Neutrino-Oszillationen: für Neutrinos mit Masse:

(Zuerst B. Pontecorvo (Moskau, 1958): $\nu \leftrightarrow \bar{\nu}$.)

Masseneigenzustände der Neutrinos ν_i $(i = 1, ..., 3) \neq$ schwache flavour-Eigenzustände ν_α $(\alpha = e, \mu\,\tau)$.

$\Longrightarrow$ Diagonalisierung der Neutrino-Massenmatrix (wie bei Quarks):

Unitäre Transformation der wechselwirkenden linkshändigen Zustände:

$$\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}_L = U_u^\dagger \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}_L$$

d.h.

$$\begin{aligned} |\nu_i> &= \sum_\alpha U^*_{\alpha i} |\nu_\alpha>; \quad |\bar{\nu}_i> = \sum_\alpha U_{\alpha i} |\bar{\nu}_\alpha>; \\ |\nu_\alpha> &= \sum_i U_{\alpha i} |\nu_i>; \quad |\bar{\nu}_\alpha> = \sum_i U^*_{\alpha i} |\bar{\nu}_i>\,. \end{aligned}$$

Die zeitliche Entwicklung eines Masseneigenzustands ist gegeben durch

$$|\nu_i(t)>= e^{-iE_it}|\nu_i(0)>,$$

$$\text{mit}\;\; E_i = \sqrt{\vec{p}^2+m_i^2} \stackrel{m_i \ll p}{\approx} |\vec{p}| + \frac{1}{2}\frac{m_i^2}{|\vec{p}|} \stackrel{p\approx E}{\approx} E_\nu + \frac{1}{2}\frac{m_i^2}{E_\nu}.$$

Damit ergibt sich die zeitliche Entwicklung eines flavour-Zustands zur Zeit $t=0$,

$|\nu(0)>=|\nu_\alpha>=\sum_i U_{\alpha i}|\nu_i(0)>$, zu

$$|\nu(t)>=\sum_i U_{\alpha i}e^{-iE_it}|\nu_i(0)>=\sum_i\sum_\beta U_{\alpha i}U^*_{\beta i}e^{-iE_it}|\nu_\beta> .$$

$\Longrightarrow$ Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen flavour-Zuständen als Funktion der Zeit:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\nu_\alpha \to \nu_\beta; t) &= |<\nu_\beta|\nu(t)>|^2 \\ =\sum_i |U_{\alpha i}U^*_{\beta_i}|^2 &+ 2\mathcal{R}e \sum_{i,j(j>i)} U_{\alpha i}U^*_{\beta i}U^*_{\alpha j}U_{\beta j}e^{-i\Delta_{ij}}, \end{aligned}$$

$$\text{mit}\;(L=ct):\;\; \Delta_{ij} = (E_i - E_j)t \approx \frac{m_i^2-m_j^2}{2E}t =: \frac{1}{2}\delta m_{ij}^2\frac{L}{E}.$$

$\Longrightarrow$ Oszillationen zwischen flavour-Zuständen, falls <u>nicht alle</u> $\delta m_{ij}^2 = 0$.

Einfachster Fall: Mischung zwischen 2 Neutrino-Generationen:

2 Parameter: Mischungswinkel θ:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix},$$

und $\delta m^2 = m_2^2 - m_1^2 \sim$ Oszillationsfrequenz.

Übergangswahrscheinlichkeiten (CP erhalten):

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\nu_e \to \nu_e) &= \mathcal{P}(\nu_\mu \to \nu_\mu) = \mathcal{P}(\bar{\nu}_e \to \bar{\nu}_e) = \mathcal{P}(\bar{\nu}_\mu \to \bar{\nu}_\mu) \\ &= 1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{\Delta}{2} \ \text{ und} \\ \mathcal{P}(\nu_e \to \nu_\mu) &= \mathcal{P}(\nu_\mu \to \nu_e) = \mathcal{P}(\bar{\nu}_e \to \bar{\nu}_\mu) = \mathcal{P}(\bar{\nu}_\mu \to \bar{\nu}_e) \\ &= \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{\Delta}{2} = 1 - \mathcal{P}(\nu_e \to \nu_e), \end{aligned}$$

mit $\Delta = \frac{\delta m^2}{2} \frac{L}{E}$; Oszillationslänge $L_0 = \frac{4\pi E}{\delta m^2}$.

Für 3 Generationen: Parametrisierung der Mischungsmatrix U_u wie CKM-Matrix; ermöglicht CP-Verletzung.

Hinweise auf Neutrino-Oszillationen und damit Neutrino-Massen:

Atmosphärische Neutrinos:

Superkamiokande-Experiment (Kamioka-Bergwerk, Japan, 1998):

Defizit an ν_μ $(\bar{\nu}_\mu)$ gegenüber ν_e $(\bar{\nu}_e)$ beobachtet Teilchenschauern verursacht durch kosmische Strahlung in der Atmosphäre; insbesondere in der Blickrichtung nach unten $(\cos\theta_{\mathrm{Zenit}} < 0)$.

Wahrscheinlichste Interpretation durch Neutrino-Oszillationen $\nu_\mu \to \nu_e$ oder $\nu_\mu \to \nu_\tau$ in der Erde ($L_\circ = 10^4$ km).

$\Longrightarrow$ $\delta m^2 \approx 0.5 \cdot 10^{-2}$ eV^2; $\sin^2 2\theta > 0.8$ (nahe max. Mischung).

Annahme: $m_1 \approx m_2 \ll m_3 \approx m_\tau$ $(|U_{\tau 3}| \approx 1)$, d.h. eine Oszillationsfrequenz dominiert:

$$\delta m^2 := \delta m_{13}^2 \approx \delta m_{23}^2 \leq m_3^2.$$

$$\stackrel{\nu_\mu \to \nu_\tau}{\Longrightarrow} m_3 \approx m_\tau \approx (0.07 \pm 0.04)\ \mathrm{eV}.$$

Solares Neutrino-Defizit: ν_e

$\sim 50\%$ der Vorhersage des Sonnenmodells beobachtet.

Mögliche Erklärung: Neutrino-Oszillationen $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ in der Sonne (Resonanz-Verstärkung in der Sonnenmaterie: Mikheyev-Smirnov-Wolfenstein-Effekt, 1985),

mit $\delta m^2 \approx (6 - 9) \cdot 10^{-6}$ eV^2.

9. Konsequenzen des Standardmodells

9.1 “Laufende” Kopplungskonstanten und Renormierung

Fundamentales Problem bei der störungstheoretischen Berechnung von Observablen in der relativistischen Feldtheorie mit elementaren Punktteilchen als Trägern der Ladungen:

Divergenzen bei hohen Impulsüberträgen $\to \infty$, d.h. kleinen Abständen $\to 0$ in Diagrammen höherer Ordnung (Schleifendiagramme), die über die Prozesse niedrigster Ordnung (Baum-Graphen) hinausgehen (sog. UV-Divergenzen).

Problem behebbar durch das Renormierungsprogramm (effektive Ladungen und Massen in Anwesenheit von quantenmechanischen Vakuumfluktuationen) für renormierbare Feldtheorien.

Erfolg der QED aufgrund der Renormierbarkeit (40-ger Jahre).

$\longrightarrow$ Nicht-Abelsche Eichtheorien (auch mit SSB) sind renormierbar (t'Hooft, Veltman, 1971).

Beispiel aus der QED: Vakuumpolarisation bei der $e^{-}p$-Coulomb-Streuung:

Führt zu einer Modifikation des Photon-Propagators, die die Form des Resultats niedrigster Ordnung unverändert läßt.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}^{(1)} &= e_0^2 \overline{u}_e(p_3)\gamma^{\mu} u)e(p_1) \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \overline{u}_p(p_4)\gamma^{\nu} u_p(p_2); \\
\mathcal{M}^{(2)} &= e_0^2 \overline{u}_e(p_3)\gamma^{\mu} u)e(p_1) \Big[\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \\
&\cdot \quad Q_f^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \Big(ie_0\gamma^{\nu} \frac{i(\not{k} + m)}{k^2 - m^2} ie_0\gamma^{\rho} \frac{i(\not{q} - \not{k} + m)}{(q-k)^2 - m^2} \Big) \\
&\cdot \quad \frac{-ig_{\rho\sigma}}{q^2} \Big] \overline{u}_p(p_4)\gamma^{\sigma} u_p(p_2).
\end{aligned}
$$

(Summe über alle Fermionen, und $W^{\pm}$, in der Schleife, gewichtet mit Ladung und Masse/einfallende Energie).

Das Integral über $d^4k = k^2 dk d\Omega_k dk_0$, $k = |\vec{k}|$, divergiert für $k \to \infty$.

Deshalb Integrationsgrenze beim (willkürlichen) Abschneideparamete
$k = \Lambda$.

Dann ist für $q^2 \to 0$ ($|Q_f| = 1$):

$$\mathcal{M}^{(1)} + \mathcal{M}^{(2)} = e_0^2 \big[1 - \frac{\alpha_0}{3\pi} \ln\big(\frac{\Lambda^2}{m^2}\big)\big] \frac{\mathcal{M}^{(1)}}{e_0^2}.$$

Höhere Schleifenordnungen $n = 2, ..., \infty$ ("leading log"-Strahlungskorrekturen) wiederholen sich in der Korrektur zum Photon-Propagator in einer geometrischen Reihe, die exakt aufsummiert werden kann, d.h.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}^{(n)} &= e_0^2 \big[1 - \frac{\alpha_0}{3\pi} \ln\big(\frac{\Lambda^2}{m^2}\big) - \big(\frac{\alpha_0}{3\pi} \ln\big(\frac{\Lambda^2}{m^2}\big)\big)^2 + ...\big] \frac{\mathcal{M}^{(1)}}{e_0^2} \\ &= \frac{e_0^2}{1 + \frac{\alpha_0}{3\pi} \ln\big(\frac{\Lambda^2}{m^2}\big)} \cdot \frac{\mathcal{M}^{(1)}}{e_0^2}\end{aligned}$$

In einer fundamentalen Theorie (gültig für alle $k \to \infty$) soll das Endresultat unabhängig vom Abschneideparameter Λ sein.

Interpretation des Resultats:

im Streuprozeß wird die effektive (renormierte) elektr. Ladung ($\alpha = e^2/4\pi$)

$$\alpha_R(m_e^2) = \alpha = \frac{\alpha_0}{1 + \frac{\alpha_0}{3\pi}\ln\left(\frac{\Lambda^2}{m_e^2}\right)} =: Z_3 \cdot \alpha_0$$

gemessen.

Für $q^2 \to 0$ ist dies die Elementarladung $e = e_R(m_e^2)$ bzw. die Feinstrukturkonstante $\alpha_R(q^2 = m_e^2) = \alpha \approx \frac{1}{137}$, gemessen in der Coulomb-Streuung bei sehr niedrigen Energien (Atomphysik).

Die (sehr langsame, log) Divergenz in der Renormierungskonstanten Z_3 für $\Lambda \to \infty$ wird durch die “nackte” Ladung e_0 kompensiert.

Für $|q^2| \gg m_e^2$ gilt:

$$\begin{aligned}
\alpha_R(q^2) &= \frac{\alpha_0(\Lambda^2)}{1 + \frac{\alpha_0}{3\pi}\ln\left(\frac{\Lambda^2}{m_e^2}\right) - \frac{\alpha_0}{3\pi}\ln\left(\frac{-q^2}{m_e^2}\right)} \\
&= \frac{\alpha_0(\Lambda^2)}{\left[1 + \frac{\alpha_0}{3\pi}\ln\left(\frac{\Lambda^2}{m_e^2}\right)\right]\left[1 - \frac{\alpha_R(m_e^2)}{3\pi}\ln\left(\frac{-q^2}{m_e^2}\right)\right]} \\
&= \frac{\alpha_R(m_e^2)}{1 - \frac{\alpha_R(m_e^2)}{3\pi}\ln\left(\frac{-q^2}{m_e^2}\right)}.
\end{aligned}$$

Allgemein ist die q^2-Abhängigkeit der el.magn. Kopplung ("laufende" Kopplungskonstante):

$$\begin{aligned}\alpha_R(q^2) &= \frac{\alpha_R(q_0^2)}{1-\frac{\alpha_R(q_0^2)}{3\pi}\ln\left(\frac{q^2}{q_0^2}\right)}.\\ &\xrightarrow{\text{alle } f} \frac{\alpha_R(q_0^2)}{1-\sum_f N_C^f Q_f^2 \frac{\alpha_R(q_0^2)}{3\pi}\ln\left(\frac{q^2}{q_0^2}\right)}.\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Sehr langsame Entwicklung (log): $\alpha(M_Z^2) = 1/128.9$.

Kleiner Beitrag zum Lamb-shift in der Atomphysik.

$\Longrightarrow$ Abschirmung der "nackten" elektrischen Ladung bei großen Abständen (d.h. kleinen Impulsüberträgen) durch die polarisierten Vakuumfluktuationen (virtuelle $f\bar{f}$-Paare mit Lebensdauer $\Delta t \approx \hbar/2m_f$) wie in einem polarisierbaren Medium mit Permeabilität $\varepsilon > 1$.

Starke Kopplungskonstante der QCD:

Vakuumpolarisation in der Quark-Quark-Streuung mit Gluon-Austausch:

$\Longrightarrow$ q^2-Abhängigkeit der starken Kopplungskonstante $\alpha_s = \frac{g_s}{4\pi}$:

Beitrag der inneren Quark-Schleifen in Analogie zur QED mit $e^2 \to g_s^2 Sp\left(\frac{\lambda^a}{2}\frac{\lambda^b}{2}\right) = g_s^2 \frac{\delta^{ab}}{2}$:

$$[\alpha_s(q^2)]_{q\bar{q}} = \frac{\alpha_s(q_0^2)}{1 - N_q \frac{\alpha_s(q_0^2)}{6\pi} \ln\left(\frac{q^2}{q_0^2}\right)}.$$

Beitrag der Gluon-Schleifen:

$$[\alpha_s(q^2)]_{gg} = \frac{\alpha_s(q_0^2)}{1 + 11 \frac{\alpha_s(q_0^2)}{4\pi} \ln\left(\frac{q^2}{q_0^2}\right)}.$$

Zusammen (additive Beiträge):

$$\alpha_s(q^2) = \frac{\alpha_s(q_0^2)}{1 + (33 - 2N_q)\frac{\alpha_s(q_0^2)}{12\pi}\ln\left(\frac{q^2}{q_0^2}\right)}$$
$$= \frac{12\pi}{(33 - 2N_q)\ln\left(\frac{q^2}{\Lambda^2}\right)}$$

mit der Definition des QCD-Skalenparameters (aus der Störungstheorie) $\Lambda_{QCD}^2 = q_0^2 e^{-(C\alpha_s(q_0^2))^{-1}}$ mit $C = (33 - 2N_q)/12\pi$, der experimentell bestimmt werden muß (äquivalent zur Messung von $\alpha_s(q_0^2)$).

(gültig nur für $q^2 \gg \Lambda_{QCD}$: Störungstheorie anwendbar).

$\Longrightarrow$ Für $N_q \leq 16$ nimmt die starke Kopplungskonstante mit wachsendem q^2 schnell ab:

$$\alpha_s(q^2) \mapsto 0 \text{ für } |q^2| \to \infty,$$

sog. **"asymphthotische Freiheit"** der Quarks und Gluonen bei hohen Impulsüberträgen bzw. kurzen Abständen, in den farbneutralen Bindungszuständen der Hadronen ($d < 10^{-15}$ m $\approx$ Größe des Protons).

Effekt der überwiegenden Gluon-Vakuumpolarisation (nicht-Abelsche farbgeladene Eichbosonen): Anti-Abschirmung der Farbladung.

$$\alpha_s(M_Z^2) = 0.119.$$

$\Longrightarrow$ bei großen q^2 ist die Störungstheorie in der QCD anwendbar;

im Gegensatz zu kleinen $q^2 \leq \Lambda_{QCD}$ bzw. großen Abständen zwischen den Quarks, bei denen die starke Kopplungskonstante große Werte annimmt, d.h. keine Stöhrungstheorie:

Confinement der Quarks und Gluonen in Hadronen;

Fragmentation von Quarks und Gluonen in farbneutrale Hadronen.