6. Das Standardmodell der Teilchenphysik

Lokale Eichfeldtheorien (Yang-Mills-Theorien; Yang und Mills 1954) erlauben eine einheitliche Beschreibung aller bekannten Wechselwirkungen der fundamentalen Materiebausteine (Leptonen und Quarks) basierend auf einem Symmetrieprinzip.

Die Eichsymmetriegruppen legen die Eigenschaften der Wechselwirkungen vollständig fest. Die elementaren Fermionen (Spin $\frac{1}{2}$) besetzen die Multipletts der fundamentalen Darstellungen der Eichsymmetrien.

Die Generatoren der Eichsymmetriegruppen (Lie-Gruppen) sind die verallgemeinerten Ladungsoperatoren der Wechselwirkungen (hermitisch). Die Wechselwirkung wird vermittelt durch den Austausch von Vektorbosonen (Spin 1), den Eichfeldquanten.

Die elektromagnetische, die schwache und die starke Wechselwirkung lassen sich durch die einfachsten speziellen unitären Symmetriegruppen beschreiben:

Wechselwirkung	El. magn.	Schwach	Stark
Eichsymmetrie	$U(1)$	$SU(2)$	$SU(3)$
Theorie	QED	GSW	QCD
Ladungen	elektrische Ladung	3 schwache Ladungen	8 Farb-ladungen
Eichbosonen	Photon	$W^{\pm}$, Z^0	8 Gluonen

Die Zahl der unabängigen Parameter und damit der Generatoren (verallg. Ladungen der Gruppe $SU(N)$ ist N^2-1 (Ordnung der Gruppe).

Die Dimension der fundamentalen Darstellung ist N: die Zahl der inneren Freiheitsgrade der Teilchenzustände.

Die Eichsymmetriegruppe des Standardmodells ist:

$$U(1) \otimes SU(2) \otimes SU(3)$$

Die Fermionenzustände des Standardmodells sind daher ($f = 1, 2;\ \alpha = 1, 2, 3$):

$$\psi_{f,\alpha}(x; E > 0) = u(p) e^{-ip_\mu x^\mu} \times e^{iQ\alpha} \times \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L \times \begin{pmatrix} r \\ g \\ b \end{pmatrix}_q$$

$$\psi_{f,\alpha}(x; E < 0) = v(p) e^{ip_m u \cdot x^\mu} .... \quad (\text{Antiteilchen})$$

Vorbild für die moderne Beschreibung der Teilchenphysik durch Eichtheorien ist die Quantenelektrodynamik.

6.1 Quantenelektrodynamik (QED)

Eichfeldtheorie mit der Symmetriegruppe U(1) (elektrische Ladung).

Eichfeld (Photonfeld): 4-Vektorpotential $A_\mu(x)$.

Eichboson (Photon): Spin 1, masselos aufgrund der Eichsymmetrie.

Lagrangedichte für Kopplung an elementare Fermionen ($f = e, \mu, \tau, u, d, s, c, b, t$):

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{QED} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad + \quad \sum_f \overline{\psi}_f(i\gamma^\mu D_\mu - m_f)\psi_f \\
&= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad + \quad \sum_f \overline{\psi}_f(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_f)\psi_f \\
&\qquad\qquad - \quad e\Big(\sum_f Q_f \overline{\psi}_f \gamma^\mu \psi_f\Big) A_\mu \\
&= \mathcal{L}_{\text{frei}} \quad + \quad \mathcal{L}_{WW}
\end{aligned}$$

mit der kovarianten Ableitung

$$D_\mu = \partial_\mu + ieQ_f A_\mu(x)$$

und dem Feldtensor

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\nu A_\mu(x) - \partial_\mu A_\nu(x).$$

Strom-Eichfeld-Kopplung:

$\mathcal{L}_{WW} = -e j^\mu_{\text{el.magn.}} A_\mu$

mit $j^\mu_{\text{el.magn.}} = \sum_f Q_f \overline{\psi}_f \gamma^\mu \psi_f$.

Die Kopplungstärke ist gegeben durch die Elementarladung e.

Q_f ist Eigenwert des Ladungsoperators.

Lokale U(1)-Eichtransformationen:

$$\begin{aligned}
\psi_f(x) &\longrightarrow e^{ieQ_f\alpha(x)}\psi_f(x) \\
\overline{\psi}_f(x) &\longrightarrow e^{-ieQ_f\alpha(x)}\overline{\psi}_f(x) \\
A_\mu(x) &\longrightarrow A_\mu(x) - \frac{1}{eQ_f}\partial_\mu\alpha(x) \\
D_\mu\psi_f(x) &\longrightarrow e^{ieQ_f\alpha(x)} D_\mu\psi_f(x).
\end{aligned}$$

d.h. $\overline{\psi}_f \gamma_\mu \psi_f$, $\overline{\psi}_f D_\mu \psi_f$ sind invariant.

Globale U(1)-Eichsymmetrie $\Longrightarrow$ Erhaltung der elektrischen Ladung (Noether-Theorem):

Kontinuitätsgleichung:

$$\partial_\mu j^\mu_{el.magn.} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0.$$

$$\Longrightarrow \frac{dQ}{dt} = \int d^3x \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\int d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\oint d\vec{\sigma} \cdot \vec{j} = 0.$$

Die Eichinvarianz verlangt $m_\gamma = 0$.

Weitere Symmetrien der QED:

- Lorentzinvarianz + Invarianz unter Raum-Zeit-Translationen (Homogenität und Isotropie der Raum-Zeit)

  $\Longrightarrow$ Energie-Impuls- und Drehimpulserhaltung (Noether-Theorem).

- Diskrete Symmetrien:

  1. Lepton- und Quarkflavour-Erhaltung.
  2. Parität P (Raumspiegelung):
     $\vec{x} \longrightarrow -\vec{x}$, $\vec{p} \longrightarrow -\vec{p}$.

     $$\psi(t,\vec{x}) \longrightarrow \psi^P(t,-\vec{x}) = \eta_P \gamma^0 \psi(t,\vec{x})$$

     erfüllt die raumgespiegelte Dirac-Gleichung.
  3. Zeitinversion T: $t \longrightarrow -t$.

     $$\psi(t,\vec{x}) \longrightarrow \psi^T(-t,\vec{x}) = i\gamma^1\gamma^3\psi^*(t,\vec{x})$$

     erfüllt die zeitgespiegelte Dirac-Gleichung.

4. Ladungskonjugation C:
   Teilchen $\longrightarrow$ Antiteilchen, $Q_f \longrightarrow -Q_f$.

$$\psi(t,\vec{x}) \longrightarrow \psi^C(t,\vec{x}) = i\eta_C \gamma^2 \psi^*(t,\vec{x})$$

   erfüllt die konjugierte Dirac-Gleichung.

$\Longrightarrow$ CPT-Symmetrie,

d.h. T und CP haben gleiche Wirkung.

$\Longrightarrow$ gleiche Lebensdauern und Masen von Teilchen und Antiteilchen.

CPT-Erhaltung gilt allgemein für jede lokale, lorentzinvariante Feldtheorie mit $\mathcal{L}^\dagger = \mathcal{L}$ und Spin-Statistik-Relation

(Schwinger 1951, Pauli 1955, Lüders 1957).

6.2 Schwache Wechselwirkung

Beschreibung in Analogie zur QED mit Kopplung schwacher Ströme an massive, elektrisch geladene Feldquanten $W^{\pm}$:

$$j^{\mu -} W_{\mu}^{+} + j^{\mu +} W_{\mu}^{-}$$

Kurzreichweitige Wechselwirkung mit Änderung der Lepton- und Quark-Flavour.

Nuklearer β-Zerfall: $n \longrightarrow p e^{-} \overline{\nu}_{e}$

Myonzerfall: $\mu^{+} \longrightarrow e^{+} \nu_{e} \overline{\nu}_{\mu}$.

Schwache Übergänge legen Paarung der elementaren Fermionen in Dubletts nahe, der fundamentalen Darstellung der SU(2)-Gruppe (in Analogie zu Spin und Isospin).

Linkshändige Zustände in SU(2)-Dubletts:

$$L_\ell : \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix}_L \qquad \begin{matrix} Q_f \\ 0 \\ -1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} Y_f \\ -1 \\ -1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} I_f^0 \\ +\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{matrix}$$

$$L_q : \begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix} t \\ b' \end{pmatrix}_L \qquad \begin{matrix} +\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{matrix} \quad \begin{matrix} +\frac{1}{3} \\ +\frac{1}{3} \end{matrix} \quad \begin{matrix} +\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{matrix}$$

Rechtshändige Zustände in $\mathrm{SU}(2) - \mathrm{Singuletts}$:

ν_{eR}	$\nu_{\mu R}$	$\nu_{\tau R}$	0	0	0
e_R^-	μ_R^-	τ_R^-	-1	-2	0
u_R	c_R	t_R	$+\frac{2}{3}$	$+\frac{4}{3}$	0
d_R	s_R	b_R	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0

$$Q = I^0 + Y/2$$

Die schwache Wechselwirkung bewirkt flavour-ändernde Übergänge innnerhalb der Fermion-Dubletts L_ℓ (Leptonen) und L_q (Quarks).

Nur linkshändige Fermionen ψ_L bzw. rechtshändige Anti-Fermionen $\overline{\psi}_R$ nehmen an der schwachen WW teil.

$\Longleftrightarrow$ beobachtete maximale Paritätsverletzung durch die schwache WW ($V-A$-Form der schwachen Ströme).

Paritätsverletzung in der schwachen Wechselwirkung:

- $K^+ \to \pi^+\pi^0$ und $K^+ \to \pi^+\pi^-\pi^+$ (Lee, Yang 1956).
- Elektronpolarisation im Kern-β-Zerfall (Wu 1957).

Projektion der Chiralitätszustände:

$$\begin{aligned}
\psi_L &= P_L\psi = (\frac{1-\gamma_5}{2})\psi \\
\psi_R &= P_R\psi = (\frac{1-\gamma_5}{2})\psi \\
\overline{\psi}_L &= (P_L\psi)^\dagger\gamma^0 = \overline{\psi}P_R \\
\overline{\psi}_R &= (P_R\psi)^\dagger\gamma^0 = \overline{\psi}P_L
\end{aligned}$$

mit $P_L + P_L = 1$, $P_L^2 = P_L$, $P_R^2 = P_R$, $\gamma^\mu P_L = P_R\gamma^\mu$.

Chiralität $\gamma_5 = \gamma_5^\dagger$:

$$\begin{aligned} \gamma_5 \psi_L &= -\psi_L \\ \gamma_5 \psi_R &= \psi_R \end{aligned}$$

Die Helizität $h = \frac{\vec{s}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|}$ ist abhängig vom Bezugssystem (Impulsrichtung), außer für masselose Teilchen.

Schwache Fermion-Ströme:

$$\begin{aligned} j^\mu_{\text{schwach}} &= \underline{\overline{\psi}_L \gamma^\mu \psi_L} \\ &= (P_L\psi)^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu P_L \psi = \psi^\dagger P_L \gamma^0 \gamma^\mu P_L \psi \\ &= \overline{\psi}\gamma^\mu P_L \psi = \underline{\frac{1}{2}\overline{\psi}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\psi} \end{aligned}$$

d.h. Vektor (γ^μ)–Axialvektor ($\gamma^\mu\gamma_5$)-, $V-A$-Strom.

Lokale schwache Isospin-Eichsymmetrie $SU(2)_L$:

SU(2)-Dubletts (L): $L_f \longrightarrow e^{i\vec{I}\cdot\vec{\beta}} L_f$.

SU(2)-Singuletts (R): $\psi_R \longrightarrow \psi_R$.

3 Parameter (z.B. Euler-Winkel), 3 Generatoren:

Isospinvektor $\vec{I} = \begin{pmatrix} I_x \\ I_y \\ I_z \end{pmatrix}$

Lie-Algebra: $[I_i, I_j] = i\varepsilon_{ijk} I_k$

mit Strukturkonstanten ε_{ijk}.

Auf- und Absteigeoperatoren: $I^{\pm} = \frac{1}{2}(I_x \pm iI_y)$; $I^0 = I_z$.

Fundamentale SU(2)-Darstellung (2-dimensional):

- Fermion-Dubletts mit $|\vec{I}| = \frac{1}{2}$, $I_z = \pm\frac{1}{2}$.
- $\vec{I} = \frac{\vec{\tau}}{2}$ mit Pauli'schen Spin-Matrizen τ_i $(i = 1, 2, 3)$.
  $[\tau_i, \tau_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\tau_k, \qquad \tau^{\pm} = \frac{1}{2}(\tau_1 \pm i\tau_2).$

$$\tau^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \tau^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6.3 Elektroschwache Wechselwirkung (GSW-Theorie)

Gemeinsamer Ansatz mit lokaler $SU(2)_L$- und $U(1)_Y$-Eichsymmetrie

(Glashow 1961, Salam 1968, Weinberg 1967).

Die elektromagnetische Wechselwirkung muß wegen der elektrisch geladenen schwachen Eichbosonen $W^{\pm}$ miteingeschlossen werden.

Y ist die schwache Hyperladung mit $[I_z, Y] = 0$ (direktes Produkt der Symmetriegruppen).

Deshalb is Y_f gleich für die beiden Mitglieder eines $SU(2)_L$-Dubletts und $Q \neq Y$.

Die elektromagnetischen Ladungen in den Multipletts ergeben sich konsistent aus der Beziehung $Q = I_3 + Y/2$.

Damit entsteht eine vereinheitlichte Eichtheorie der schwachen und der elektromagnetischen Wechselwirkung, die aber noch zwei verschiedene Kopplungskonstanten g (schwacher Isospin) und g' (schwache Hyperladung) enthält:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{SU(2)\times U(1)} = -\frac{1}{4} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} \quad &- \quad \frac{1}{4} F^i_{\mu\nu} F^{i\mu\nu} \\ + \sum_f \overline{\psi}_{fR} (i\gamma^\mu D_{\mu R}) \psi_{fR} \quad &+ \quad \sum_L \overline{L}_f (i\gamma^\mu D_{\mu L}) L_f \end{aligned}$$

mit kovarianter Ableitung:

$$\begin{aligned} D_{\mu L} &= \partial_\mu \cdot 1 + ig' \frac{Y_{fL}}{2} B_\mu(x) \cdot I + ig \vec{I} \cdot \vec{W}_\mu(x) \\ &= \partial_\mu \cdot 1 + i \frac{g'}{2} Y_{fL} B_\mu(x) \cdot I + i \frac{g}{2} \vec{\tau} \cdot \vec{W}_\mu(x) \\ D_{\mu R} &= \partial_\mu + ig' \frac{Y_{fR}}{2} B_\mu(x), \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ 4 masselose Eichfelder für $U(1)_Y$ und $SU(2)_L$:

$$B_\mu(x) \text{ und } \vec{W}_\mu(x) = \begin{pmatrix} W_\mu^x(x) \\ W_\mu^y(x) \\ W_\mu^z(x) \end{pmatrix}$$

mit den Feldtensoren

$$\begin{aligned} f_{\mu\nu} &= \partial_\nu B_\mu(x) - \partial_\mu B_\nu(x) \\ \cdot & \\ F^i_{\mu\nu} &= \partial_\nu W^i_\mu(x) - \partial_\mu W^i_\nu(x) + g \varepsilon^{ijk} W^j_\mu(x) W^k_\mu(x). \end{aligned}$$

Alle Fermion-Massen $= 0$ wegen globaler $SU(2)_L$-Invarianz.

Unterschiedliche Massen in den Fermion-Dubletts verletzen die SU(2)-Symmetrie. Ein Dirac-Massenterm $m\overline{\psi}\psi = m(\overline{\psi}_L\psi_R + \overline{\psi}_R\psi_L)$ ist nicht invariant.

$\Longrightarrow$ Massen der elektroschwachen Eichbosonen (außer γ) und der Fermionen durch spontane Brechung der lokalen $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$-Eichsymmetrie (Higgs-Mechanismus).

Lokale SU(2)-Eichtransformationen U(x):

$$L \longrightarrow L' = U(x) \cdot L = e^{ig\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\beta}(x)} L$$

Damit die Lagrange-Dichte invariant beleibt, ist die die Transformation der kovarianten Ableitung nach Definition:

$$D'_\mu L' = (\partial_\mu + ig\frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{W}'_\mu) L' \equiv U(D_\mu L)$$

(d.h. $D'_\mu = U D_\mu U^{-1}$).

$$\begin{aligned} \Longrightarrow U(\partial_\mu L) \quad &+ \quad (\partial_\mu U)L + ig\frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{W}'_\mu (U \cdot L) \\ &\equiv \quad U(\partial_\mu L) + igU(\frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{W}_\mu)L \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{W}'_\mu (U \cdot L) = U(\frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{W}_\mu)L - \frac{1}{ig}(\partial_\mu U)L.$$

Damit ist die Eichtransformation der nicht-Abelschen Eichfelder definiert durch:

$$\vec{\tau} \cdot \vec{W}_\mu \longrightarrow \vec{\tau} \cdot \vec{W}'_\mu = U(\vec{\tau} \cdot \vec{W}_\mu)U^{-1} + \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^{-1}$$

Für infinitesimale Eichtransformationen,
$U(x) = 1 + ig\frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{\beta}(x)$, gilt:

$$W_\mu^i(x) \longrightarrow W_\mu^{i\prime}(x) = W_\mu^i(x) - \frac{1}{g}\partial_\mu \beta^i(x) - \varepsilon^{ijk}\beta^j(x) W_\mu^k(x)$$

Für Abelsche $U(1)_Y$-Eichtransformationen,
$U_Y(x) = e^{i\frac{Y}{2}\alpha(x)}$, gilt allgemein:

$$\begin{aligned} B_\mu(x) \longrightarrow B'_\mu(x) &= U_Y B_\mu U_Y^{-1} + \frac{2i}{Y}(\partial_\mu U_Y) U_Y^{-1} \\ &\equiv B_\mu(x) - \partial_\mu \alpha(x) \end{aligned}$$

Umformung der Lagrange-Funktion:

unter Benutzung von

$$\begin{aligned}
\underline{\overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi} &= \overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu(P_L^2+P_R^2)\psi \\
&= \overline{\psi}P_R\gamma^\mu\partial_\mu P_L\psi + \overline{\psi}P_L\gamma^\mu\partial_\mu P_R\psi \\
&= \underline{\overline{\psi}_L\gamma^\mu\partial_\mu\psi_L + \overline{\psi}_R\gamma^\mu\partial_\mu\psi_R}
\end{aligned}$$

mit $\gamma^\mu P_{L,R} = P_{R,L}\gamma^\mu$, $\overline{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$
und $\overline{\psi}_L = (P_L\psi)^\dagger\gamma^0 = \psi^\dagger P_L\gamma^0 = \overline{\psi}P_R$.

$$\begin{aligned}
\cdot \quad & \mathcal{L}_{SU(2)\times U(1)} = \\
- \quad & \frac{1}{4}f_{\mu\nu}f^{\mu\nu} - \frac{1}{4}F^i_{\mu\nu}F^{i\mu\nu} + \sum_f \overline{\psi}_f(i\gamma^\mu\partial_\mu)\psi_f \\
- \quad & g'\sum_f(\overline{\psi}_f\gamma^\mu\frac{Y_f}{2}\psi_f)B_\mu - g\sum_L(\overline{L}_f\gamma^\mu\frac{\vec{\tau}}{2}\cdot L_f)\vec{W}_\mu \\
= \quad & \mathcal{L}_{\text{frei}} + \mathcal{L}_{\text{WW}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{WW} &= -g' j_Y^\mu B_\mu - g\vec{j}_I^\mu\cdot\vec{W}_\mu \\
&= -g' j_Y^\mu B_\mu - g j_I^{\mu 0}W_\mu^0 - \frac{g}{\sqrt{2}}(j_I^{\mu -}W_\mu^+ + j_I^{\mu +}W_\mu^-) \\
&= \mathcal{L}_{NC} + \mathcal{L}_{CC}
\end{aligned}$$

mit dem flavour-ändernden geladenen schwachen Strom (CC):

$$j_I^{\mu\pm} = \sum_L \overline{L}_f \gamma^\mu \tau^\pm L_f = j_I^{\mu 1} \pm i j_i^{\mu 2}$$

und den geladenen schwachen Eichbosonen (siehe β-Zerfälle):

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 \pm i W_\mu^2)$$

Denn es gilt:

$$\begin{aligned} . \quad & (j_I^{\mu -} W_\mu^+ + j_I^{\mu +} W_\mu^-) = \\ = \quad & (j_I^1 - i j_I^2)\frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 + i W_\mu^2) + (j_I^{\mu 1} + i j_I^{\mu 2})\frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 - i W_\mu^2) \\ = \quad & \sqrt{2}(j_I^{\mu 1} W_\mu^1 + j_I^{\mu 2} W_\mu^2). \end{aligned}$$

Die flavour-erhaltenden neutralen elektroschwachen Ströme j_Y^μ und $j_I^{\mu 0}$ koppeln an die neutralen Eichbosonfelder $B_\mu(x)$ und W_μ^0.

Wie läßt sich der elektromagnetische Strom der QED identifizieren? Gibt es einen neutralen schwachen Strom?

Die erhaltenen Ladungen aufgrund der globalen SU(2)-Eichsymmetrie sind:

$$I^i = \int d^3x \overline{L} \gamma^0 \frac{\tau^i}{2} L; \frac{dI^i}{dt} = 0$$

mit $[I^i, I^j] = i\varepsilon^{ijk} I^k$.

Beispiel: die erste Lepton-Familie $L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L$:

$$
\begin{aligned}
. \quad & \mathcal{L}_{WW}(SU(2)) = -g\overline{L}(\gamma^\mu \frac{\tau^i}{2} W_\mu^i) L \\
= \quad & -\frac{g}{2}(\overline{\nu}_{eL}, \overline{e}_L)\gamma^\mu \begin{pmatrix} W_\mu^3 & W_\mu^1 - iW_\mu^2 \\ W_\mu^1 + iW_\mu^2 & -W_\mu^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix} \\
= \quad & -\frac{g}{2}(\overline{\nu}_{eL}, \overline{e}_L)\gamma^\mu \begin{pmatrix} W_\mu^0 & \sqrt{2}W_\mu^- \\ \sqrt{2}W_\mu^+ & -W_\mu^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix} \\
= \quad & -\frac{g}{2}[\overline{\nu}_e \gamma^\mu (1-\gamma_5)\nu_e W_\mu^0 - \overline{e}\gamma^\mu(1-\gamma_5)eW_\mu^0] \\
. \quad & +\frac{g}{\sqrt{2}}[\overline{\nu}_e \gamma^\mu (1-\gamma_5) e W_\mu^- + \overline{e}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\nu_e W_\mu^+].
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{WW}(U(1)) \quad &= \quad -g' \sum_f \overline{\psi}_f (\gamma^\mu \frac{Y_f}{2} \psi_f) B_\mu \\
&= \quad -\frac{g'}{2} Y_L [\overline{\nu}_{eL}\gamma^\mu \nu_{eL} + \overline{e}_L \gamma^\mu e_L] B_\mu \\
&. \quad -\frac{g'}{2} Y_R [\overline{\nu}_{eR}\gamma^\mu \nu_{eR} + \overline{e}_R \gamma^\mu e_R] B_\mu .
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow$ Neutrale Ströme:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{NC} = \quad &- \quad \frac{1}{2}(gW_\mu^0 + g'Y_L B_\mu)\overline{\nu}_{eL}\gamma^\mu\nu_{eL} - \frac{g'}{2}Y_R B_\mu \overline{\nu}_{eR}\gamma^\mu\nu_{eR} \\ &+ \quad \frac{1}{2}(gW_\mu^0 - g'Y_L B_\mu)\overline{e}_L\gamma^\mu e_L - \frac{g'}{2}Y_R B_\mu \overline{e}_R\gamma^\mu e_R.\end{aligned}$$

Neutrale Ströme der ungeladenen Neutrinos können nur durch die schwache Wechselwirkung vermittelt werden.

Sie wurden 1973 am CERN entdeckt in der Reaktion: $\nu_\mu p \to \nu_\mu p$ (kein Myon im Endzustand).

Nach orthonormaler Transformation (Rotation) der neutralen Eichbosonfelder

$$\begin{pmatrix} B_\mu \\ W_\mu^0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_W & \sin\theta_W \\ -\sin\theta_W & \cos\theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_\mu \\ W_\mu^0 \end{pmatrix}$$

mit dem sog. Weinberg-Winkel θ_W und

$$\cos\theta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2 Y_L^2}}; \qquad \sin\theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2 Y_L^2}}$$

erhält man das Photonfeld

$$A_\mu = \frac{gB_\mu - g' Y_L W_\mu^0}{\sqrt{g^2 + g'^2 Y_L^2}}$$

und ein neues neutrales schwaches Eichbosonfeld (orthogonal zum el.magn. Feld):

$$Z_\mu^0 = \frac{gW_\mu^0 + g' Y_L B_\mu}{\sqrt{g^2 + g'^2}}.$$

Sowohl das Z^0-Boson als auch die $W^\pm$-Bosonen wurden 1983 am CERN in $p\bar{p}$-Reaktionen direkt erzeugt und nachgewiesen.

Durch Invertieren der Transformation,

$$\begin{aligned} B_\mu &= \frac{gA_\mu + g' Y_L Z^0_\mu}{\sqrt{g^2 + g'^2 Y_L^2}}, \\ W^0_\mu &= \frac{gZ^0_\mu - g' Y_L A_\mu}{\sqrt{g^2 + g'^2 Y_L^2}}, \end{aligned}$$

und Einsetzen in $\mathcal{L}_{NC}$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} . \quad & \mathcal{L}_{NC} = \\ - \quad & \frac{\sqrt{g^2 + g'^2 Y_L^2}}{2} Z^0_\mu (\overline{\nu}_{eL} \gamma^\mu \nu_{eL}) \\ - \quad & \frac{g g' Y_L}{\sqrt{g^2 + g'^2 Y_L^2}} A_\mu (\overline{e}_L \gamma^\mu e_L) - \frac{g g' Y_R}{2\sqrt{g^2 + g'^2 Y_L^2}} A_\mu (\overline{e}_R \gamma^\mu e_R) \\ - \quad & \frac{g'^2 Y_L^2 - g^2}{2\sqrt{g^2 + g'^2 Y_L^2}} Z_\mu (\overline{e}_L \gamma^\mu e_L) - \frac{g'^2 Y_L Y_R}{2\sqrt{g^2 + g'^2 Y_L^2}} Z_\mu (\overline{e}_R \gamma^\mu e_R) \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Neutrinos koppeln nicht an das elektromagnetische Feld A_μ.

Nur die linkshändigen Neutrinos wechselwirken durch die neutrale schwache Kraft über Z^0_μ.

Rechtshändige Neutrinos haben keine Wechselwirkung, da auch $Y(\nu_R) = 0$.

Die elektromagnetische WW wird identifizert durch die Festlegung:

$$Y_L = -e\frac{\sqrt{g^2 + g'^2 Y_L^2}}{gg'} = -1 \quad \text{und} \quad Y_R = 2Y_L.$$

Damit ist

$$\sqrt{g^2 + g'^2} = \frac{e}{\cos\theta_W \sin\theta_W}$$

$$e = \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} = g' \cos\theta_W = g \sin\theta_W$$

$$\frac{g'^2 - g^2}{2\sqrt{g^2 + g'^2}} = \frac{e}{\cos\theta_W \sin\theta_W}(-\frac{1}{2} + \sin^2\theta_W)$$

$$-\frac{g'^2}{\sqrt{g^2 + g'^2}} = \frac{e}{\cos\theta_W \sin\theta_W}(-\sin^2\theta_W)$$

und die neutrale Stromwechselwirkung erhält die Form:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{NC} = & - \frac{g}{2\cos\theta_W}\overline{\nu}_{eL}\gamma^\mu\nu_{eL}Z^0_\mu \\ & - \frac{e}{\cos\theta_W\sin\theta_W}[(-\frac{1}{2}+\sin^2\theta_W)\overline{e}_L\gamma^\mu e_L \\ & + (-\sin^2\theta_W)\overline{e}_R\gamma^\mu e_R]Z^0_\mu \\ & - e\sum_f(Q_f\overline{\psi}_f\gamma^\mu\psi_f)A_\mu\end{aligned}$$

Allgemein gilt:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{NC} = & - \frac{e}{\cos\theta_W\sin\theta_W}\cdot \\ & \cdot \sum_{f_R,f_L}[(I^3_{fL,R}-Q_{fL,R}\sin^2\theta_W)\overline{\psi}_{fL,R}\gamma^\mu\psi_{fL,R}]Z^0_\mu \\ & - e\sum_f(Q_f\overline{\psi}_f\gamma^\mu\psi_f)A_\mu.\end{aligned}$$

$$\frac{e}{\cos\theta_W\sin\theta_W}(I^3_f - Q_f\sin^2\theta_W)$$

ist die schwache neutrale Kopplung aller links- und rechtshändigen Fermionzustände an das Z^0-Boson.

6.4 Quantenchromodynamik (QCD)

SU(3)-Eichfeldtheorie der starken Wechselwirkung zwischen Quarks mit 8 Ladungen (Generatoren) λ^a $(a = 1, ..., 8)$:

$$[\lambda^a, \lambda_b] = 2if^{abc}\lambda^c.$$

In der fundamentalen Darstellung (3-dim.): Gell-Mann-Matrizen.

Lokale Eichtransformation:

$$\psi(x) \longrightarrow e^{ig_s\frac{\lambda^a}{2}\gamma^a(x)}\psi(x).$$

Lagrange-Funktion:

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} + \sum_q \overline{\psi}_q(i\gamma^\mu D_\mu - m_q)\psi_q$$

mit der kovarianten Ableitung

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_s\frac{\lambda^a}{2}G^a_\mu$$

und dem Feldtensor

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\nu G^a_\mu - \partial_\mu G^a_\nu + g_s f^{abc} G^b_\mu G^c_\nu.$$

In der fundamentalen SU(3)-Darstellung bilden die Quarkfelder Tripletts mit einer neuen inneren Quantenzahl "Farbe" oder Colour (rot, blau, grün).

$$\psi = \begin{pmatrix} q_{\mathrm{r}} \\ q_{\mathrm{b}} \\ q_{\mathrm{g}} \end{pmatrix}$$

Die Antiquarks befinden sich in der konjugierten fundamentalen Darstellung und besitzen Antifarben $(\bar{r},\, \bar{b},\, \bar{g})$.

Die neuen inneren Freiheitsgrade der $SU(3)_C$-Farbsymmetrie erlauben die Konstruktion einer antisymmetrischen Wellenfunktion für das Baryon $\Delta^{++} = (uuu)$ mit $J^P = \frac{3}{2}^+$.

8 masselose Gluonfelder $G^a_\mu(x)$ (Eichfelder) mit den 8 Farbladungen

$$r\bar{b}, b\bar{r}, r\bar{g}, g\bar{r}, g\bar{b}, b\bar{g}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(b\bar{b} - g\bar{g}), \frac{1}{\sqrt{6}}(b\bar{b} + g\bar{g} - 2r\bar{r})$$

(adjungierte Darstellung) vermitteln die starke Wechselwirkung zwischen den Quarks.