7. Störungstheorie und Feynman-Graphen

Zur Berechnung von Übergangsamplituden $\langle f|\psi(t)\rangle$ für Zerfallswahrscheinlichkeiten und Wirkungsquerschnitte.

Feldquantisierung (Vielteilchentheorie):

Einführung von (freien) Feldoperatoren:

$\widehat{\psi}_f(x)$: vernichtet Fermionen $(u_s(p))$, erzeugt Antifermionen $(v_s(p))$ (Spinindex: $s = 1, 2$).

$\widehat{\overline{\psi}}_f(x)$: vernichtet Antifermionen $(\overline{u}_s(p))$, erzeugt Fermionen $(\overline{u}_s(p))$.

$\widehat{A}_\mu(x)$, $\widehat{Z}^0_\mu(x)$: erzeugen und vernichten Photonen bzw. Z^0-Bosonen.

$\widehat{W}^+_\mu(x)$: erzeugt W^+-, vernichtet W^--Bosonen.

$\widehat{W}^-_\mu(x)$: erzeugt W^--, vernichtet W^+-Bosonen.

$\widehat{g}_{\mu 1}(x)$: erzeugt Gluonen vom Typ $(g\bar{r})$, vernichtet Gluonen vom Typ $(r\bar{g})$ (analog $\widehat{g}_{\mu 4}$, $\widehat{g}_{\mu 6}$).

$\widehat{g}_{\mu 2}(x)$: erzeugt Gluonen vom Typ $(r\bar{g})$, vernichtet Gluonen vom Typ $(g\bar{r})$ (analog $\widehat{g}_{5}$, $\widehat{g}_{\mu 7}$).

$\widehat{g}_{\mu 3}(x)$, $\widehat{g}_{\mu 8}(x)$: erzeugen und vernichten Gluonen vom Typ $(r\bar{r} - g\bar{g})$ bzw. $(r\bar{r} + g\bar{g} - 2b\bar{b})$.

$\widehat{H}(x)$: erzeugt und vernichtet Higgs-Bosonen.

Die Fermionoperatoren erfüllen Antikommutationsregeln, die Bosonoperatoren Kommutationsregeln.

Iterative Lösung der Zeitentwicklung

$$\psi(\vec{x},t) = U(t)\psi(\vec{x},t=0)U^{\dagger}(x), \ \ \text{mit} \ \ U(t) = e^{iHt},$$

in Anwesenheit einer Wechselwirkung H_{WW} (Störung).

Alternativ (nach Feynman):

Iterative Lösung der klassischen Feldgleichungen mit Wechselwirkungsterm als Störung

mit der Methode der Greenschen Funktion.

Beispiel: Elektrostatik:

Poisson-Gleichung für elektrostat., skalares Potential $\phi(\vec{x})$:

$$\vec{\nabla}^2\Phi(\vec{x}) = -\rho(\vec{x}).$$

Lösung für Punktladung am Ort $\vec{x}'$: $\rho(\vec{x}) = q\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}')$:

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|} \quad (\mathrm{Coulomb-Potential}).$$

Für eine allgemeine Ladungsverteilung $\rho(\vec{x}')$ ist die Lösung offensichtlich:

$$\Phi(\vec{x}) = \int \frac{\rho(\vec{x}'}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|} d^3x' =: \int G(\vec{x}-\vec{x}')\rho(\vec{x}')d^3x'$$

mit der sog. Greenschen Funktion

$$G(\vec{x},\vec{x}') = G(\vec{x}-\vec{x}') = \frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

die eine Lösung der Poisson-Gleichung ist für eine Einheitspunktladung am Ort $\vec{x}'$ (Definition):

$$\vec{\nabla}_x^2 G(\vec{x},\vec{x}') = -\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}').$$

Anwendung auf Eichfeldtheorien:

Elektromagnetische WW von Fermionen (QED):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{QED}_{\mathrm{Fermion}} &= \overline{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi \\ &= \overline{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - eQ\overline{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \\ &= \overline{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - ej^\mu A_\mu .\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Feldgleichung nach dem Lagrange-Formalismus:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \overline{\psi}} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \overline{\psi})}\right) = 0$$

ist die Dirac-Gleichung

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = eQ\gamma^\mu A_\mu(x)\psi(x)$$

mit elektromagnetischem Kopplungsterm:

inhomogene Differentialgleichung, die i.a. nicht analytisch lösbar ist, d.h. iterative Lösung mit inhomogenem Wechselwirkungsterm als Störung.

Ansatz für Greensche Funktion:

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)K(x-x') = \delta^{(4)}(x-x').$$

Mit der Lösung $\psi^{(0)}(x)$ der homogenen freien Dirac-Gleichung, $(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi^{(0)}(x) = 0$

ist damit die allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl.:

$$\underline{\psi(x)} = \psi^{(0)}(x) + \int d^4x' K(x-x')\gamma^\mu A_\mu(x')\underline{\psi(x')}.$$

Die Integralgleichung kann iterativ gelöst werden:

0. Näherung: $\psi^{(0)}(x) \longrightarrow$ einsetzen in RS;

1. Näherung:

$$\psi^{(1)}(x) = \psi^{(0)}(x) + eQ\int d^4x' K(x-x')\gamma^\mu A_\mu(x')\underline{\psi^{(0)}(x')};$$

2. Näherung:

$$\psi^{(2)}(x) = \psi^{(0)}(x) + eQ\int d^4x' K(x-x')\gamma^\mu A_\mu(x')\psi^{(0)}(x')$$

$$+e^2Q^2\int\int d^4x''d^4x' \quad K(x-x'') \quad \gamma^\mu A_\mu(x'')$$
$$K(x''-x') \quad \gamma^\mu A_\mu(x')\psi^{(0)}(x').$$

<u>Störungsentwicklung nach Potenzen des WW-Terms $\sim e$.</u>

Fouriertransformation der Greenschen Funktion,

$$K(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \widehat{K}(p) e^{-p(x-x')},$$

ergibt bei Einsetzen in die Dirac-Gleichung:

$$\begin{aligned} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) K(x-x') &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p (\not{p} - m) \widehat{K}(p) e^{-p(x-x')} \\ \equiv \delta^{(4)}(x-x') \cdot 1 &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ip(x-x')} \cdot 1, \end{aligned}$$

d.h. $(\not{p} - m)\widehat{K}(p) = 1$, mit $\not{p} := \gamma^\mu p_\mu = \gamma^0 p_0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{p}$ etc.

$$\Longrightarrow (\not{p}+m)(\not{p}-m)\widehat{K}(p) = (p^2-m^2)\widehat{K}(p) \equiv (\not{p}+m) \cdot 1$$

$$\Longrightarrow \widehat{K}(p) = \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2}.$$

Mit $(p^2 - m^2) = (p_0^2 - \vec{p}^2 - m^2) = (p_0^2 - E^2) = (p_0 - E)(p_0 + E)$, $E = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2} > 0$,

d.h. Pole bei $p_0 = \pm E$,

und unter Verwendung des Residuensatzes der Funktionentheorie ist

$$K(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3p e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{x}')} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dp_0 \frac{(\not p + m)e^{-ip_0(t-t')}}{(p_0 - E)(p_0 + E)}}$$

$$= \overbrace{\oint_{C^\pm} \frac{dp_0}{p_0 \mp E} \cdot \underbrace{\frac{(\not p + m)e^{-ip_0(t-t')}}{p_0 \pm E}}} = \mp 2\pi i \underbrace{f(p_0 = \pm E)}$$

$$\cdot$$

$$= \mp 2\pi i \frac{(\pm\gamma_0 E - \vec{\gamma} \cdot \vec{p} + m)e^{-iE(t-t')}}{2E}.$$

$\Longrightarrow$ konvergente Lösungen für die Kombinationen $p_0 = +E > 0$ und $t > t'$ ((K^+) mit positiver Integrationsrichtung C^+ im Uhrzeigersinn) bzw. $p_0 = -E < 0$ und $t < t'$ ((K^-) mit negativer Integrationsrichtung C^-):

$$K^{\pm}(x-x') = \frac{-i}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{\pm\gamma_0 E - \vec{\gamma}\cdot\vec{p} + m}{2E} \cdot e^{i[\vec{p}(\vec{x}-\vec{x}') \mp iE(t-t')]}.$$

D.h. Wellen mit positiver Energie $p_0 = +E$ (Teilchen) werden in positiver Zeitrichtung ($t > t'$) ausgebreitet (durch K^+),

Wellen mit negativer Energie $p_0 = -E$ (Antiteilchen) in negativer Zeitrichtung ($t < t'$).

Für die Zeitausbreitung $t' \to t$ ebener Wellen ohne WW gilt (Beweis durch Einsetzen):

$$\psi(\vec{x}, t) = i \int d^3x' K^+(x - x')\gamma^0\psi(x')$$

für $p_0 > 0$, $t > t'$; sonst $\psi = 0$; und

$$\begin{aligned} \overline{\psi}(\vec{x}, t) &= i \int d^3x' \overline{\psi}(x')\gamma^0 K^-(x - x') \\ &= i \int d^3x' \psi^\dagger(x') K^-(x - x') \end{aligned}$$

für $p_0 < 0$, $t < t'$; sonst $\overline{\psi} = 0$.

Lösungen der freien Dirac-Gleichung:

ebene Wellen mit Energie $E >$ bzw. $E < 0$ (Orthonormalsystem):

$$\psi^{(0)+}(x) = u_s(p)e^{-ip_\mu x^\mu}; \quad \psi^{(0)-}(x) = v_s(p)e^{+ip_\mu x^\mu}.$$

$$u_1(p) = \sqrt{\tfrac{E+m}{V}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x+ip_y}{E+m} \end{pmatrix}; \; u_2(p) = \sqrt{\tfrac{E+m}{V}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x-ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix};$$

$$v_1(p) = \sqrt{\tfrac{|E|+m}{V}} \begin{pmatrix} \frac{p_x-ip_y}{|E|+m} \\ \frac{-p_z}{|E|+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; v_2(p) = \sqrt{\tfrac{|E|+m}{V}} \begin{pmatrix} \frac{p_z}{|E|+m} \\ \frac{p_x+ip_y}{|E|+m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

($p_\mu x^\mu = Et - \vec{p} \cdot \vec{x}$; Spin in z-Richtung: $s = 1, 2$; $u_s^\dagger u_s = v_s^\dagger v_s = 2E/V$).

Feynman-Bild:

$u_s(p)$ ($E > 0$): in pos. Zeitrichtung einlaufendes Fermion;

$\overline{u}_s(p)$ ($E > 0$): in pos. Zeitrichtung auslaufendes Fermion;

$v_s(p)$ ($E < 0$): in neg. Zeitrichtung einlaufendes Anti-Fermion;

$\overline{v}_s(p)$ ($E < 0$): in neg. Zeitrichtung auslaufendes Anti-Fermion.

Äquivalente Definition der Zeitentwicklung:

Integration entlang der reellen p_0-Achse bei Verschiebung der Pole in die komplexe Ebene um $\varepsilon > 0$ und d.h. $(p_0 - E)(p_0 + E) + i\varepsilon = [p_0 - (E - i\varepsilon/2)][p_0 + (E - i\varepsilon/2)]$.

$\Longrightarrow$ "Fermion-Propagator":

$$\boxed{\widehat{K}(p) = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}}$$

Photon-Propagator:

Lösung der Maxwell-Gleichungen mit Quellen mit der Lagrange-Funktion:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - ej^{\mu}_{\mathrm{el.magn.}}A_{\mu}\\ &= -\frac{1}{2}(\partial_{\nu}A^{\mu})(\partial^{\nu}A_{\mu}) + \frac{1}{2}(\partial_{\nu}A^{\mu})(\partial_{\mu}A^{\nu}) - ej^{\mu}_{\mathrm{el.magn.}}A_{\mu}.\end{aligned}$$

Die Feldgleichungen nach dem Lagrange-Formalismus,

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_{\nu}} - \partial_{\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}A^{\nu})}\right) = 0,$$

sind die Wellengleichungen:

$$\begin{aligned} . \quad & \partial_{\nu}\partial^{\nu}A^{\mu}(x) - \partial^{\mu}(\partial_{\nu}A^{\nu}(x)) = -ej^{\mu}_{\mathrm{el.magn.}}(x);\\ \Longrightarrow \quad & \partial_{\nu}\partial^{\nu}A^{\mu}(x) = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2\right)A^{\mu}(x) = -ej^{\mu}_{\mathrm{el.magn.}}(x)\end{aligned}$$

mit der Lorentz-Eichung: $\partial_{\nu}A^{\nu} = 0 \quad \Longrightarrow k_{\mu}\varepsilon^{\mu} = 0.$

Lösungen der freien Wellengleichung sind ebene Wellen,

$$\frac{1}{\mathcal{N}}\varepsilon_\mu e^{-ik\cdot x}, \;\; \frac{1}{\mathcal{N}}\varepsilon^*_\mu e^{ik\cdot x},$$

mit 2 transversalen Polarisationsfreiheitsgraden:

$$\varepsilon_\mu(\lambda = \pm 1) = (\varepsilon^0, \vec{\varepsilon}) = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, \pm i, 0)$$

(zirkulare Polarisation mit Helizitäten $\lambda = \frac{\vec{k}\cdot\vec{s}}{|\vec{k}||\vec{s}|} = \pm 1$, $\vec{k}||\hat{z}$).
Keine longitudinale Photon-Polarisation ($\lambda = 0$);

diese läßt sich wegen der Eichinvarianz ($\Rightarrow k^2 = m_\gamma^2 = 0$) "wegeichen", so daß $\vec{k}\cdot\vec{\varepsilon} = 0$.

Lösungsansatz für die inhomogenen Feldgleichungen mit Greenscher Funktion:

$$\partial_\lambda \partial^\lambda D^{\mu\nu}(x - x') = g^{\mu\nu} \delta^{(4)}(x - x')$$

mit der Minkowsky-Metrik $g^{\mu\nu}$.

Damit ist die allgemeine Lösung der inhomogenen Wellengleichung (einsetzen!):

$$A_\mu(x) = -e \int d^4x' D^{\mu\nu}(x - x') j_\nu(x').$$

Die Fouriertransformation der Greenschen Funktion,

$$D^{\mu\nu}(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q \widehat{D}^{\mu\nu}(q) e^{-iq(x-x')},$$

eingesetzt in die Wellengleichung, ergibt:

$$\begin{aligned} \partial_\lambda \partial^\lambda D^{\mu\nu}(x - x') &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q \widehat{D}^{\mu\nu}(q)(-iq)^2 e^{-iq(x-x')} \\ &= g^{\mu\nu} \delta^{(4)}(x - x'). \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ "Photon-Propagator":

$$\boxed{\widehat{D}^{\mu\nu}(q) = \lim_{\varepsilon\to+0} \frac{-g^{\mu\nu}}{q^2 + i\varepsilon}}$$

(Integrationsvorschrift und Zeitentwicklung für Teilchen- und Antiteilchen wie für Fermionen).

Propagator für massive Eichbosonen: $W_\mu^\pm$, Z_μ^0

Elektromagnetische Wellengleichung ersetzt durch Proca-Gleichung mit Masseterm (nicht eichinvariant):

$$\begin{aligned}
(\partial_\nu \partial^\nu + M^2) W^{\pm\mu} - \partial^\mu(\partial_\nu W^{\pm\nu}) &= -\frac{g}{\sqrt{2}} j_{CC}^{\mp\mu} \\
\left[(\partial_\nu \partial^\nu + M^2) g^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu\right] W_\nu^\pm &= -\frac{g}{\sqrt{2}} j_{CC}^{\mp\mu}
\end{aligned}$$

mit zusätzlichem Masseterm $\mathcal{L}_\mathrm{M} = \frac{1}{2} M^2 W^{\pm\mu} W_\mu^\pm$ in der Lagrange-Funktion

(ohne Selbstwechselwirkungsbeiträge für nicht-Abelsche Eichbosonen; nur WW mit Fermionen als Quellterm betrachtet; der freie Propagator ist davon unabhängig, WW ist Störung).

Massive Vektorbosonen besitzen 3 Polarisationfreiheitsgrade mit zusätzlicher longitudinale Polarisation (Helizität $\lambda = 0$):

$$\begin{aligned}
\varepsilon_\mu(k; \lambda = \pm 1) &= \mp \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, \pm i, 0); \\
\varepsilon_\mu(k; \lambda = 0) &= \mp \frac{1}{M}(k, 0, 0, E).
\end{aligned}$$

mit $k_\mu = (E, 0, 0, k)$, $k_\mu k^\mu = E^2 - k^2 = M^2$

und $k_\mu \varepsilon^\mu = 0$.

Ansatz für Greensche Funktion:

$$\left[\left(\partial_\nu\partial^\nu + M^2\right)g^{\mu\nu} - \partial^\mu\partial^\nu\right]D^{(\pm)}_{\nu\lambda}(x-x') = \delta^\mu_\lambda\delta^{(4)}(x-x').$$

$\Longrightarrow$ Lösung der inhomogenen Wellengleichung (einsetzen!):

$$W^\pm_\nu(x) = -\frac{g}{\sqrt{2}}\int d^4x' D^{(\pm)}_{\nu\lambda}(x-x')j^\lambda(x').$$

Für die Fouriertransformierte der Greenschen Funktion gilt nach Einsetzen in die Wellengleichung:

$$\left[(-q^2+M^2)g^{\mu\nu} + q^\mu q^\nu\right]\widehat{D}_{\nu\lambda}(q) = \delta^\mu_\lambda.$$

Ansatz zur Lösung der Matrixgleichung:

$$\widehat{D}_{\nu\lambda}(q) = A\cdot g_{\nu\lambda} + B\cdot q_\nu q_\lambda.$$

$$\Longrightarrow A\cdot\left[\delta^\mu_\lambda(-q^2+M^2) + q^\mu q_\lambda\right] + B\cdot M^2 q^\mu q_\lambda = \delta^\mu_\lambda$$

mit $g^{\mu\nu}g_{\nu\lambda} = \delta^\mu_\lambda$.

$$\Longrightarrow A = \frac{-1}{q^2 - M^2}; \quad B = -\frac{A}{M^2} = \frac{1}{(q^2 - M^2)M^2}.$$

$\Longrightarrow$ Propagator für massive Vektorbosonen:

$$\boxed{\widehat{D}^{\mu\nu}(q) = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{-[g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu / M^2]}{q^2 - M^2 + i\varepsilon}}$$

$$\widehat{D}^{\mu\nu} \longmapsto \begin{cases} \dfrac{g^{\mu\nu}}{M^2}; & |q^2| \ll M^2 \\ \dfrac{g^{\mu\nu}}{-q^2}; & |q^2| \gg M^2 \end{cases} .$$

Propagator für skalare Teilchen (Spin-0 Bosonen):
z.B. Higgs-Boson

o.E.: reelles Feld; beschrieben durch die Klein-Gordon-Gleichung:

$$\left(\partial_\mu \partial^\mu + m^2\right)\Phi(x) = -g_f \overline{\psi}\psi$$

mit Yukawa-Wechselwirkung mit Fermionfeld (Beispiel;

s. Lagrange-Formalismus).

Gleichung wie für eine Komponente des elektromagnetischen Feldes, aber mit Masse.

$$\left(\partial_\mu \partial^\mu + m^2\right)G(x - x') = -\delta^{(4)}(x - x');$$

$$\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}(-q^2 + m^2)\widehat{G}(q)e^{-iq(x-x')} = -\frac{d^4q}{(2\pi)^4}e^{-iq(x-x')}.$$

$\Longrightarrow$ Skalarer Propagator:

$$\boxed{\widehat{G}(q) = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{q^2 - m^2 + i\varepsilon}}$$

Übergangsmatrixelemente:

mit der Streumatrix S,

$$\psi_s(x) = S \cdot \psi_i(x),$$

ist das Streumatrixelement

$$\begin{aligned}
\langle \psi_f | \psi_s \rangle &= \langle \psi_f | S | \psi_i \rangle =: S_{fi} \\
&= \int d^3x \psi_f^\dagger(x) S \psi_i(x) = \int d^3x \psi_f^\dagger(x) \psi_s(x) \\
&= S_{fi}^{(0)} + S_{fi}^{(1)} + S_{fi}^{(2)} + \ldots
\end{aligned}$$

wobei für die gestreute Welle $\psi_s(x)$ eine Störungsentwicklung durchgeführt wird.

Im Anfangs (i)- und Endzustand (f) befinden sich wechselwirkungsfreie Zustände (ebene Wellen).

Dabei ist mit $\psi_i(x) = \psi^{(0)}(x)$:

$$
\begin{aligned}
S_{fi}^{(0)} &= \int d^3x \psi_f^\dagger(x)\psi_i(x) = \frac{2E_i}{V}\delta_{fi}\int d^3x = 2E_i\delta_{fi}, \\
S_{fi}^{(1)} &= eQ \int d^3x \psi_f^\dagger(x) \int d^4x' K(x-x')\gamma^\mu A_\mu(x')\psi_i(x') \\
&= eQ \int d^4x' \underbrace{\left(\int d^3x \psi_f^\dagger(x) K(x-x')\right)}\ \not{A}(x')\psi_i(x') \\
. &\qquad\qquad\qquad = -i\overline{\psi}_f(x')\ \ \text{(Rückwärtspropagator)} \\
&= -ieQ \int d^4x' \overline{\psi}_f(x')\ \not{A}(x')\psi_i(x'), \\
S_{fi}^{(2)} &= e^2Q^2 \int d^3x \psi_f^\dagger(x) \\
. &\int\int d^4x'' d^4x' K(x-x')\ \not{A}(x'')K(x''-x')\ \not{A}(x')\psi_i(x') \\
&= e^2Q^2 \int\int d^4x'' d^4x' \\
&\underbrace{\left(\int d^3x \psi_f^\dagger(x) K(x-x'')\right)}\ \not{A}(x'')K(x''-x')\ \not{A}(x')\psi_i(x') \\
. &\qquad = -i\overline{\psi}_f(x'') \\
&= -ie^2Q^2 \int\int d^4x'' d^4x' \\
. &\quad \overline{\psi}_f(x'')\ \not{A}(x'')K(x''-x')\ \not{A}(x')\psi_i(x').
\end{aligned}
$$

Wechselwirkung von Fermionen und Photonen:

Einlaufende Fermionen:

$\psi_{i1}(x) = u(p_1)e^{-ip_1x}$ (Q), $\psi_{i2}(x) = u(p_2)e^{-ip_2x}$ (Q_f).

Auslaufende Fermionen:

$\overline{\psi}_{f1}(x) = \overline{u}(p_3)e^{ip_3x}$ (Q), $\overline{\psi}_{f2}(x) = \overline{u}(p_4)e^{ip_4x}$ (Q_f).

Lösung der elektromagnetischen Wellengleichung mit Qellen:

$$A_\mu(x) = -e \int d^4x' D_{\mu\nu}(x-x') j^\nu_{\mathrm{el.magn.}}(x').$$

Der elektromagnetische Strom der Photonen emittierenden Fermionen ist (niedrigste Ordnung: freie Fermionen):

$$j^\mu_{el.magn.}(x) = Q_f \overline{\psi}_{f2}(x)\gamma^\mu \psi_{i2}(x) = Q_f \overline{u}(p_4)\gamma^\mu u(p_2) e^{i(p_4-p_2)x}.$$

Mit dem Photonpropagator erhält man:

$$\begin{aligned} . \quad & A_\mu(x) = \\ = & -eQ_f \int d^4x' \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{-g_{\mu\nu}}{q^2+i\varepsilon} e^{i(p_4-p_2+q)x'} e^{-iqx} \overline{u}(p_4)\gamma^\nu u(p_2) \\ = & -eQ_f \int d^4q \delta^{(4)}(p_4-p_2+q) \frac{-g_{\mu\nu}}{q^2+i\varepsilon} e^{-iqx} \overline{u}(p_4)\gamma^\nu u(p_2) \end{aligned}$$

Elektromagnetische Fermion-Fermion-WW mit Photonaustausch in niedrigster Störungsordnung:

Einsetzen der Näherung für das Photon-Feld in

$$
\begin{aligned}
S_{fi}^{(1)} &= -ieQ \int d^4x' \overline{\psi}_{f1}(x')\gamma^\mu \psi_{i1}(x') A_\mu(x') \\
&= ie^2 QQ_f \int d^4x' \overline{u}(p_3)\gamma^\mu u(p_1) e^{ip(_3-p_1-q)x} \\
&\cdot \quad \left(\int d^4q\, \delta^{(4)}(p_4-p_2+q)\frac{-g_{\mu\nu}}{q^2+i\varepsilon}\right)\overline{u}(p_4)\gamma^\nu u(p_2) \\
&= ie^2 QQ_f (2\pi)^4 \int d^4q\, \overline{u}(p_3)\gamma^\mu u(p_1)\delta^{(4)}(p_4-p_2+q) \\
&\cdot \quad \frac{-g_{\mu\nu}}{q^2+i\varepsilon}\overline{u}(p_4)\gamma^\nu u(p_2) \underbrace{\int \frac{d^4x'}{(2\pi)^4} e^{ip(_3-p_1-q)x}}_{=\delta^{(4)}(p_3-p_1-q)} \\
S_{fi}^{(1)} &= ie^2 QQ_f (2\pi)^4 \int d^4q\, \delta^{(4)}(p_4-p_2+q)\delta^{(4)}(p_3-p_1-q) \\
&\cdot \quad \overline{u}(p_3)\gamma^\mu u(p_1)\frac{-g_{\mu\nu}}{q^2+i\varepsilon}\overline{u}(p_4)\gamma^\nu u(p_2) \\
&= -ie^2 QQ_f (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_4-p_2+p_3-p_1) \\
&\cdot \quad \overline{u}(p_3)\gamma^\mu u(p_1)\frac{1}{q^2}\overline{u}(p_4)\gamma_\mu u(p_2) \\
&= \mathcal{M}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_4-p_2+p_3-p_1)
\end{aligned}
$$

mit $q^2 = (p_3-p_1)^2 \approx -2p_1p_3 = -4E_1E_3\sin^2(\theta/2)$ bei Vernachlässigung der Fermion-Massen; $\theta =$ Streuwinkel.

(2. Ordnung in eQ, 1. Ordnung in $\alpha = e^2/4\pi \approx 1/137$.)

Feynman-Regeln:

Regeln für die Auswertung der Feynman-Diagramme zur Berechnung von Übergangsmatrixelementen in der Stöhrungstheorie:

<u>QED</u>:

Ein- (auslaufendes) Fermion:	$u_s(p)$ $(\overline{u}_s(p))$
Ein- (auslaufendes) Anti-Fermion:	$v_s(p)$ $(\overline{v}_s(p))$
Ein- (auslaufendes) reelles Photon:	$\varepsilon_\mu(k;\lambda)$ $(\varepsilon^*_\mu(k;\lambda))$
Virtuelles (intermediäres) Photon:	$-i\dfrac{g_{\mu\nu}}{q^2+i\varepsilon}$
Virtuelles Fermion (Propagator):	$i\dfrac{\not{p}+m}{p^2-m^2+i\varepsilon}$

Fermion-Photon-Vertex: $-ieQ_f\gamma^\mu(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_f-p_i-q)$

<u>QCD</u>:

Quark-Gluon-Vertex: $-i\frac{g_s}{2}\lambda^a_{\alpha\beta}\gamma^\mu(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_f-p_i-q)$

Integration über die 4-Impulse der virtuellen Teilchen $(p^2 \neq m^2)$ im Zwischenzustand.

Schwache Wechselwirkung:

Ein- (auslaufendes) Z^0-, $W^{\pm}$-Boson: $\varepsilon_\mu(k;\lambda)$ $(\varepsilon^*_\mu(k;\lambda))$

Virtuelles Z^0-, $W^{\pm}$-Boson: $-i\dfrac{g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu/M^2}{q^2 - M^2 + i\varepsilon}$

Virtuelles Higgs–Boson: $\dfrac{i}{q^2 - M_H^2 + i\varepsilon}$

Fermion-Higgs-Boson-Vertex:

$$-i\frac{m_f}{v}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_f - p_i - q)$$

Fermion-$W^{\pm}$-Vertex:

$$-i\frac{g}{2\sqrt{2}}\gamma^\mu(1-\gamma_5)(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_f - p_i - q)$$

Fermion-Z^0-Vertex:

$$-i\frac{g}{2\cos\theta_W}\gamma^\mu[c_L^f(1-\gamma_5) + c_R^f(1+\gamma_5)](2\pi)^4\delta^{(4)}(p_f - p_i - q)$$

Schwache NC-Kopplungskonstanten:

$$\text{Links}: c_L^f = I_f^3 - Q_f\sin^2\theta_W; \quad \text{rechts}: c_R^f = -Q_f\sin^2\theta_W;$$
$$\text{Vektor}: v_f = c_L^f + c_R^f = I_f^3 - 2Q_f\sin^2\theta_W;$$
$$\text{Axialvektor}: a_f = c_L^f - c_R^f = I_f^3.$$
$$\overline{u}\gamma^\mu c_L^f(1-\gamma_5) + c_R^f(1+\gamma_5)u = \overline{u}\gamma^\mu(v_f - a_f\gamma_5)u.$$

Wirkungsquerschnitte und Zerfallswahrscheinlichkeiten:

Übergangswahrscheinlichkeit pro Raum- und Zeiteinheit:

$$dw = |S_{fi}|^2 \rho(E_f) dE_f / (V_0 \cdot T).$$

Dabei ist bei Begrenzung der WW auf V_0, T:

$$|S_{fi}|^2 = |M_{fi}|^2 \cdot V_0 \cdot T \cdot (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i)$$

und $\rho(E_f)$ die Zustandsdichte im Endzustand.

Differentieller Wirkungsquerschnitt für die 2-Körper-Reaktion $a + b \to c + d$ (mit $p_1 + p_2 = p_3 + p_4$, $s := (p_1 + p_2)^2 = E^2_{CMS}$):

$$d\sigma = dw / j_{\rm ein}$$

mit der einlaufenden Teilchenstromdichte (Lorentz-invariant):

$$\begin{aligned} j_{\rm ein} &= |\vec{v}_{ab}| \frac{2E_1}{V} \frac{2E_2}{V} = \frac{4}{V^2} [(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{4}{V^2} E_{CMS} |\vec{p}_a^{\,CMS}|. \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \underline{d\sigma = \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{j_{\mathrm{ein}}} d\mathrm{Lips}}$$

mit dem Lorentz-invarianten Phasenraumelement (Zustandsdichte im Endzustand):

$$d\mathrm{Lips} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_3 + p_4 - p_1 - p_2) \frac{V}{2E_3} \frac{d^3p_3}{(2\pi)^3} \frac{V}{2E_4} \frac{d^3p_4}{(2\pi)^3}.$$

Zerfallsbreite für n-Körperzerfall $a \to 1, ..., n$:

$$\underline{d\Gamma = \frac{|\mathcal{M}|^2}{2E_a} d\mathrm{Lips}}$$

mit

$$d\mathrm{Lips} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i) \prod_{j=1}^{n} \frac{V}{2E_j} \frac{d^3p_j}{(2\pi)^3}.$$

$\Gamma = \int d\Gamma = \frac{1}{\tau}$.

<u>Das Normierungsvolumen V kürzt sich!</u>

Fermion-Antifermion-Erzeugung bei Elektron-Positron-Vernichtung:

nach den Feynman-Regeln ist das Übergangsmatrixelement:

$$\mathcal{M} = ie^2 Q_e Q_f \overline{v}_e(p_2)\gamma_\mu u_e(p_1)\frac{1}{q^2}\overline{u}_f(p_3)\gamma^\mu v_f(p_4)$$

mit $q^2 = (p_1 + p_2)^2 =: s = E^2_{CMS}$.

Im Schwerpunktsystem: $\sqrt{s} = 2E_e$.