= 0; \\ [Q_\alpha, M_{\mu\nu}] &= \frac{1}{4}i(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)_{\alpha\beta} Q_\beta; \end{aligned}$$

Die SUSY-Generatoren haben folgende Wirkung auf Fermion (F)- und Boson (B)-Felder:

$$Q|F\rangle = |B\rangle; \quad Q|B\rangle = |F\rangle;$$

wobei $[B(x), B(x')] = 0$ und $\{F(x), F(x')\} = 0$.

⇒ Supersymmetrietransformationen verbinden Fermionen mit Bosonen.

SUSY-Generatoren $Q, \bar{Q}$ ändern den Spin um $\pm\frac{1}{2}$.

⇒ Super-Multipletts enthalten Fermionen und Bosonen mit folgender Spin-Zuordnung:

$$\begin{pmatrix} \text{Fermion} & \frac{1}{2} \\ \text{s-Fermion} & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \text{Eichboson} & 1 \\ \text{Gaugino} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \text{Higgs-Boson} & 0 \\ \text{Higgsino} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \text{Graviton} & 2 \\ \text{Gravitino} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Die Superpartner in den SUSY-Multipletts haben gleiche Massen und Eichladungen.

D.h. Superpartner-Zuordnungen unter den bekannten Teilchen des Standardmodells sind nicht möglich, **Erweiterung des Teilchenspektrums um neue SUSY-Teilchen ist notwendig.**

Da bisher keine Superpartner der Teilchen des Standardmodells entdeckt wurden, müssen diese größere Massen $\leq 1 - 2 \text{ TeV}$ besitzen, d.h. **die Supersymmetrie ist gebrochen**.

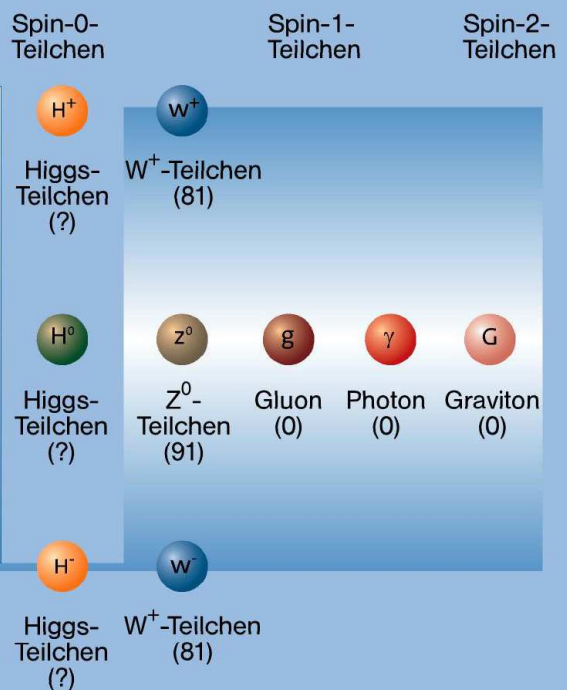
Der Mechanismus dafür ist unklar (spontane globale SUSY-Brechung in einem verborgenen, nur gravitativ mit den Standardmodellteilchen wechselwirkenden Sektor?, spontane lokale SUSY-Brechung?), so daß Vorhersagen für die Superpartnermassen nicht oder nur unter vereinfachenden Annahmen möglich sind.

Teilchen der Supersymmetrie

Superpartner der Kraftteilchen

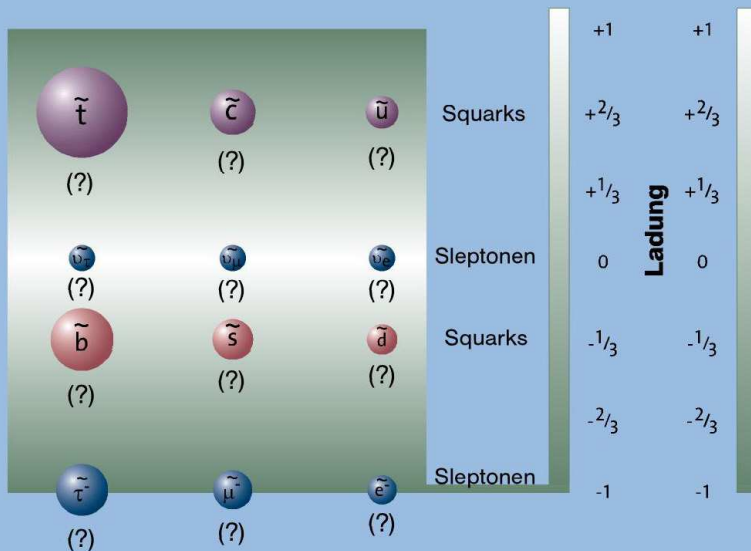


kraftvermittelnde Teilchen



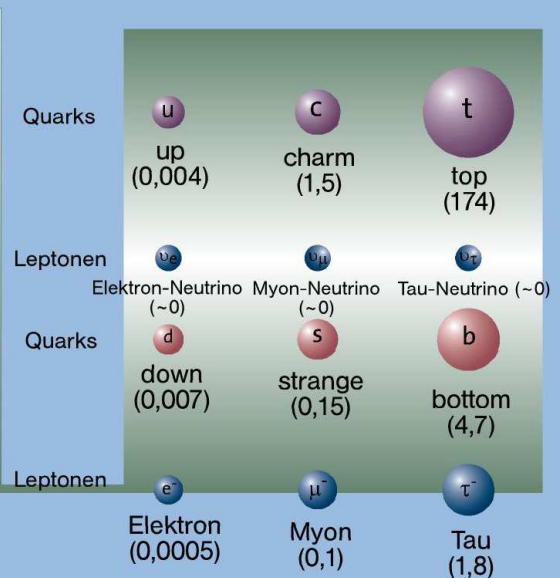
Superpartner der Materieteilchen

Spin-0-Teilchen



Materieteilchen

Spin- $1/2$ -Teilchen



3.3.1 Supersymmetrische Erweiterung des Standardmodells

Hinzufügen der Fermion- bzw. Boson-Terme der Superpartner in der Lagrange-Funktion mit den gleichen Eichkopplungen wie im Standardmodell.

Supersymmetrie mit Erhaltung der sog. R-Parität $R = (-1)^{3(B-L)+2S}$ ($R = +1$ für bekannte Teilchen, $R = -1$ für Sup[er]partner) führt zu folgenden Erhaltungssätzen:

1. Superpartner werden, ausgehend von SM-Teilchen, in Paaren erzeugt.
2. SUSY-Teilchen zerfallen schnell unter Emission eines Superpartners bis zum LSP.
3. Der **leichteste Superpartner (LSP)** ist neutral und stabil, d.h. nicht durch Zerfälle in Standardmodellteilchen im Detektor nachweisbar.

Keine Wechselwirkung des LSP im Detektor (Wirkungsquerschnitt so klein wie für Neutrinos), da nur unter Produktion schwerer SUSY-Partner.

Neue Wechselwirkungsprozesse im supersymmetrischen Standardmodell:

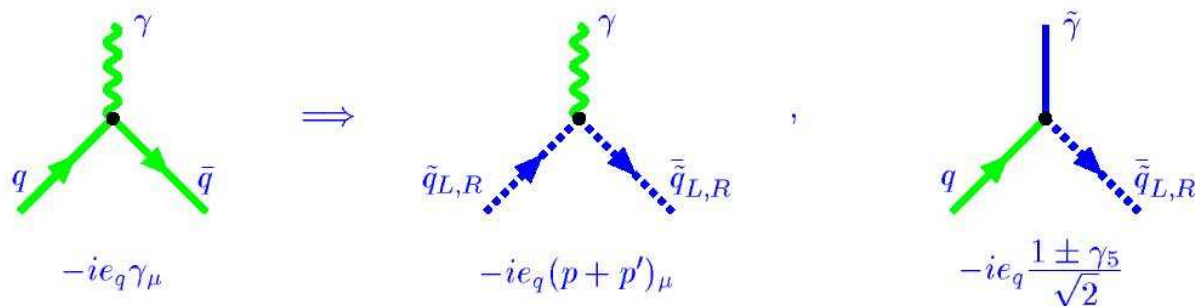
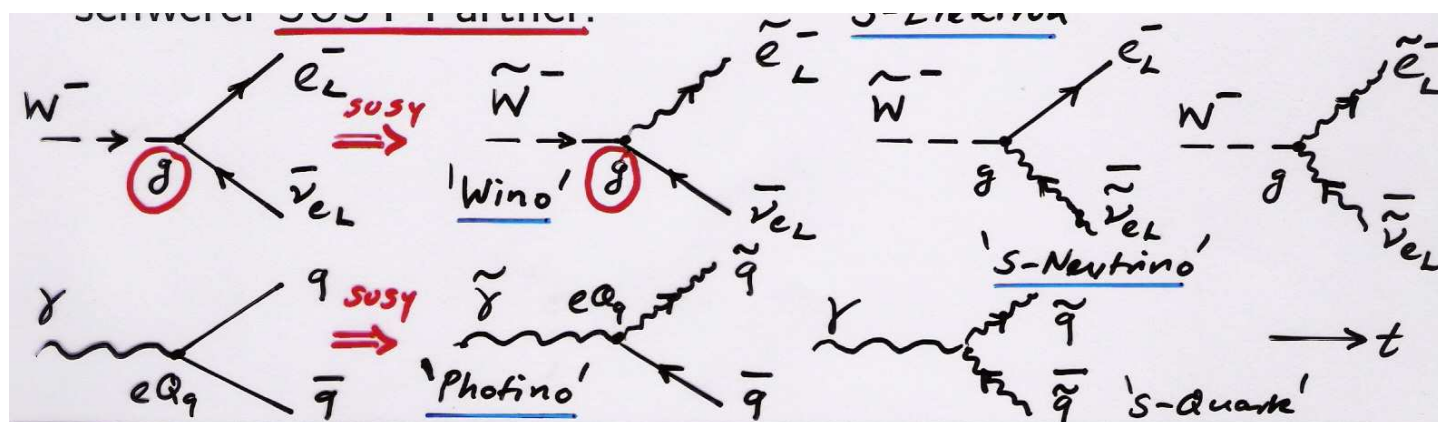


Fig. 12: Gauge-matter interaction

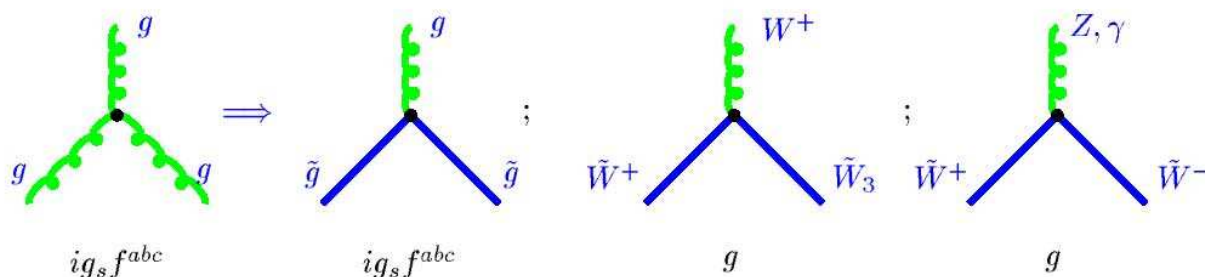


Fig. 13: Gauge self-interaction

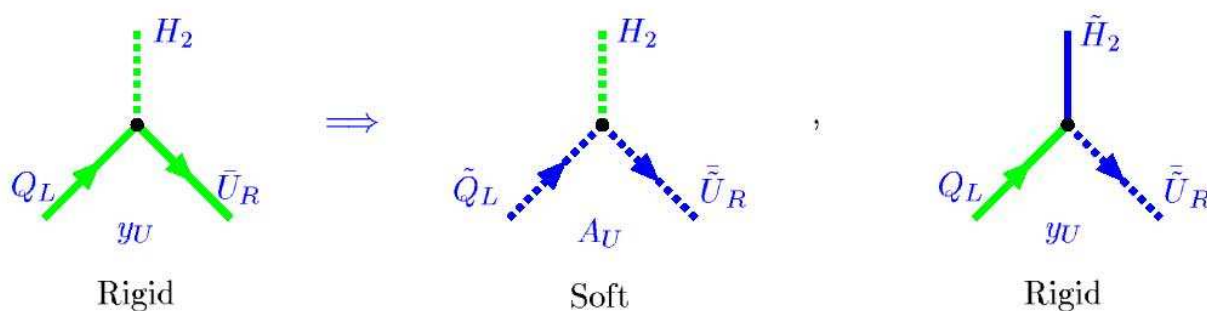


Fig. 14: Yukawa-type interaction

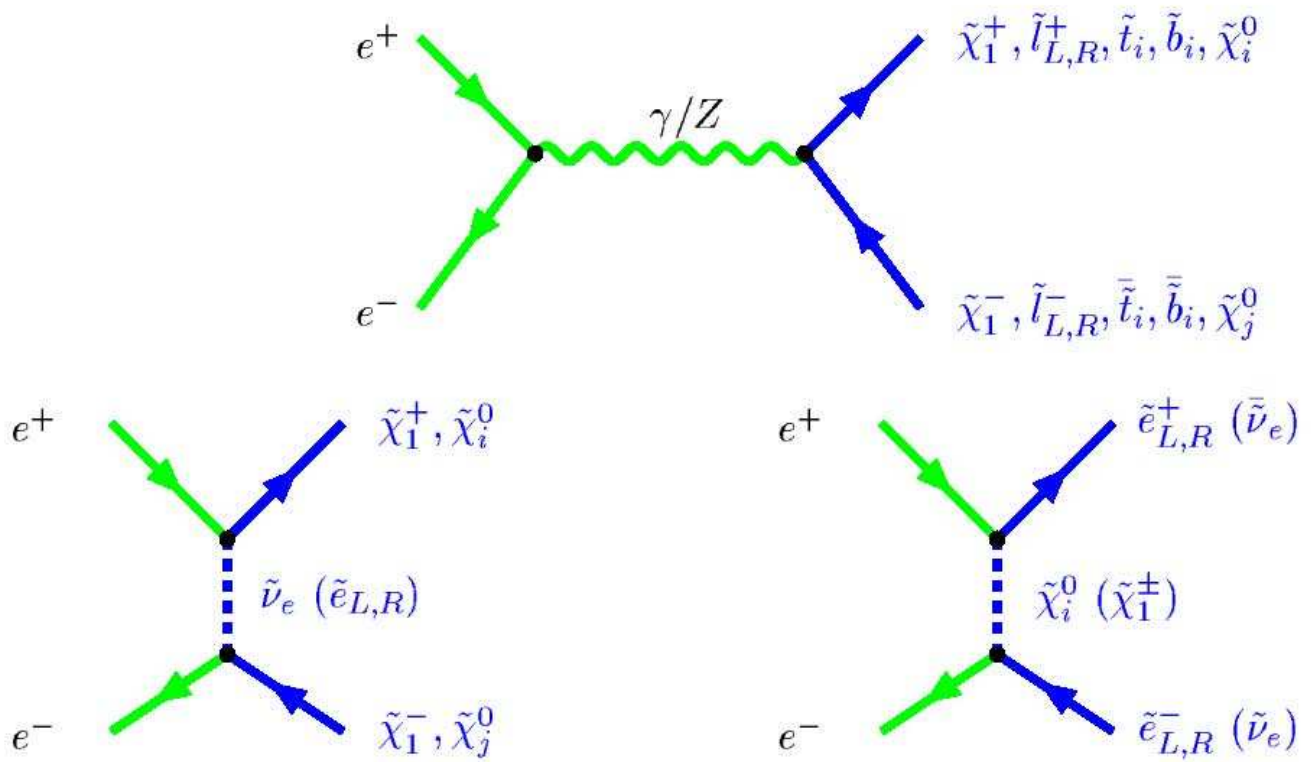


Fig. 16: Creation of superpartners

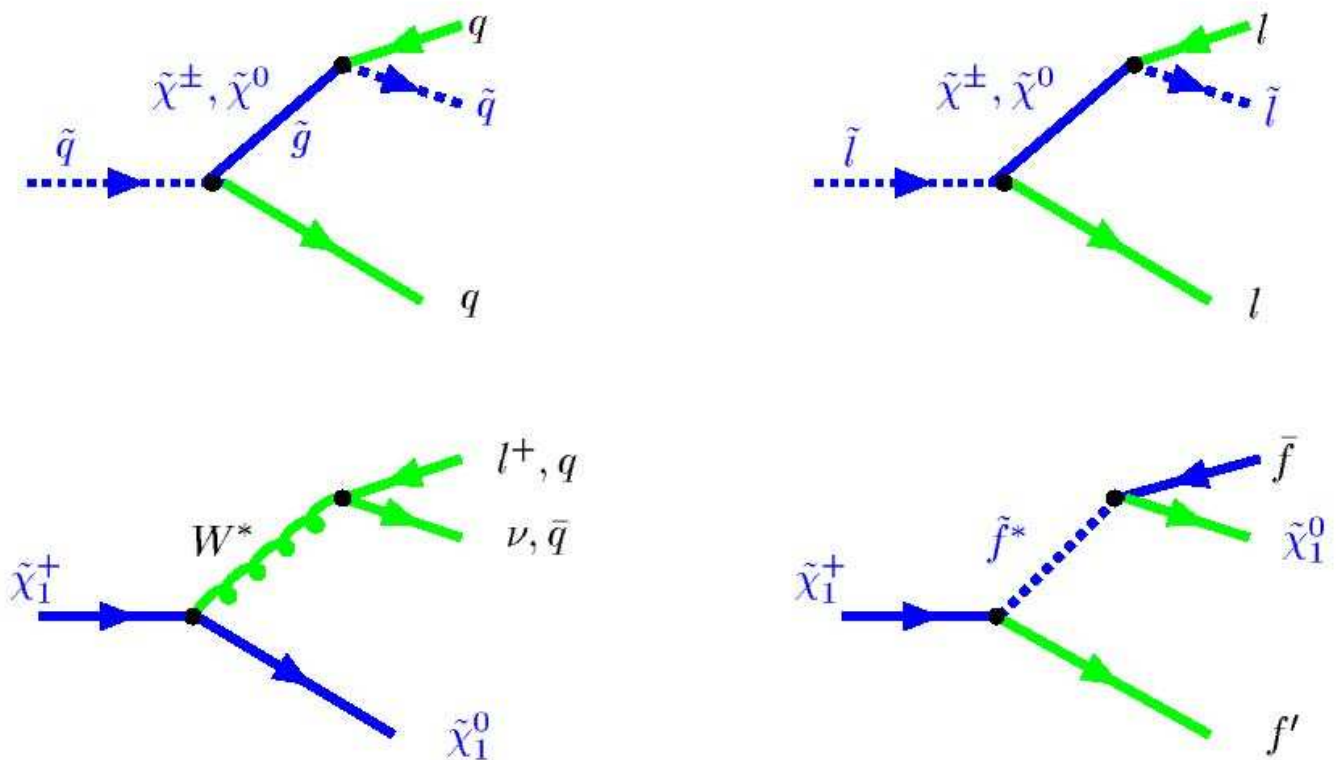


Fig. 17: Decay of superpartners

In supersymmetrischen Erweiterungen des Standardmodells (SM) wird für die elektroschwache Symmetriebrechung eine gerade Anzahl von komplexen skalaren Higgs-Doublets, also mindestens 2 Higgs-Doublets, separat für up- und down-Fermionen und daher mit entgegengesetzter Hyperladung, benötigt zur Aufhebung der von Spin- $\frac{1}{2}$ Higgsinos verursachten Anomalien.

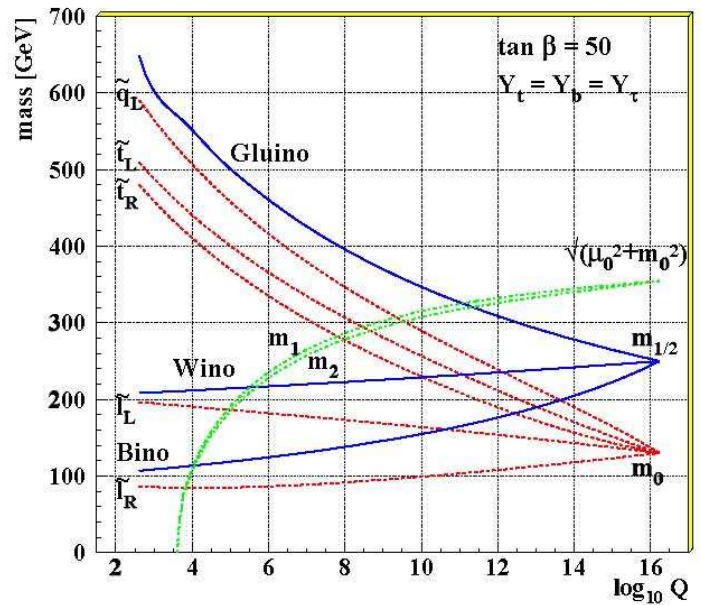
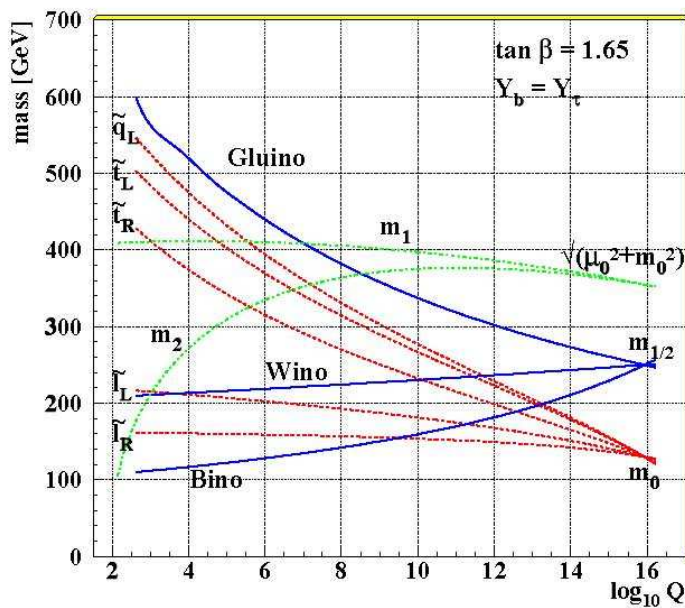
In der (minimalen supersymmetrischen Erweiterung des Standardmodells (MSSM)) verbleiben nach der spontanen Symmetriebrechung 5 massive skalare Higgs-Bosonen:

- h^0, H^0 (skalar, $CP = +1$),
- A^0 (pseudoskalar, $CP = -1$) und
- $H^\pm$.

mit zwei Vakuumerwartungswerten v_1 und v_2 .

$\tan \beta = \frac{v_2}{v_1}$ und M_{A^0} bestimmen die Zerfallsraten aller Higgs-Teilchen. Die dominierenden Zerfallskanäle im MSSM unterscheiden sich i.a. von denen im SM.

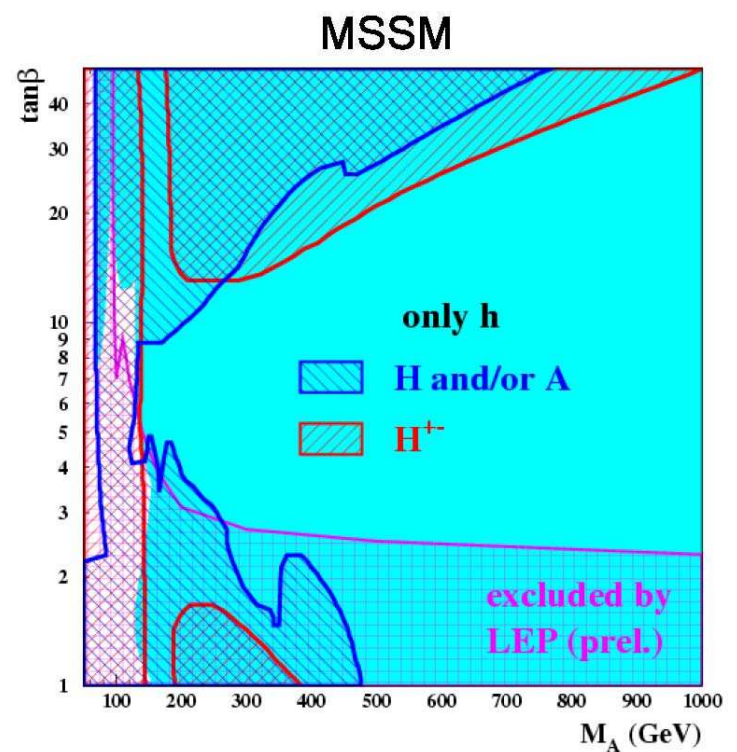
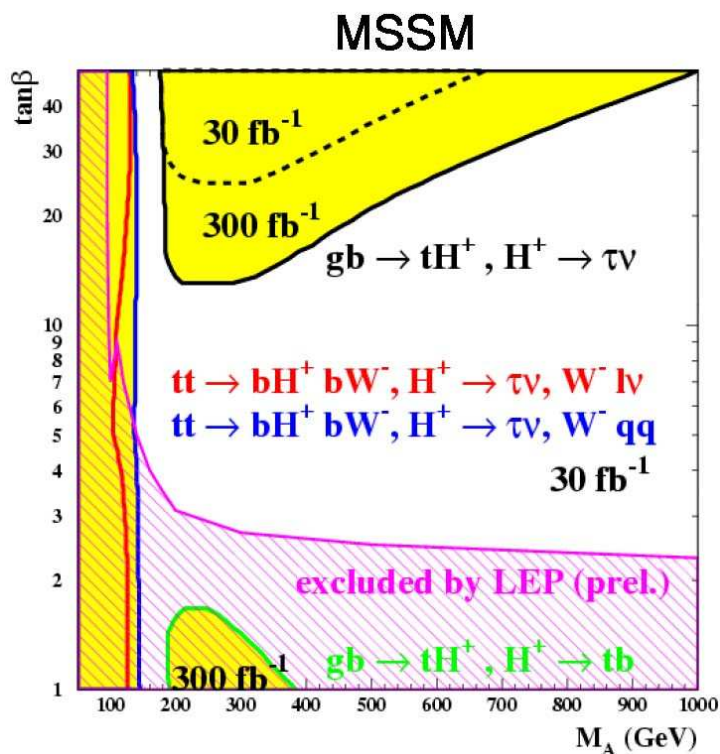
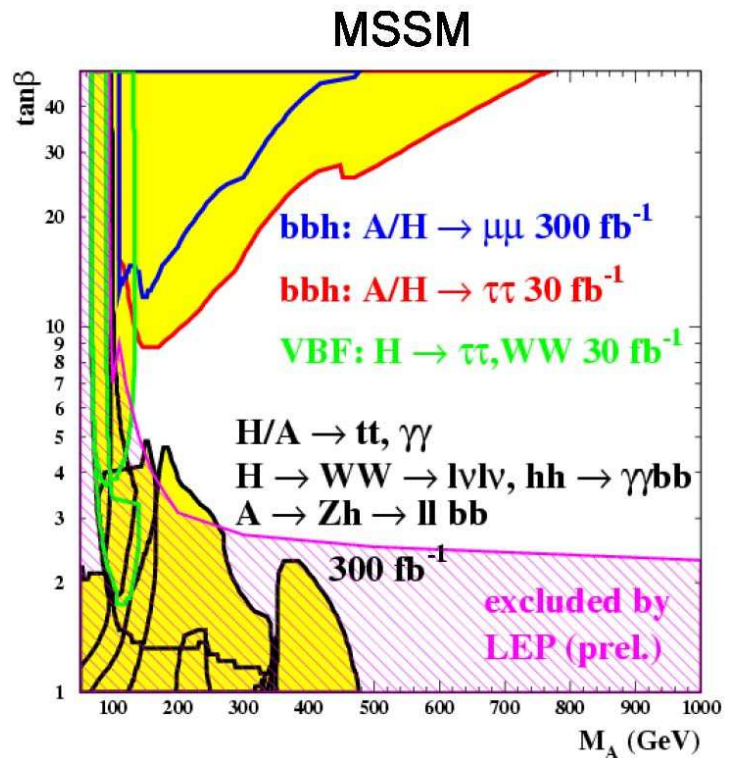
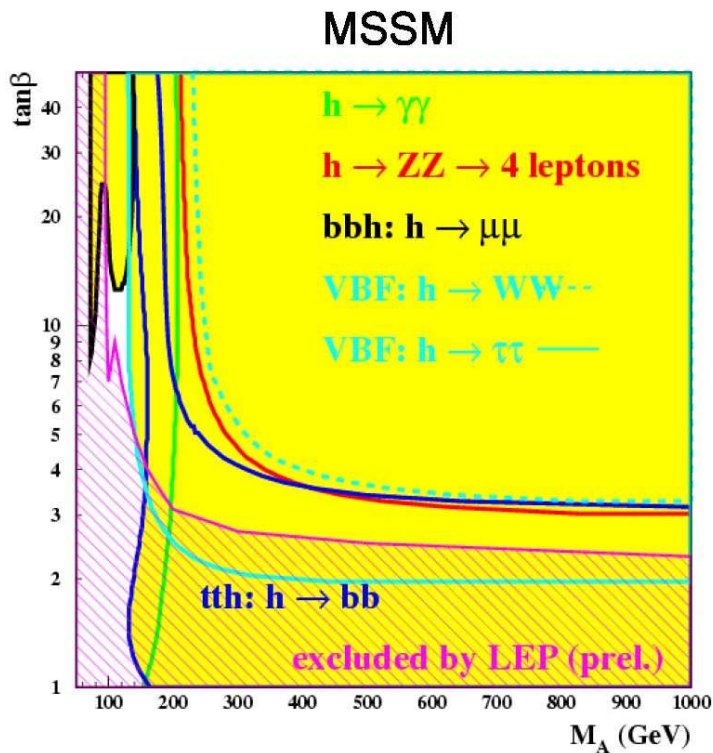
Die **elektroschwache Symmetriebrechung** wird durch SUSY-Strahlungskorrekturen erzeugt: der in Abhängigkeit von der Energie laufende Higgs-Massenparameter μ^2 nimmt bei niedrigen Energien $\approx M_W$ **negative Werte** an.



Begrenzung für das leichteste MSSM-Higgs-Boson: $M_{h^0} < 130$ GeV wegen der Relation zu M_Z aufgrund der Supersymmetrie!

Die Suche bei LEP II und bisher beim TEVATRON war erfolglos. Gute Aussichten beim LHC.

Suche nach MSSM Higgs-Bosonen am LHC:



3.3.2 Vorzüge der Supersymmetrie

- Vereinheitlichung von Fermionen und Bosonen und von inneren und Raum-Zeit-Symmetrien.
- Feldtheorien mit lokaler Supersymmetrie sind Kandidaten für eine Quantentheorie der Gravitation (Supergravitation) und ihre Vereinigung mit den anderen Eichwechselwirkungen:

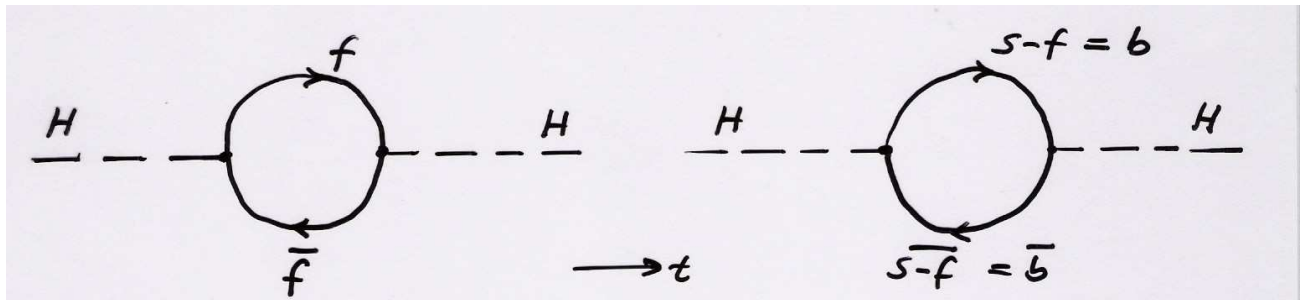
$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_\beta\} = 2(\gamma^\mu)_{\alpha\beta} P_\mu$$

(Generator für lokale Raum-Zeit-Transformationen: Symmetrie der Allgemeinen Relativitätstheorie).

- LSP ist der momentan beste Kandidat für die 'Dunkle Materie'.

- Hauptmotivation:

Elegante und lange einzige **Lösung des Problems der divergierenden Higgs-Massenkorrekturen** durch Kompensation der Vakuumpolarisationsbeiträge der Fermionen durch die ihrer Superpartner, natürliche Ergänzung des Standardmodells:



$$\delta M_H^2 \sim g_Y^2 \int_0^\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2} \sim g_Y^2 \Lambda^2;$$

$$\xRightarrow{SUSY} \delta M_H^2 \sim +[g_Y^2 \Lambda^2]_{\text{Bosonen}} - [g_Y^2 \Lambda^2]_{\text{Fermionen}} \approx 0.$$

Kompensation der Beiträge der Fermionen und ihrer Superpartner bis auf Massenunterschiede verursacht durch SUSY-Brechung.

$\Rightarrow$ Korrekturen zur Higgs-Masse und daher Higgs-Masse klein unabhängig vom Abscheideparameter Λ , der sehr groß sein kann, z.B. $\Lambda = \Lambda_{GUT} \approx 10^{15}$ GeV oder $\Lambda = M_{\text{Planck}} \approx 10^{19}$ GeV, je nachdem, wie weit das Standardmodell gültig ist.

Kompensation der **quadratischen Divergenz** der Massenkorrektur in $M_H^2 = M_{H,0}^2 + \delta M_H^2$ mit sehr hoher Genauigkeit wäre unnatürlich ('Hierarchie'- oder Feinabstimmungsproblem).

Kürzlich Konkurrenz durch Modelle mit großen extra Raumdimensionen und Vereinheitlichung aller Kräfte einschließlich der Gravitation bereits bei der elektroschwachen Energieskala.

- Supersymmetrie in Verbindung mit GUTs:

- Vorhersage des Weinberg-Winkels

mit Genauigkeit $< 0.2\%$ (im SUSY $SU(5)$ -Modell):

$$\sin^2 \theta_W(M_Z) = 0.2336 \pm 0.0017.$$

Standardmodell ohne SUSY:

$$\sin^2 \theta_W(M_Z) = 0.209.$$

Experiment (LEP I, SLC):

$$\sin^2 \theta_W(M_Z) = 0.23146 \pm 0.00017.$$

- Vereinigung der Eichkopplungskonstanten bei hohen Energien:

