6.4 Massen der schwachen Eichbosonen und der Fermionen

Nur ein masseloses Spin-1 Teilchen beobachtet: Photon $\longrightarrow U(1)_Q$-Eichsymmetrie.

Die schwache Wechselwirkung ist kurzreichweitig $\Longrightarrow$ schwere Feldquanten.

Explizite Massenterme für Eichbosonen und Fermionen brechen die Eichsymmetrie der Lagrange-Funktion.

Die Eichsymmetrie ist aber verantwortlich für die Aufhebung von Divergenzen in jeder Ordnung der Störungstheorie, d.h. die Renormierbarkeit der elektroschwachen Theorie (wie in der QED).

Ausweg:

Spontane Brechung der Symmetrie des Grundzustands (des Vakuums der Feldtheorie),

während die volle Eichsymmetrie der Lagrange-Funktion und der Feldgleichungen erhalten bleibt:

$$SU(2)_L \otimes U(1)_Y \stackrel{SSB}{\longrightarrow} U(1)_Q$$

("verborgene Eichsymmetrie").

Rekapitulation:

Konstruktion in Analogie zu Phasenübergängen 2. Ordnung in der Festkörperphysik: SSB unterhalb der kritischen Temperatur.

Ordnungsparameter (z.B. Magnetisierung) nimmt spontan und diskontinuierlich einen von Null verschiedenen Wert im Grundzustand an (Ginzburg-Landau-Theorie).

In der Teilchenphysik: Volle Symmetrie des Vakuums wiederhergestellt bei hohen Energien,

d.h. Phasenübergänge bei Abkühlung des expandierenden frühen Universums.

In der Theorie der Phasenübergänge entspricht der Ordnungsparameter einem selbstwechselwirkenden skalaren Feld, das einen von Null verschiedenen Vakuumerwartungswert annimmt.

<u>Goldstone-Theorem</u>:

Für jeden Generator einer globalen kontinuierlichen Symmetrie der Bewegungsgleichungen, die im Grundzustand gebrochen ist, tritt ein masseloses skalares Teilchen (Goldstone-Boson) auf.

Goldstone-Bosonen sind (wegen der Eichsymmetrie) energielose Anregungen, die die durch die gebrochenen Symmetrie-Generatoren ereichbaren Grundzustände verbinden (Quasiteilchen in der Festkörperphysik, z.B. Phononen).

Als Elementarteilchen wurden sie nicht beobachtet.

Bei lokaler Eichsymmetrie werden die Goldstone-Bosonen mittels Eichtransformation mit den gebrochenen Generatoren als longitundinale Polarisationsfreiheitsgrade der Eichbosonen transformiert, die dadurch eine Masse erhalten (Higgs-Mechanismus).

Analogie zum Supraleiter im Magnetfeld:

Durch eichinvariante Wechselwirkung mit den Cooper-Paarkondensat im kohärenten supraleitenden Grundzustand (Ordnungsparameterfeld) wird das Photonfeld aus dem Supraleiter abgeschirmt und erhält eine effektive Masse (endliche Reichweite).

Die lokale $U(1)$-Phasensymmetrie wird durch den kohärenten Grundzustand gebrochen.

(Minimaler) Higgs-Mechanismus im Standardmodell

Zusätzliches komplexes, skalares Feld, $SU(2)_L$-Dublett,

$$\begin{array}{cccc} & Q & I^0 & Y = 2(Q - I^0) \\ \Phi = \left(\begin{array}{c} \Phi^+ \\ \Phi^0 \end{array} \right) & \begin{array}{r} +1 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{r} +\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{array} & \begin{array}{c} +1 \\ +1 \end{array} \end{array}$$

mit schwacher und elektromagnetischer Wechselwirkung (4 Freiheitsgrade).

Erfüllt die Klein-Gordon-Gleichung mit $SU(2)_L \times U(1)_Y$-eichinvarianter Lagrange-Dichte:

$$\mathcal{L}_{\text{Skalar}} = (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - V(\Phi^\dagger \Phi) = T - V$$

mit

$$D_\mu = \partial_\mu \cdot 1 + i\frac{g'}{2} Y B_\mu \cdot 1 + i\frac{g}{2} \vec{\tau} \cdot \vec{W}_\mu$$

und Selbstwechselwirkungspotential ($\lambda > 0$):

$$V(\Phi^\dagger \Phi) = \mu^2 (\Phi^\dagger \Phi) + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2.$$

$|\Phi|$ ist der Ordnungsparameter in Analogie zur Ginzburg-Landau-Theorie (freie Energie ersetzt Lagrangedichte).

Für $\mu^2 < 0$ ist der Grundzustand (kin. Energie $T = 0$, $V = V_{\mathrm{min.}}$) bei einem von Null verschiedenen Betrag des Skalarfelds (Vakuumerwartungswert $|\Phi_0| = v/\sqrt{2}$):

$$\frac{\partial V}{\partial |\Phi|} = 2\mu^2 |\Phi_0| + 4\lambda |\Phi_0|^3 = 0.$$

$$\Longrightarrow |\Phi_0| = \sqrt{\frac{-\mu^2}{2\lambda}} =: \frac{v}{\sqrt{2}}.$$

Die Mannigfaltigkeit im Φ-Raum, auf der $V(\Phi^\dagger \Phi)$ minimal wird, ist $SU(2)_L \times U(1)_Y$-invariant.

Durch Auswahl eines der möglichen Grundzustände,

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

werden die $SU(2)_L$- und die $U(1)_Y$-Symmetrien spontan gebrochen.

Eine $U(1)_Q$-Symmetrie des Vakuums, entsprechend der Erhaltung der elektrische Ladung, bleibt wie verlangt ungebrochen zurück:

$$SU(2)_L \otimes U(1)_Y \stackrel{SSB}{\longrightarrow} U(1)_Q.$$

Generatoren T, die den Grundzustand Φ_0 invariant lassen:

$$e^{iT\alpha}\Phi_0 = \Phi_0 \Longrightarrow T\Phi_0 = 0.$$

Für die gebrochenen $SU(2)_L \times U(1)_Y$-Generatoren gilt:

$$\begin{aligned}
\tau_1\Phi_0 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{v}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0; \\
\tau_2\Phi_0 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\frac{v}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0; \\
\tau_3\Phi_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{v}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0; \\
Y\Phi_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \neq 0; \\
\frac{(\tau_3 - Y)}{2}\Phi_0 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \neq 0;
\end{aligned}$$

während die elektrische Ladung erhalten bleibt:

$$Q\Phi_0 = \frac{1}{2}(\tau_3 + Y)\Phi_0 = 0.$$

(orthogonal zum Generator $(\tau_3 - Y)/2$, der dem Z^0_μ-Eichfeld entspricht).

Eine Parametrisierung von Feldanregungen aus dem Grundzustand Φ_0 (Quasiteilchenanregungen):

$$\Phi(x) = e^{i\frac{\vec{\tau}\vec{\zeta}(x)}{2v}} \left(\begin{array}{c} 0 \\ (v + H(x))/\sqrt{2} \end{array} \right)$$

mit der reellen radialen Anregung $H(x)$ (skalares Higgs-Boson: massiv, gegen die Rückstellkraft des Potentials V)

und den reellen Winkelanregungen $\zeta_i(x)$ $(i = 1, ..., 3)$, die die verschiedenen Grundzustände verbinden.

Die masselosen Goldstone-Moden ζ_i werden von den Eichbosonen absorbiert, die den gebrochenen Generatoren entsprechen.

Dies geschieht durch die lokale $SU(2)_L$-Eichtransformation:

$$\begin{array}{rcl} \Phi(x) & \longrightarrow & \Phi'(x) = e^{-i\frac{\vec{\tau}\vec{\zeta}(x)}{2v}} \Phi(x), \\ L_f(x) & \longrightarrow & L'_f(x), \\ R_f(x) & \longrightarrow & R_f(x), \\ \vec{W}_\mu(x) & \longrightarrow & \vec{W}'_\mu(x), \\ B_\mu(x) & \longrightarrow & B_\mu(x) \end{array}$$

(sog. "unitäre Eichung").

Mit $Y_\Phi = +1$ gilt danach:

$$
\begin{aligned}
(D_\mu \Phi)' &= (\partial_\mu 1 + ig\frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{W}'_\mu + ig' B_\mu 1)\frac{1}{\sqrt{2}}(v+H)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ \partial H \end{pmatrix} + \frac{ig}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} (W^{1\prime}_\mu - iW^{2\prime}_\mu)(v+H) \\ 0 \end{pmatrix} \\
&+ \frac{i}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ (g' B_\mu - gW^{3\prime}_\mu)(v+H) \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Einsetzen von $\Phi'(x)$ und $D_\mu \Phi)'$ in $\mathcal{L}_{\mathrm{Skalar}} = T - V$ ergibt:

$$
\begin{aligned}
T &= (D^\mu \Phi)'^\dagger (D_\mu \Phi)' \\
&= \frac{1}{2}\partial^\mu H \partial_\mu H + \frac{g^2 (v+H)^2}{8}|W^{1\prime}_\mu - iW^{2\prime}_\mu|^2 \\
&+ \frac{(v+H)^2}{8}|g' B_\mu - gW^{3\prime}_\mu|^2 \\
&= \frac{1}{2}\partial^\mu H \partial_\mu H + \frac{g^2 v^2}{8}(W^+_\mu W^{\mu+} + W^-_\mu W^{\mu-}) \\
&+ \frac{g^2 v^2}{8\cos^2\theta_W} Z^0_\mu Z^{0\mu} \\
&+ \frac{g^2}{4}(H^2 + 2vH)\big[W^+_\mu W^{\mu-} + \frac{1}{2\cos^2\theta_W} Z^0_\mu Z^{0\mu}\big]. \\
V &= \mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda(\Phi^\dagger \Phi)^2 \\
&= \frac{\mu^2}{2}(v+H)^2 + \frac{\lambda}{4}(v+H)^4 = -\mu^2 H + \lambda v H^3 + \frac{\lambda}{4}H^4.
\end{aligned}
$$

Alle Wechselwirklungsterme werden genau so benötigt, damit die elektroschwache Theorie störungstheoretisch berechenbar (“renormierbar”) ist (durch Eichsymmetrie!).

$$\begin{aligned} \text{mit } (W^{1\prime}_\mu &+ iW^{2\prime}_\mu)(W^{1\prime\mu} - iW^{2\prime\mu}) \equiv 2W^+_\mu W^{-\mu} \\ &= W^+_\mu W^{\mu +} + W^-_\mu W^{\mu -} \end{aligned}$$

und Rotation mit Weinberg-Winkel θ_W wie für neutralen Strom (Diagonalisierung der Massenmatrix der neutralen Eichbosonen):

$$Z^0_\mu = \frac{g' B_\mu - g W^{3\prime}_\mu}{\sqrt{g^2 + g'^2}} = \frac{g}{\cos\theta_W}(g' B_\mu - g W^{3\prime}_\mu).$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad & \mathcal{L}_{\text{Skalar}} = \frac{1}{2}(\partial^\mu H \partial_\mu H - M_H^2 H^2) - \lambda v H^3 - \frac{\lambda}{4} H^4 \\ + \quad & \frac{g^2}{4}(H^2 + 2vH)\big[W^+_\mu W^{-\mu} + \frac{1}{2\cos^2\theta_W} Z^0_\mu Z^{0\mu} \\ + \quad & \frac{1}{2} M_W^2 (W^+_\mu W^{\mu +} + W^-_\mu W^{\mu -}) + \frac{1}{2} M_Z^2 Z^0_\mu Z^{0\mu}. \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \text{Eichbosonen} : M_W &= \frac{gv}{2}; \quad M_Z = \frac{gv}{2\cos\theta_W} = \frac{M_W}{\cos\theta_W}; \\ \text{Higgsboson} : \quad M_H &= \sqrt{-2\mu^2} = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} v. \end{aligned}$$

$$\text{und} \quad \sin^2\theta_W = 1 - \cos^2\theta_W = 1 - \frac{M_W^2}{M_Z^2}.$$

Massen der Fermionen:

Eichinvariante Kopplung der links- und rechtshändigen Fermionen an das Skalarfeld $\Phi(x)$:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{WW}^{\text{Yukawa}} = & -\sum_{f(\text{up})} g_f \left[(\overline{L}_f \overline{\Phi}) \psi_{fR} + \overline{\psi}_{fR} (\overline{\Phi}^\dagger L_f) \right] \\
& -\sum_{f(\text{down})} g_f \left[(\overline{L}_f \Phi) \psi_{fR} + \overline{\psi}_{fR} (\Phi^\dagger L_f) \right]
\end{aligned}
$$

(Yukawa-Kopplung vom Typ $-g(\overline{\psi}\psi)\phi$ zuerst für Nukleon-Pion-Kernwechselwirkung eingeführt.)

mit dem $SU(2)_L$-Dublett ($Y_{\overline{\Phi}} = 2(Q - I^0) = -1 = -Y_\Phi$):

$$
\overline{\Phi} := i\tau_2 \Phi^* = \begin{pmatrix} \overline{\Phi}^0 \\ -\Phi^- \end{pmatrix} \xrightarrow{SSB} \begin{pmatrix} (v+H)/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}.
$$

Wegen der speziellen Eigenschaft der $SU(2)$-Gruppe, daß $\tau_2 \vec{\tau}^* = -\vec{\tau}\tau_2$, gilt unter $SU(2)_L \times U(1)_Y$-Eichtransformationen:

$$
\begin{aligned}
\overline{\Phi} &= i\tau_2 \Phi^* \longrightarrow (i\tau_2\Phi^*)' = i\tau_2 (U\Phi)^* \\
&= i\tau_2 e^{-i\frac{\vec{\tau}^*}{2}\cdot\vec{\beta}} e^{-i\frac{Y_\Phi}{2}\alpha} \Phi^* \\
&= e^{i\frac{\vec{\tau}}{2}\cdot\vec{\beta}} e^{i\frac{Y_{\overline{\Phi}}}{2}\alpha} (i\tau_2\Phi^*) = U\overline{\Phi}.
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow SU(2)_L$-Invarianz von $\mathcal{L}_{WW}^{\mathrm{Yukawa}}$:

$$
\begin{array}{rcl}
(\overline{L}\Phi)\psi_R & \longrightarrow & (\overline{L}U^\dagger U\Phi)\psi_R = (\overline{L}\Phi)\psi_R, \\
\overline{\psi}_R(\Phi^\dagger L) & \longrightarrow & \overline{\psi}_R(\Phi^\dagger U^\dagger U L) = \overline{\psi_R}(\Phi^\dagger L).
\end{array}
$$

(und ebenso für die 'up'-Terme mit $\overline{\Phi}$),

wobei

$L \longrightarrow UL$, $\overline{L} \longrightarrow \overline{L}U^\dagger$, $\psi_R \longrightarrow \psi_R$, $\Phi \longrightarrow U\Phi$ und

$\overline{\Phi} \longrightarrow U\overline{\Phi}$.

Einsetzen von $\Phi'(x)$ ergibt:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{WW}^{\text{Yukawa}} &= -\sum_f g_f \frac{v+H}{\sqrt{2}}(\overline{\psi}_{fL}\psi_{fR} + \overline{\psi}_{fR}\psi_{fL}) \\ &\equiv -\sum_f \frac{g_f v}{\sqrt{2}}\overline{\psi}_f\psi_f - \sum_f \frac{g_f}{\sqrt{2}}(\overline{\psi}_f\psi_f)H.\end{aligned}$$

Damit Dirac-Massenterm mit

$$m_f = \frac{g_f v}{\sqrt{2}}$$

und Yukawa-Kopplung der Fermionen an das Higgsfeld H

$$\frac{g_f}{\sqrt{2}} = \frac{m_f}{v} \sim m_f.$$

Damit $H \to f\bar{f}$ bevorzugt in schwerste Fermionen mit $2m_f \leq M_H$.

Beachte: für Quarks gilt:

Massen- (und flavour-) Eigenzustände $\neq$ schwache Eigenzustände von $SU(2)_L$

6.5 Quantenchromodynamik (QCD)

SU(3)-Eichfeldtheorie der starken Wechselwirkung zwischen Quarks mit 8 Ladungen (Generatoren) λ^a $(a = 1, ..., 8)$:

$$[\lambda^a, \lambda_b] = 2if^{abc}\lambda^c$$

mit den Strukturkonstanten f_{abc} der $SU(3)$-Lie-Algebra.

Lokale Eichtransformation:

$$\Psi_q(x) \longrightarrow \Psi'_q(x) = U(x)\Psi_q(x) = e^{ig_s\frac{\lambda^a}{2}\gamma^a(x)}\Psi_q(x).$$

Lagrange-Funktion:

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} + \sum_q \overline{\Psi}_q(i\gamma^\mu D_\mu - m_q)\Psi_q$$

mit der kovarianten Ableitung (mit $D'_\mu\Psi' = U(D_\mu\Psi)$):

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_s\frac{\lambda^a}{2}G^a_\mu,$$

den 8 masselosen Eichbosonfeldern $G^a_\mu(x)$ $(a = 1, ..., 8)$

und den Feldtensoren (mit $\lambda^a F^{a\prime}_{\mu\nu} = U\lambda^a F^a_{\mu\nu} U^\dagger$):

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\nu G^a_\mu - \partial_\mu G^a_\nu + g_s f^{abc} G^b_\mu G^c_\nu.$$

In der fundamentalen SU(3)-Darstellung bilden die Quarkfelder Tripletts mit einer neuen inneren Quantenzahl "Farbe" oder Colour (<u>r</u>ot, <u>g</u>rün, <u>b</u>lau): $\Psi_q = \psi_q \cdot \chi_C$:

$$\chi_C = \begin{pmatrix} q_{\mathrm{r}} \\ q_{\mathrm{g}} \\ q_{\mathrm{b}} \end{pmatrix}; \;\; \chi_r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \;\; \chi_g = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \;\; \chi_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Antiquarks befinden sich in der konjugierten fundamentalen Darstellung und besitzen Antifarben ($\bar{r}$, $\bar{g}$, $\bar{b}$).

Einführung von Schiebeoperatoren in den $SU(3)_C$ Farb-Tripletts:

$$\begin{aligned} I^\pm_C &= \frac{1}{2}(\lambda_1 \pm i\lambda_2); \quad (\text{Transformation } \; g \longleftrightarrow r), \\ V^\pm_C &= \frac{1}{2}(\lambda_4 \mp i\lambda_5); \quad (\text{Transformation } \; r \longleftrightarrow b), \\ U^\pm_C &= \frac{1}{2}(\lambda_6 \pm i\lambda_7); \quad (\text{Transformation } \; b \longleftrightarrow g). \end{aligned}$$

Ihre Funktion in Analogie zu $\tau^{\pm}$ für $SU(2)$ ist offensichtlich mit der 3-dim. Darstellung der λ-Matrizen (Gell-Mann-Matrizen):

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \ \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (g \longleftrightarrow r)$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \ \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (r \longleftrightarrow b)$$

$$\lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} ; \ \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad (b \longleftrightarrow g)$$

$$\lambda_3 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} r & g & b \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \bar{r} \\ \bar{g} \\ \bar{b} \end{array} \quad (\text{koppelt } \ r\bar{r}, -g\bar{g})$$

$$\lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} r & g & b \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \bar{r} \\ \bar{g} \\ \bar{b} \end{array} \quad (\text{koppelt } \ r\bar{r}, g\bar{g}, -2b\bar{b}).$$

$\Longrightarrow$ Wechselwirkungsterm der QCD-Lagrangedichte:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{WW}(SU(3)_C) &= -g_s \overline{\Psi}\gamma^\mu \frac{\lambda^a}{2}\Psi G^a_\mu \\
= -\frac{g_s}{\sqrt{2}} \quad & [\quad \overline{\Psi}\gamma^\mu I_C^+ \Psi (g\bar{r})_\mu + \overline{\Psi}\gamma^\mu I_C^- \Psi (r\bar{g})_\mu \\
& + \quad \overline{\Psi}\gamma^\mu V_C^+ \Psi (r\bar{b})_\mu + \overline{\Psi}\gamma^\mu V_C^- \Psi (b\bar{r})_\mu \\
& + \quad \overline{\Psi}\gamma^\mu U_C^+ \Psi (b\bar{g})_\mu + \overline{\Psi}\gamma^\mu U_C^- \Psi (g\bar{b})_\mu \\
& + \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{\Psi}\gamma^\mu \lambda^3 \Psi G^3_\mu + \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{\Psi}\gamma^\mu \lambda^8 \Psi G^8_\mu]
\end{aligned}$$

mit den 8 Gluonfeldern

$$\begin{aligned}
g_{\mu 1} &= (g\bar{r})_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(G^1_\mu - iG^2_\mu), \\
g_{\mu 2} &= (r\bar{g})_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(G^1_\mu + iG^2_\mu) = \overline{g}_1, \\
g_{\mu 4} &= (r\bar{b})_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(G^4_\mu + iG^5_\mu), \\
g_{\mu 5} &= (b\bar{r})_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(G^4_\mu - iG^5_\mu) = \overline{g}_4, \\
g_{\mu 6} &= (b\bar{g})_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(G^6_\mu - iG^7_\mu), \\
g_{\mu 7} &= (g\bar{b})_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(G^6_\mu + iG^7_\mu) = \overline{g}_6, \\
g_{\mu 3} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(r\bar{r} - g\bar{g}) = G^3_\mu \quad \text{(farbneutral)}, \\
g_{\mu 8} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(r\bar{r} + g\bar{g} - 2b\bar{b}) = G^8_\mu \quad \text{(farbneutral)}.
\end{aligned}$$

zu 8 erhaltenen Farbladungsoperatoren, die sich in der $N^2 - 1$=8-dim. adjungierten Darstellung befinden:

$3_C \otimes \overline{3}_C = 1_C + 8_C$.

Gluonaustausch ändert die Farb-, nicht die Flavour-Quantenzahlen der Quarks.

Keine colour-Singulett-Gluonen in $SU(3)_C$ mit $\det U = 1$ (im Gegensatz zu $U(3)$:

würden an farbneutrale Zustände, Mesonen und Baryonen, koppeln und Kernkräfte mit langer Reichweite wie elektromagnetische Felder hervorrufen.

"Farbige" Teilchen (Quarks und Gluonen) sind in farbneutralen colour-Singulett-Zuständen (Mesonen $q\bar{q}$ und Baryonen qqq) gebunden und treten nicht als freie Zustände auf (Confinement-Hypothese).

Beispiel:

$$\pi^+ = \frac{1}{\sqrt{3}}(u_r \bar{d}_{\bar{r}} + u_g \bar{d}_{\bar{g}} + u_b \bar{d}_{\bar{b}}).$$

(Farbsingulettzustand 1_C aus der Darstellung

$3_C \otimes \overline{3}_C = 1_C + 8_C$).

Kernkräfte sind Van-der-Waalssche Restwechselwirkung zur Farbwechselwirkung der Quarks und Gluonen.

Motivation der Farbquantenzahl:

1. Die neuen inneren Freiheitsgrade der $SU(3)_C$-Farbsymmetrie erlauben die Konstruktion einer antisymmetrischen Wellenfunktion für das Baryon $\Delta^{++} = (u\uparrow u\uparrow u\uparrow)$ mit $J^P = \frac{3}{2}^+$ und $L = 0$:

$$\chi_C(\Delta^{++}) = \frac{1}{\sqrt{6}}\varepsilon_{ijk} u_i\, u_j\, u_k$$

(Farbsingulettzustand 1_c aus der Darstellung

$3_C \otimes 3_C \otimes 3_C = 1_C + 8_C + 8_C + 10_C$).

2. Hadronischer Wirkungsquerschnitt in der e^+e^--Vernichtung:

$$\begin{aligned} R &= \sigma(e^+e^- \to \sum_{q(E_{CM}>2m_q)})/\sigma^(e^+e^- \to \mu^+\mu^-) \\ &= N_C \cdot \sum_{q(E_{CM}>2m_q)} Q_q^2 \end{aligned}$$

mit $N_C = 3 =$ Zahl der Farbfreiheitsgrade der Quarks im Gegensatz zu Leptonen.

3. $\Gamma(\pi^0 \to \gamma\gamma) \sim N_C^2$.

4. Renormierbarkeit der GSW-Eichfeldtheorie der elektroschwachen Wechselwirkung:

Aufhebung divergenter Terme in höherer Ordnung der Stöhrungstheorie, bei denen 2 Vektorströme und 1 Axialvektorstrom koppeln (sog. Dreiecks-Anomalien), zwischen Lepton- und Quark-Beiträgen, falls gilt:

$$\sum_f Q_f(\mathrm{L-Dubletts}) = 0.$$

Dies ist möglich, wenn Lepton- und Quark-Dubletts der schwachen WW in jeder Familie gepaart sind, d.h. gleiche Anzahl, und die Quarks jeweils in 3 Farben auftreten:

$$\sum_f Q_f = \sum_\ell Q_\ell + N_C \cdot \sum_q Q_q = 3 \cdot (-1 + N_C \cdot \frac{1}{3}) = 0.$$

D.h. Verknüpfung zwischen Leptonen und Quarks und zwischen den Eichtheorien der elektroschwachen und der starken WW: $SU(2)_L$ und $SU(3)_C$!