Wirkungsquerschnitte und Zerfallswahrscheinlichkeiten:

Übergangswahrscheinlichkeit pro Raum- und Zeiteinheit:

$$d\Gamma = |S_{fi}|^2 \rho(E_f) dE_f / (V_0 \cdot T).$$

Dabei ist bei Begrenzung der WW auf endliches Volumen V_0 und Zeit T:

$$|S_{fi}|^2 = |\mathcal{M}_{fi}|^2 \cdot V_0 \cdot T \cdot (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i),$$

mit den Gesamtimpulsen P_i und P_f in Anfangs- und Endzustand,

und $\rho(E_f)$ die Zustandsdichte im Endzustand.

Bei unpolarisierten Elektronen und Positronen im Anfangszustand und nicht beobachteter Spinausrichtung der Fermionen im Endzustand muß über die 4 Spinzustände im Anfangszustand gemittelt und über die 4 Spineinstellungen im Endzustand summiert werden:

$$\overline{|\mathcal{M}_{fi}|^2} := \frac{1}{4} \sum_{s_1, s_2} \sum_{s_3, s_4} |\mathcal{M}|^2$$

(Für Quarks muß auch über die Farbfreiheitsgrade summiert werden.)

Damit ist die Übergangsrate

$$
\begin{aligned}
d\Gamma &= \overline{|\mathcal{M}_{fi}|^2}(2\pi)^4\delta^{(4)}(P_f - P_i)\prod_{i,f}\frac{V}{2E_{i,f}}\prod_f\frac{d^3p_f}{(2\pi)^3} \\
&=: \underline{\overline{|\mathcal{M}_{fi}|^2}\prod_i\frac{V}{2E_i}d\mathrm{Lips}}
\end{aligned}
$$

mit dem Lorentz-invarianten Phasenraumelement (Zustandsdichte) für den Endzustand:

$$
d\mathrm{Lips} = (2\pi)^4\delta^{(4)}(P_f - P_i)\prod_f\frac{d^3p_f}{(2\pi)^3 2E_f}.
$$

Das Normierungsvolumen V kürzt sich mit den Normierungskonstanten der Wellenfunktionen $\sim 1/\sqrt{V}$.

Die Lebensdauer eines Teilchens ist $\tau = 1/\int d\Gamma$.

Der differentieller Wirkungsquerschnitt für eine 2-Teilchenreaktion $a + b \to f$ ist:

$$d\sigma = \frac{d\Gamma}{v_a}$$

mit dem einlaufenden Teilchenstrom $v_a =$ Geschwindigkeit der einlaufenden Teilchen:

$$v_a = \sqrt{(p_a \cdot p_b)^2 - m_a^2 m_b^2} / E_a E_b.$$

$$\Longrightarrow \underline{d\sigma = \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{4 v_a E_a E_b} d\mathrm{Lips}.}$$

$v_a E_a E_b$ ist Lorentz-invariant.

Fermion-Antifermion-Erzeugung bei Elektron-Positron-Vernichtung:

nach den Feynman-Regeln ist das Übergangsmatrixelement:

$$\mathcal{M} = ie^2 Q_e Q_f \overline{v}_e(p_2)\gamma_\mu u_e(p_1)\frac{1}{q^2}\overline{u}_f(p_3)\gamma^\mu v_f(p_4)$$

mit $q^2 = (p_1 + p_2)^2 =: s = E^2_{CMS}$.

Im Schwerpunktsystem: $\sqrt{s} = 2E_e$.

$$\Longrightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega}(e^+e^- \to f\bar{f}) = N_C^f \frac{\alpha^2 Q_f^2}{4s}(1 + \cos^2\theta);$$

$$\sigma_{f\bar{f}} = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} = \frac{87\ \mathrm{nb}}{s[\mathrm{GeV}^2]}.$$

$N_C^f = 1$ für Leptonen, $N_C^f = 3$ für Quarks.

$$\begin{aligned} R &= \sigma(e^+e^- \to \sum_{q(E_{CMS}>2m_q)} q\bar{q})/\sigma^(e^+e^- \to \mu^+\mu^-) \\ &= 3 \cdot \sum_{q(E_{CMS}>2m_q)} Q_q^2 \end{aligned}$$

8. Schwache Wechselwirkung der Quarks

Allgemeinste Form der Yukawa-Kopplung der Quarks an das skalare Feld:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = & - \sum_{i,j} \big[\overline{\Gamma}_{ij}(\overline{L}_i\overline{\Phi})u_{jR} + \overline{\Gamma}^*_{ji}\overline{u}_{jR}(\overline{\Phi}^\dagger L_i) \\ & + \Gamma_{ij}(\overline{L}_i\Phi)d_{jR} + \Gamma^*_{ji}\overline{d}_{jR}(\Phi^\dagger L_i)\big]\end{aligned}$$

mit den schwachen Eigenzuständen in jeder Fermion-Generation ($i = 1, ..., 3$):

$$L_i = \begin{pmatrix} u_i \\ d_i \end{pmatrix}_L, \quad u_{iR}, d_{iR},$$

und zwei komplexen 3×3 (Kopplungs-) Matrizen Γ_{ij} und $\overline{\Gamma}_{ij}$.

Nach der spontanen Symmetriebrechung erhält man durch Einsetzen von

$\Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+H}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ und $\overline{\Phi} = \begin{pmatrix} \frac{v+H}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = & - \frac{v+H}{\sqrt{2}} \sum_{i,j} \big[\overline{\Gamma}_{ij}\overline{u}_{iL}u_{jR} + \overline{\Gamma}^*_{ji}\overline{u}_{jR}u_{iL} \\ & + \Gamma_{ij}\overline{d}_{iL}d_{jR} + \Gamma^*_{ji}\overline{d}_{jR}d_{iL}\big]\end{aligned}$$

Mit der Definition

$$D = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} \text{ und } U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix}$$

für die up (u)- und down (d)-artigen Quark-Eigenzustände des schwachen Isospins und den allgemeinen komplexen Massenmatrizen

$$M_{ij}^{(d)} = \Gamma_{ij}\frac{v}{\sqrt{2}} \text{ und } M_{ij}^{(u)} = \overline{\Gamma}_{ij}\frac{v}{\sqrt{2}}$$

sind die Quark-Massenterme der Lagrange-Funktion in Matrixschreibweise:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Masse}}^{\text{Quarks}} = & - \quad \overline{D}_L M^{(d)} D_R - \overline{D}_R M^{(d)\dagger} D_L \\ & - \quad \overline{U}_L M^{(u)} U_R - \overline{U}_R M^{(u)\dagger} U_L . \end{aligned}$$

$\mathcal{L}^\dagger = \mathcal{L}$ wie verlangt fuer eine Observable ($\mathcal{L} = T - V$).

Die separaten Massenmatrizen für up- und down-artige Quarks lassen sich diagonalisieren duch bi-unitäre Transformationen (unitäre Transformationen jeweils für die links- und die rechtshändigen Quark-Zustände:

$$
\begin{aligned}
U_d^\dagger M^{(d)}\, V_d &= M_{\text{diag.}}^{(d)}; \quad U_u^\dagger M^{(u)} V_u = M_{\text{diag.}}^{(u)}; \\
V_d^\dagger M^{(d)\dagger} U_d &= (U_d^\dagger M^{(d)} V_d)^\dagger = M_{\text{diag.}}^{(d)*}; \\
V_u^\dagger M^{(u)\dagger} U_u &= (U_u^\dagger M^{(u)} V_u)^\dagger = M_{\text{diag.}}^{(u)*};
\end{aligned}
$$

mit

$$
\begin{aligned}
D'_L &= U_d^\dagger D_L; \quad U'_L = U_u^\dagger U_L; \\
D'_R &= V_d^\dagger D_R; \quad U'_R = V_u^\dagger U_R.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & \mathcal{L}_{\text{Masse}}^{\text{Quarks}} = \\
- \quad & \overline{D}_L \overbrace{U_d U_d^\dagger}^{=1} M^{(d)} \overbrace{V_d V_d^\dagger}^{=1} D_R - \overline{D}_R \overbrace{V_d V_d^\dagger}^{=1} M^{(d)\dagger} \overbrace{U_d U_d^\dagger}^{=1} D_L \\
- \quad & \overline{U}_L U_u \underbrace{U_u^\dagger M^{(u)} V_u} V_u^\dagger U_R - \overline{U}_R V_u \underbrace{V_u^\dagger M^{(u)\dagger} U_u} U_u^\dagger U_L \\
= \quad & -\overline{D}'_L M_{\text{diag.}}^{(d)} D'_R - \overline{D}'_R M_{\text{diag.}}^{(d)*} D'_L \\
. \quad & -\overline{U}'_L M_{\text{diag.}}^{(u)} U'_R - \overline{U}'_R M_{\text{diag.}}^{(u)*} U'_L.
\end{aligned}
$$

Die i.a. komplexen Eigenwerte $M_i^{(d,u)} = m_i^{(d,u)} e^{i\alpha_i^{(d,u)}}$ der Massenmatrix (mit Generationenindex $i = 1, ..., 3$) werden reell ($m_i^{(u)}$, $m_i^{(d)}$) durch die zusätzlichen Phasentransformationen

$$D'_{Li} \longrightarrow e^{-i\alpha_i^{(d)}/2} D'_{Li}; \quad U'_{Li} \longrightarrow e^{-i\alpha_i^{(u)}/2} U'_{Li};$$

$$D'_{Ri} \longrightarrow e^{+i\alpha_i^{(d)}/2} D'_{Ri}; \quad U'_{Ri} \longrightarrow e^{+i\alpha_i^{(u)}/2} U'_{Ri},$$

so daß:

$$\mathcal{L}_{\text{Masse}}^{\text{Quarks}} = -\overline{D}' M_{\text{diag.}}^{(d)} D' - \overline{U}' M_{\text{diag.}}^{(u)} U'.$$

D' und U' sind die Masseneigenzustände der Quarks.

(Zerlegung von Spinoren: $\psi = \psi_L = \psi_R$.)

Die Lagrange-Funktion für die schwache geladene Stromwechselwirkung der Quarks läßt sich folgendermaßen durch die Masseneigenzustände ausdrücken:

$$
\begin{aligned}
. \quad & \mathcal{L}_{CC}^{\text{Quarks}} = \\
= \quad & -\frac{g}{\sqrt{2}}[j_{CC}^{\mu+}W_\mu^- + j_{CC}^{\mu-}W_\mu^+] \\
= \quad & -\frac{g}{\sqrt{2}}\sum_{i=1}^{3}\left[(\overline{U}_{Li}\gamma^\mu D_{Li})W_\mu^- + (\overline{D}_{Li}\gamma^\mu U_{Li})W_\mu^+\right] \\
= \quad & -\frac{g}{\sqrt{2}}\left[(\overline{U}_L\gamma^\mu 1 D_L)W_\mu^- + (\overline{D}_L\gamma^\mu 1 U_L)W_\mu^+\right] \\
\equiv \quad & -\frac{g}{\sqrt{2}}\left[(\overline{U}'_L U_u^\dagger\gamma^\mu U_d D'_L)W_\mu^- + (\overline{D}'_L U_d^\dagger\gamma^\mu U_u U'_L)W_\mu^+\right] \\
=: \quad & -\frac{g}{\sqrt{2}}\Big[\underbrace{(\overline{U}'_L\gamma^\mu V_{CKM}D'_L)}_{=j_{CC}^{\prime\mu+}}W_\mu^- \\
. \quad & \qquad + \underbrace{(\overline{D}'_L V_{CKM}^\dagger\gamma^\mu U'_L)}_{=j_{CC}^{\prime\mu-}}W_\mu^+\Big]
\end{aligned}
$$

mit der unitären Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM)-Matrix $V_{CKM} = U_u^\dagger U_d$.

Die "Quark-Mischungsmatrix" V_{CKM} beschreibt die Gewichte für schwache CC-Übergäng zwischen den up- und down-artigen Masseneigenzuständen der Quarks und führt zu Übergängen zwischen den Quarkgenerationen mit definierten Massen, die an die elektromagnetische und starke WW koppeln ($'$ wird im folgenden weggelassen):

$$\begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} d_C \\ s_C \\ b_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}.$$

Z.B.: $u \longleftrightarrow d_C = V_{ud}d + V_{us}s + V_{ub}b$.

Die Elemente der CKM-Matrix werden vom Standardmodell nicht vorhergesagt, sondern müssen experimentell bestimmt werden. Dies ist ein aktiver Forschungszweig, insbesondere für die Übergänge mit schweren Quarks (c, b, t).

Zahl der unabhängigen Parameter der CKM-Matrix:

Allgemein gilt:

Komplexe $n \times n$-Matrix: $2n^2$ Parameter.

Unitäre Matrix mit n^2 Nebenbedingungen ($V^\dagger V = 1$): n^2 Parameter.

Davon sind $\underline{n(n-1)/2}$ Parameter reell; die übrigen $n^2 - n(n-1)/2 = n(n+1)/2$ Parameter sind komplexe Phasenfaktoren.

Denn eine reelle unitäre Matrix (orthogonale Matrix) mit $n + n(n-1)/2$ Nebenbedingungen ($V^T V = 1$) hat $n^2 - n - n(n-1)/2 = n(n-1)/2$ unabhängige reelle Parameter.

n Phasenfaktoren können in den n U-Feldern durch Neudefinition ihrer Phase absorbiert werden (aus der 1. Spalte der Mischungsmatrix):

$$U_{Lj} \longrightarrow e^{-i\alpha_j^{(u)}} U_{Lj} \quad (j = 1, ..., n).$$

$n-1$ weitere Phasenfaktoren können aus der 1. Reihe der Mischungsmatrix in den $n-1$ D-Feldern absorbiert werden:

$$D_{Lj} \longrightarrow e^{-i\alpha_j^{(d)}} D_{Lj} \quad (j = 2, ..., n),$$

d.h. insgesamt werden $2n-1$ Phasenfaktoren eliminiert.

Danach bleiben $n(n+1)/2 - (2n-1) = \underline{(n-1)(n-2)/2}$ <u>unabhängige Phasenfaktoren übrig.</u>

Für $n = 2$ Generationen:

Reelle orthogonale 2×2 Matrix mit einem reellen Parameter, keine komplexe Phase:

$$\mathrm{Cabibbo-Matrix} : V = \begin{pmatrix} \cos\theta_c & \sin\theta_c \\ -\sin\theta_c & \cos\theta_c \end{pmatrix}.$$

θ_c ist der Cabibbo-Winkel

mit $\sin\theta_c \approx 0.23$ und $\cos\theta_c \approx 0.95$.

Für $n = 3$ Generationen:

CKM-Matrix mit 3 reellen Parametern und 1 komplexen Phase: $V^* \neq V$

(möglich für ≥ 3 Generationen).

Ermöglicht Beschreibung der beobachteten schwachen Verletzung der CP-Symmetrie im Rahmen des Standardmodells (mit 6 Quarks in 3 Generationen),

wiederum durch die schwache Wechselwirkung: Ursprung in der Fermion-Higgs-Boson-Kopplung (Massenmatrix):

Vorschlag von Kobayahi und Maskawa 1973 vor der Entdeckung der dritten Fermion-Generation (τ-Lepton 1975, bottom-Quark 1977, top-Quark 1994) und des charm-Quarks (1974).

CP-Transformation von $\mathcal{L}_{CC}$:

$$\begin{aligned} j_{CC}^{\mu +} &= \overline{U}_L \gamma^\mu V_{CKM} D_L \xrightarrow{CP} -\overline{D}_L V_{CKM}^T \gamma^\mu U_L; \\ j_{CC}^{\mu -} &= \overline{D}_L V_{CKM}^\dagger \gamma^\mu U_L \xrightarrow{CP} -\overline{U}_L \gamma^\mu V_{CKM}^* D_L; \end{aligned}$$

$$W_\mu^\pm \xrightarrow{CP} -W_\mu^\mp .$$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \quad (\overline{U}_L \gamma^\mu V_{CKM} D_L) W_\mu^- + (\overline{D}_L V_{CKM}^\dagger \gamma^\mu U_L) W_\mu^+ \\ &\xrightarrow{CP} \quad (\overline{D}_L V_{CKM}^T \gamma^\mu U_L) W_\mu^+ + (\overline{U}_L \gamma^\mu V_{CKM}^* D_L) W_\mu^- , \end{aligned}$$

d.h. $\mathcal{L}_{CC}$ ist nur CP-invariant, wenn $V^* = V$.

Diskrete Symmetrietransformationen:

1. Parität P (Raumspiegelung): $\vec{x} \longrightarrow -\vec{x}$, $\vec{p} \longrightarrow -\vec{p}$.

$$\psi(t, \vec{x}) \longrightarrow \psi^P(t, -\vec{x}) = \eta_P \gamma^0 \psi(t, \vec{x})$$

erfüllt die raumgespiegelte Dirac-Gleichung.

2. Zeitinversion T: $t \longrightarrow -t$.

$$\psi(t, \vec{x}) \longrightarrow \psi^T(-t, \vec{x}) = i\gamma^1\gamma^3\psi^*(t, \vec{x})$$

erfüllt die zeitgespiegelte Dirac-Gleichung.

3. Ladungskonjugation C: invertiert additive Quantenzahlen.

$$\psi(t, \vec{x}) \longrightarrow \psi^C(t, \vec{x}) = i\eta_C \gamma^2 \psi^*(t, \vec{x})$$

erfüllt die konjugierte Dirac-Gleichung.

4. CP-Transformation:

$$\psi(t, \vec{x}) \longrightarrow \psi^C P(t, -\vec{x}) = i\eta_C P \gamma^2 \gamma^0 \psi^*(t, \vec{x})$$

η_P, η_C sind komplexe Phasenfaktoren.

P- und auch C-Parität sind durch die schwache Wechselwirkung verletzt.

CP-Invarianz der schwachen WW 1957 von Landau postuliert als Ersatz für C- und P-Symmetrie.

CPT-Theorem $\Longrightarrow$ T und CP haben gleiche Wirkung

(Schwinger 1951, Pauli 1955, Lüders 1957).

$\Longleftrightarrow$ gleiche Lebensdauern und Massen von Teilchen und Antiteilchen.

Geringfügige Verletzung der CP-Symmetrie 1964 in K^0-Zerfällen entdeckt (Christenson, Cronin, Fitch, Turlay): verursacht durch schwache WW oder neue superschwache WW?

Mikroskopische CP-Verletzung wird benötigt, um die Baryon-Antibaryon-Asymmetrie und die Existenz der Materie im Universum zu erklären (Sacharov 1967). Schwache WW mit CKM-Matrix reicht vermutlich nicht aus ($\rightarrow$ z.B. Grand Unified Theories).

Eine Standard-Parametrisierung der CKM-Matrix ist:

$$
\begin{aligned}
V_{CKM} \quad &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \\
&\cdot \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \\
&\cdot \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
= \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -s_{23}c_{12} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}
$$

mit den Mischungswinkeln θ_{ij} zwischen den Quark-Generationen $i, j = 1, ..., 3; i < j$, $s_{ij} = \sin\theta_{ij} > 0$ und $c_{ij} = \cos\theta_{ij} > 0$, und der komplexen Phase $e^{i\delta}$.

CP-verletzende Effekte im Standardmodell sind auf natürliche Weise klein,

da $\sim s_{12}c_{12}s_{23}c_{23}s_{13}c_{13}\sin\delta$.

Die aktuellen Meßwerte für die CKM-Matrixelemente sind:

$\lvert V_{ud}\rvert = 0.9736 \pm 0.0010$	aus nukl. β- und μ-Zerfall
$\lvert V_{us}\rvert = 0.2205 \pm 0.0018$	aus semilept. Kaon-Zerfällen $K \to \pi e \nu_e$
$\lvert V_{ub}\rvert = (0.08 \pm 0.02) \cdot \lvert V_{cb}\rvert$	aus semileptonischen Zerfällen $B \to X_u \ell \nu_\ell$
$\lvert V_{cd}\rvert = 0.224 \quad \pm 0.016$	charm-Quark-Produktionsrate in $\nu(\bar{\nu})$-Kern-Streuung
$\lvert V_{cs}\rvert = 1.01 \quad \pm 0.18$	semileptonische charm-Quark Zerfälle $D \to K e \nu_e$ $(c \to s)$
$\lvert V_{cb}\rvert = 0.041 \quad \pm 0.003$	aus semilept. B-Mesonzerfällen
$\lvert V_{td}\rvert = 0.009 \pm 0.003$	von $B_d^0 \overline{B}_d^0$-Mischung
$\lvert V_{td}/V_{ts}\rvert < 0.29$ (95 % C.L.)	von $B_d^0 \overline{B}_d^0$- und $B_s^0 \overline{B}_s^0$-Mischung
$\lvert V_{td}/V_{ts}\rvert < 0.56$ (90 % C.L.)	von $b \to s\gamma$ Zerfällen
$\lvert V_{ts}/V_{cb}\rvert = 1.1 \pm 0.4$	von $b \to s\gamma$ Zerfällen
$\lvert V_{tb}\rvert > 0.016$ (95 % C.L.)	aus top-Quark-Zerfällen $t \to W^+ b$

$$\begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix}$$

Damit gilt in sehr guter Näherung:

$s_{13} = |V_{ub}| \sim \mathcal{O}(10^{-3})$, $s_{23} \approx |V_{cb}| \sim \mathcal{O}(10^{-2})$, $c_{13} \approx c_{23} \approx 1$ sowie $s_{12} \approx |V_{us}|$.

Die näherungsweise Wolfenstein-Parametrisierung macht die Rangordnung der Übergänge zwischen den Quark-Generationen (Massen/flavour-Eigenzustände) deutlich:

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} 1-\frac{\lambda^2}{2} & \lambda & A\lambda^3(\rho - i\eta) \\ -\lambda & 1-\frac{\lambda^2}{2} & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1-\rho-i\eta) & -A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\lambda^4),$$

bei der die Matrixelemente nach dem kleinen Parameter λ entwickelt werden.

u **c** **t**

d **s** **b**

Die Hierarchie der Übergangswahrscheinlichkeiten läßt eine Erklärung durch eine dem Standardmodell übergeordnete Theorie erwarten.

Die 4 unabhängigen Parameter λ, A, ρ und η lassen sich in allen Ordnungen in λ folgendermaßen definieren:

$$\begin{aligned} s_{12} &= \lambda, \\ s_{23} &= A\lambda^2, \\ s_{13}e^{-i\delta} &= A\lambda^3(\rho - i\eta). \end{aligned}$$

und damit
$$\begin{aligned} \rho &= \frac{s_{13}}{s_{12}s_{23}}\cos\delta, \\ \eta &= \frac{s_{13}}{s_{12}s_{23}}\sin\delta, \\ \sqrt{\rho^2+\eta^2} &= \frac{|V_{ub}|}{A\lambda^3}. \end{aligned}$$

Die Wolfenstein-Parameter haben die Werte:

$$\begin{aligned} \lambda &= 0.2205 \pm 0.0018, \\ A &= 0.82 \pm 0.06, \\ \sqrt{\rho^2+\eta^2} &= 0.36 \pm 0.09. \end{aligned}$$

Die Orthogonalitätsbedingungen für die Spaltenvektoren der unitären CKM-Matrix,

$$\begin{aligned} V_{ud}^*V_{us} + V_{cd}^*V_{cs} + V_{td}^*V_{ts} &= 0, \\ V_{us}^*V_{ub} + V_{cs}^*V_{cb} + V_{ts}^*V_{tb} &= 0, \\ V_{ub}^*V_{ud} + V_{cb}^*V_{cd} + V_{tb}^*V_{td} &= 0, \end{aligned}$$

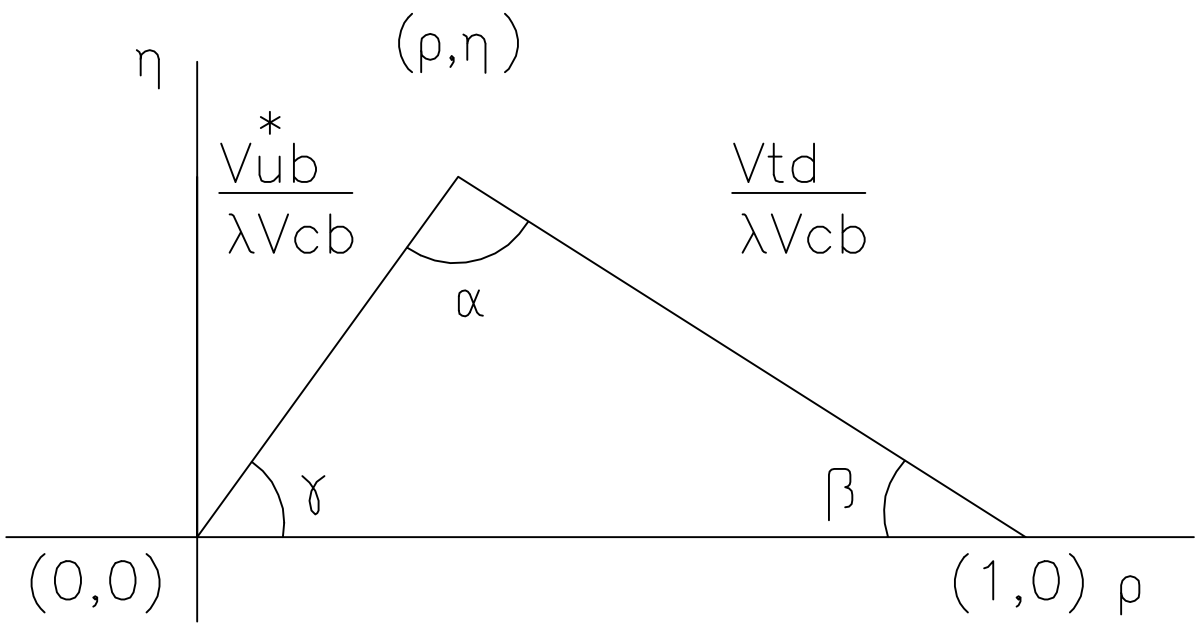
beschreiben Dreiecke in der komplexen Ebene.

Die Dreiecke haben eine nichtverschwindende Fläche, wenn die Phase $\delta \neq 0$, d.h. CP-Verletzung.

Am nützlichsten für den Test der Unitarität der CKM-Matrix ist das durch die letzte Gleichung,

$$\frac{V_{ub}^*}{\lambda V_{cb}} + \frac{V_{td}}{\lambda V_{cb}} = 1,$$

definierte Dreieck, das CP-Verletzung in B-Meson-Zerfällen (mit bottom-Quarks) beschreibt (sog. Unitaritätsdreieck):



Konsequenzen der Quark-Flavour-Mischung in der schwachen WW:

Flavour-Oszillationen:

Teilchen-Antiteilchen-Oszillationen der neutralen Mesonen:

$$\begin{array}{lcl}
K^0 = (d\bar{s}) & \longleftrightarrow & \overline{K}^0 = (\bar{d}s) \quad (|\Delta S| = 2); \\
D^0 = (c\bar{u}) & \longleftrightarrow & \overline{D}^0 = (\bar{c}u) \quad (|\Delta C| = 2); \\
B_d^0 = (d\bar{b}) & \longleftrightarrow & \overline{B}_d^0 = (\bar{d}b) \quad (|\Delta B| = 2); \\
B_s^0 = (s\bar{b}) & \longleftrightarrow & \overline{B}_d^0 = (\bar{s}b) \quad (|\Delta B| = 2).
\end{array}$$

Die schwache Wechselwirkung verletzt die Erhaltung der flavour-Quantenzahlen.

Vorhersage von Gell-Mann und Pais 1955 für K^0-Mesonen:

Flavour-Eigenzustände K^0 $(S=-1)$, $\overline{K}^0$ $(S=+1)$

$\neq$ CP-Eigenzustände mit definierten Massen und Lebensdauern:

K_S^0 (kurzlebig): $\tau \sim 10^{-10}$ s; $K_S^0 \to \pi^+\pi^-$ $(CP=+1)$;

K_L^0 (langlebig): $\tau \sim 10^{-7}$ s; $K_L^0 \to \pi^+\pi^-\pi^+$ $(CP=-1)$.

Die zeitliche Entwicklung der Zustände

$$\phi(t) >= a(t)|K^0 > +b(t)|\overline{K}^0 >= \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix},$$

$$|K^0 >= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \overline{K}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

wird beschrieben durch die Schrödinger-Gleichung

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\phi >= H\phi >$$

mit dem effektiven Hamilton-Operator $(H^\dagger \neq H)$:

$$H = H_{\text{el.magn.}} + H_{\text{stark}} + H_{\text{schwach}} = \widehat{M} - i\widehat{\Gamma}/2$$

$\widehat{M}$, $\widehat{\Gamma}$ sind die Massen- bzw. Zerfallsmatrix:

$$\begin{aligned}
\widehat{M} - \frac{i}{2}\widehat{\Gamma} &= \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} - \frac{i}{2}\begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} M_K & M_{12} \\ M_{12} & M_K \end{pmatrix} - \frac{i}{2}\begin{pmatrix} \Gamma_K & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_K \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

mit $M_{11} = M_{22}$, $M_{21} = M_{12}^*$ wegen CPT-Invarianz, $M_{12} = M_{21} = M_{12}^*$ bei CP-Invarianz, $M_K = (M_S + M_L)/2$ und $\Delta M := M_L - M_S$ (ebenso für Γ).

Sie lassen sich Diagonalisieren durch die Transformation ($K^0 - \overline{K}^0$-Mischung):

$$\begin{aligned}
K_S^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(K^0 + \overline{K}^0); \\
K_L^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(K^0 - \overline{K}^0),
\end{aligned}$$

mit den Massen- und Lebensdauer-Eigenzuständen K_L^0 und K_S^0 und den Eigenwerten:

$$\begin{aligned}
M_{S,L} &= M_K \pm \mathcal{R}e\sqrt{(M_{12} - \frac{i}{2}\Gamma_{12})(M_{12}^* - \frac{i}{2}\Gamma_{12}^*)}; \\
\Gamma_{S,L} &= \Gamma_K \mp \mathcal{I}m\sqrt{(M_{12} - \frac{i}{2}\Gamma_{12})(M_{12}^* - \frac{i}{2}\Gamma_{12}^*)} = \tau_{S,L}^{-1};
\end{aligned}$$

$K^0 - \overline{K}^0$-Übergänge, $M_{12} \neq 0$, werden in 2. Ordnung der schwachen WW ($\Delta S = 2$) erzeugt:

$$\Longrightarrow \Delta m \approx \frac{G_F}{4\pi^2} f_K^2 M_K m_c^2 \cos^2\theta_C \sin^2\theta_C$$

mit der Kaon-Zerfallskonstante f_K (QCD-Parameter) und dem Cabibbo-Winkel θ_C.

Der Beitrag des charm-Quark-Austauschs (umgekehrtes Vorzeichen der Amplitude wegen V_{CKM}) dominiert, da $m_c \gg m_u$.

$\Longrightarrow$ Vorhersage der charm-Quarkmasse $m_c \approx 1.5$ GeV 1974 (Gaillard, Lee) vor der Entdeckung des charm-Quarks.

(Der Beitrag von top-Quark-Austausch ist aufgrund der V_{CKM}-Faktoren unterdrückt; er dominiert für $B^0 - \overline{B}^0$-Mischung.)

Die zeitliche Entwicklung der Masseneigenzustände ist gegeben durch:

$$
\begin{aligned}
K_S^0(t) &= \mathcal{N} e^{-(im_S+\frac{\Gamma_S}{2})t} K_S(0); \\
K_L^0(t) &= \mathcal{N} e^{-(im_L+\frac{\Gamma_L}{2})t} K_L(0).
\end{aligned}
$$

Damit ist die zeitliche Entwicklung der flavour-Eigenzustände $K^0(0)$ und $\overline{K}^0(0)$:

$$
\begin{aligned}
K^0(t) = \mathcal{N} e^{-(iM_K+\frac{\Gamma_K}{2})t} \quad & [\quad (e^{(\frac{\Delta\Gamma}{4}+i\frac{\Delta M}{2})t} + e^{-(\frac{\Delta\Gamma}{4}+i\frac{\Delta M}{2})t})\, K^0 \\
& + \quad (e^{(\frac{\Delta\Gamma}{4}+i\frac{\Delta M}{2})t} - e^{-(\frac{\Delta\Gamma}{4}+i\frac{\Delta M}{2})t})\, \overline{K}^0], \\
\overline{K}^0(t) = \mathcal{N} e^{-(iM_K+\frac{\Gamma_K}{2})t} \quad & [\quad (e^{(\frac{\Delta\Gamma}{4}+i\frac{\Delta M}{2})t} - e^{-(\frac{\Delta\Gamma}{4}+i\frac{\Delta M}{2})t})\, K^0 \\
& + \quad (e^{(\frac{\Delta\Gamma}{4}+i\frac{\Delta M}{2})t} + e^{-(\frac{\Delta\Gamma}{4}+i\frac{\Delta M}{2})t})\, \overline{K}^0].
\end{aligned}
$$

Die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten $\mathcal{P}$ der K^0-Zustände oszillieren mit einer Frequenz ΔM und $180°$ relativer Phasenverschiebung neben dem Zerfall mit der mittleren Lebensdauer Γ_K (**flavour-Oszillationen**):

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(K^0 \to K^0(t)) &= |<K^0|K^0(t)>|^2 \\
&= \mathcal{N}e^{-\Gamma_K t}(e^{\frac{1}{2}\Delta\Gamma t} + e^{-\frac{1}{2}\Delta\Gamma t} + 2\cos(\Delta m\ t); \\
\mathcal{P}(K^0 \to \overline{K}^0(t)) &= |<\overline{K}^0|K^0>|^2 \\
&= \mathcal{N}e^{-\Gamma_K t}(e^{\frac{1}{2}\Delta\Gamma t} + e^{-\frac{1}{2}\Delta\Gamma t} - 2\cos(\Delta m\ t)
\end{aligned}$$

(ebenso für $\overline{K}^0$).

Die gemessene $K_L^0 - K_S^0$-Massenaufspaltung ist ($\hbar\omega = \Delta M c^2$):

$$\Delta M = 3.52 \cdot 10^{-6}\ \text{eV} = 0.535 \cdot 10^{10}\ \text{Hz}.$$

Ähnlich für B_d^0- und B_s^0-Mesonen:

$$\begin{aligned}
\Delta M_d &= (0.464 \pm 0.018) \cdot 10^{12}\ \text{Hz}; \\
\Delta M_s &> 9.1 \cdot 10^{12}\ \text{Hz}.
\end{aligned}$$

CP-Verletzung in K^0-Zerfällen:

1964: Nachweis von $K_L^0 \to \pi^+\pi^-$ (sehr kleiner Anteil)

$\Longrightarrow$ Verletzung der CP- und damit der Zeitumkehrsymmetrie in K^0-Zerfällen.

$\Longrightarrow$ Masseneigenzustände $K_{S,L}^0$ sind orthogonale Mischung der CP-Eigenzustände $=: K_{1,2}^0$ $(CP = \pm 1)$, mit kleiner Beimischung des "falschen" CP-Zustands $\sim \varepsilon$:

$$
\begin{aligned}
K_S^0 &= \frac{K_1^0 - \varepsilon K_2^0}{\sqrt{1+|\varepsilon|^2}}; \\
K_L^0 &= \frac{K_2^0 + \varepsilon K_1^0}{\sqrt{1+|\varepsilon|^2}}.
\end{aligned}
$$

Tritt auf, falls die Massenmatrix komplex ist mit $M_{12}^* \neq M_{12}$: sog. "indirekte" CP-Verletzung durch Interferenz bei $K^0 - \overline{K}^0$-Mischung.

Im Standardmodell verursacht durch den komplexen Phasenfaktor der CKM-Matrix.

Alternativ: neue superschwache Wechselwirkung (Wolfenstein, 1964)?

Messung: $|\varepsilon| = (2.26 \pm 0.02) \cdot 10^{-3}$ (kleiner Effekt!).

"Direkte" CP-Verletzung im Zerfall des CP-Eigenzustands K_2^0.

Im Standardmodell durch komplexe Phase der CKM-Matrix bei Interferenz des Zerfallsprozesses niedrigster Ordnung zu $K_2^0 \to \pi^+\pi^-$ oder $\pi^0\pi^0$ mit Beiträgen höherer Ordnung, die zum gleichen Endzustand führen (sog. "Pinguin"-Diagramme):

Anteil direkter CP-Verletzung beschrieben durch Parameter ε'.

$\varepsilon' \neq 0$ schließt superschwache WW als Quelle der CP-Verletzung aus.

Nachweis bei CERN und FNAL (1999):

$|\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}| = (21.2 \pm 4.6) \cdot 10^{-4}$ (sehr kleiner Effekt!).

Das Standardmodell sagt direkte und indirekte CP-Verletzung auch bei B^0-Mesonen vorraus.

$\longrightarrow$ Test bei B-Meson-Fabriken ab 1999.

Neutrale Ströme für Quark-Massenzustände:

$$\mathcal{L}_{NC} = -ej^{\mu}_{\text{el.magn.}} A_\mu - \frac{e}{\sin\theta_W \cos\theta_W}[j^{\mu 3} - j^{\mu}_{\text{el.magn.}} \sin^2\theta_W] Z_\mu$$

mit dem elektromagnetischen Strom

$$\begin{aligned} j^{\mu}_{\text{el.magn.}} &= Q_u(\overline{U}\gamma^\mu U) + Q_d(\overline{D}\gamma^\mu D) \\ &= Q_u(\overline{U}'\gamma^\mu U') + Q_d(\overline{D}'\gamma^\mu D') \end{aligned}$$

und dem Strom der dritten Komponente des schwachen Isospins

$$\begin{aligned} j^{\mu}_{\text{el.magn.}} &= I^3_u(\overline{U}\gamma^\mu U) + I^3_d(\overline{D}\gamma^\mu D) \\ &= \frac{1}{2}(\overline{U}\gamma^\mu U) - \frac{1}{2}(\overline{D}\gamma^\mu D) \\ &= \frac{1}{2}(\overline{U}'\gamma^\mu U') - \frac{1}{2}(\overline{D}'\gamma^\mu D'). \end{aligned}$$

Die neutralen Ströme bleiben flavour-erhaltend für die Masseneigenzustände U', D' wie für die schwachen Eigenzustände U, D wegen der Unitarität der Transformation,

$$U^\dagger_{u,d} U_{u,d} = 1; \quad V^\dagger_{u,d} V_{u,d} = 1,$$

so daß z.B.

$$\begin{aligned} \overline{U}\gamma_\mu U &= \overline{U}_L \gamma_\mu U_L + \overline{U}_R \gamma_\mu U_R \\ &= \overline{U}'_L U^\dagger_u \gamma_\mu U_u U'_L + \overline{U}'_R V^\dagger_u \gamma_\mu V_u U'_R \\ &= \overline{U}'_L \gamma_\mu U'_L + \overline{U}'_R \gamma_\mu U'_R = \overline{U}' \gamma_\mu U'. \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Keine CP-Verletzung in der schwachen neutralen und der elektromagnetischen WW.

Die kinetischen Terme und die WW mit dem Higgs-Feld bleiben ebenfalls unverändert.

$\Longrightarrow$ Keine flavour-ändernden neutraler Strom (FCNC)-Prozesse in 1. Ordnung im Standardmodell;

Unterdrückung von FCNC-Prozessen auch in höherer Ordnung der schwachen WW: durch den

"**GIM-Mechanismus**" (Glashow, Illiopoulos, Maiani).

Experimentell sind FCNC-Prozesse sehr klein, z.B. ist das Verzweigungsverhältnis

$$BR(K_L^0 \to \mu^+\mu^-) = \frac{\Gamma(K_L^0 \to \mu^+\mu^-)}{\Gamma_{K_L^0}^{\text{tot}}} \approx 9 \cdot 10^{-7}\%$$

während $BR(K^+ \to \mu^+\nu_\mu = 63.5\%$.

(NB: Schwacher Zerfall in Myonpaar bevorzugt gegenüber Zerfall in Elektronpaar wegen Drehimpulserhaltung und Paritätsverletzung!)

Zerfallsprozeß in 2. Ordnung der schwachen WW;

Gegenseitige Aufhebung der Amplituden für up- und charm-Quark-Austausch wegen der Unitariät der CKM-Matrix (Orthogonalität der Cabibbo-Matrix für 2 Generationen):

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_u &\sim & g^4 \sin\theta_C \cos\theta_C; \\ \mathcal{M}_c &\sim & -g^4 \sin\theta_C \cos\theta_C; \end{aligned}$$

abhängig vom Wert der charm-Quark-Masse $m_c \gg m_u$.

$\Longrightarrow$ Vorhersage der Masse des charm-Quarks: > 1 GeV.

Massen der Leptonen:

Mit $D = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^- \\ \mu^- \\ \tau^- \end{pmatrix}$; $U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}$

ist wie für die Quarks

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Masse}}^{\text{Leptonen}} &= -\overline{D}_L M^{(d)} D_R - \overline{D}_R M^{(d)\dagger} D_L \\ &. \quad -\overline{U}_L M^{(u)} U_R - \overline{U}_R M^{(u)\dagger} U_L \\ &= -\overline{D}' M_{\text{diag}}^{(d)} D' - \overline{U}' M_{\text{diag}}^{(u)} U' \end{aligned}$$

nach Diagonalisierung der Massenmatrix mit bi-unitärer Transformation und Redefinition der Phasen (U, D: schwache Eigenzustände; U', D': Masseneigenzustände).

Die unitäre Transformation $\widehat{U}$ (3×3-Matrix)

$$\widehat{L} = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \widehat{L}' = \begin{pmatrix} L_1' \\ L_2' \\ L_3' \end{pmatrix} = \widehat{U} \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \widehat{U}\widehat{L}$$

läßt die kinematischen und WW-Terme invariant (d.h. diagonal in den Generationen):

$$\sum_{i=1}^{3} \overline{L}_i i\gamma^\mu D_\mu L_i \equiv \overline{\widehat{L}} i\gamma^\mu D_\mu 1_{3\times 3}\widehat{L}$$
$$= \overline{\widehat{L}}' i\gamma^\mu D_\mu 1_{3\times 3}\widehat{L}',$$

wobei $L_i = \begin{pmatrix} \nu_i \\ \ell_i^- \end{pmatrix}_L$ die linkshändigen $SU(2)_L$-Dubletts der Leptonen sind.

Beide Komponenten der Dubletts werden dabei gemeinsam und auf gleiche Weise transformiert.

Wählt man
$$\widehat{U} := U_d^\dagger = U_d^{-1},$$

wird in $\mathcal{L}_{CC}$ die Transformation von schwachen zu Masseneigenzuständen für die unteren Komponenten der Lepton-Dubletts (geladene Leptonen) rückgängig gemacht:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{CC}^{\text{Lepton}} &= -\frac{g}{\sqrt{2}}\big[(\overline{U}_L\gamma^\mu 1 D_L)W_\mu^- + (\overline{D}_L\gamma^\mu 1 U_L)W_\mu^+\big] \\
&= -\frac{g}{\sqrt{2}}\big[(\overline{U}'_L U_u^\dagger\gamma^\mu U_d D'_L)W_\mu^- + (\overline{D}'_L U_d^\dagger\gamma^\mu U_u U'_L)W_\mu^+\big] \\
&\to -\frac{g}{\sqrt{2}}\big[(\overline{U}'_L \overbrace{U_u^\dagger\widehat{U}^\dagger}^{U_u^\dagger U_d}\gamma^\mu \overbrace{\widehat{U}U_d}^{U_d^\dagger U_d=1} D'_L)W_\mu^- \\
&\quad + (\overline{D}'_L \underbrace{U_d^\dagger\widehat{U}^\dagger}_{U_d^\dagger U_d=1}\gamma^\mu \underbrace{\widehat{U}U_u}_{U_d^\dagger U_u} U'_L)W_\mu^+\big]
\end{aligned}$$

Falls die Massen aller 3 Neutrinos gleich sind,

z.B. $m_{\nu_e} = m_{\nu_\mu} = m_{\nu_\tau} = m_\nu \equiv 0$,

können die linkshändigen Neutrino-Massenzustände U'_L durch unitäre Transformation

$$(\widehat{U} U_u)^{-1} = (U_d^\dagger U_u)^\dagger = U_u^\dagger U_d$$

so umdefiniert werden, daß die schwachen CC-Übergänge ohne Mischung direkt (diagonal) zwischen den Masseneigenzuständen stattfinden während die Neutrino-Massenmatrix unverändert bleibt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{\mathrm{Neutrino}}_{\mathrm{Masse}} &= -\overline{U}'_L M^{(\nu)}_{\mathrm{diag}} U'_L - \overline{U}'_R M^{(\nu)}_{\mathrm{diag}} U'_R = -m_\nu \overline{U}' U' \\
&= -m_\nu \overline{U}'_L 1 U'_L - m_\nu \overline{U}'_R 1 U'_R \\
&\to -m_\nu \overline{U}'_L (U_u^\dagger U_d)^\dagger (U_u^\dagger U_d) U'_L - m_\nu \overline{U}'_R 1 U'_R \\
&= -m_\nu \overline{U}'_L U'_L - m_\nu \overline{U}'_R U'_R \\
&= -m_\nu \overline{U}' U'.
\end{aligned}$$

In diesem Fall finden keine Übergänge zwischen den Leptongenerationen statt; die Elektron-, Myon- und Tau-Zahlen sind separat erhalten.

Bisher keine direkte Evidenz für Neutrino-Massen $\neq 0$.

Neutrino-Massen sind viel kleiner als die Massen der geladenen Fermionen der gleichen Generation; insbesondere: $m_{\nu_e} < 8$ eV.

Falls $m_\nu \neq 0$ (für wenigstens eine Generation)

$\Longrightarrow$ Generationenmischung wie bei den Quarks.

$\Longrightarrow$ **Neutrino-Oszillationen**: