10.3 Große Vereinheitlichung (GUT)

Vereinheitlichung der Eichwechselwirkungen des Standardmodells durch Einbettung in eine größere *einfache* Eichgruppe G mit einer einzigen Kopplungskonstanten:

$$G \supset SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y.$$

Das Standardmodell ist eine effektive Theorie bei niedrigen Energien nach spontaner Symmetriebrechung der Eichsymmetrien:

$$G \stackrel{M_{GUT}}{\longrightarrow} SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y \stackrel{M_{\mathrm{el.schw.}}}{\longrightarrow} SU(3)_C \otimes U(1)_Q.$$

Die Vereinheitlichungsskala, bei der alle Wechselwirkungen gleich stark werden (gemeinsame Kopplungskonstante) ist $M_{GUT} \approx 10^{15}$ GeV

(vergleiche die Skala der elektroschwachen Symmetriebrechung: $M_{\mathrm{el.schw.}} \approx \frac{v}{\sqrt{2}} \approx M_W$).

Das $SU(5)$-Modell:

Die kleinste einbettende Lie-Gruppe, die die Eichgruppen des Standardmodells als Untergruppen enthält ist $SU(5)$,

mit $n^2-1 = 24$ Generatoren T^a und 24 Eichfeldern $V_\mu^a(x)$ $(a = 1, ..., 24)$, von denen nur 12 schon im Standardmodell enthalten sind (8 Gluonen, $W^\pm$, Z^0, γ):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{SU(5)} &= -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu a} + \overline{\psi} i\gamma^\mu D_\mu \psi_f; \\ D_\mu &= \partial_\mu - ig_5 T^a V^a_\mu. \end{aligned}$$

Die fundamentale Darstellung hat die Dimension $n = 5$ und ist komplex: 5, 5^*.

Um alle 15 Fermion-Zustände der ersten Generation des SM in SU(5)-Multipletts unterzubringen, wird zusätzlich die 10-dim. irreduzible Darstellung 10 benötigt:

reduzible Darstellung $5^* + 10$ (zusammen frei von SU(5)-Anomalien).

Zerlegung in reduzible $(SU(3)_C, SU(2)_L)$-Darstellungen ergibt $(i = r, g, b)$:

$$5_L = \underbrace{(3,1)}_{\overline{d}_{iL}} + \underbrace{(1,2)}_{(\nu_e, e^-)_L} \quad \text{und} \quad 5^*_R = \underbrace{(3^*,1)}_{d_{iR}} + \underbrace{(1,2)}_{(\overline{\nu}_e, e^+)_R}.$$

$$10_L = \underbrace{(3,2)}_{(u_i, d_i)_L} + \underbrace{(3^*,1)}_{\overline{u}_{iL}} + \underbrace{(1,1)}_{e^+_L}.$$

Das fundamentale $SU(5)$-Multiplett enthält:

$$
\begin{array}{cccc}
 & Q & Y & I^0 \\
5^* : \left(\begin{array}{c} \nu_e \\ e^- \\ \overline{d}_r \\ \overline{d}_g \\ \overline{d}_b \end{array} \right)_L &
\begin{array}{c} 0 \\ -1 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{array} &
\begin{array}{c} -1 \\ -1 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{array} &
\begin{array}{c} +\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}
\end{array}
$$

$\Longrightarrow$ Leptonen und Quarks in Multipletts der Eichgruppe vereinigt

(mit gleichen Helizitäten: Drehimpulserhaltung,

$[\vec{J}, T_a] = 0$).

$\Longrightarrow$ da für $SU(n)$-Generatoren, wie Q, die Spur $\equiv 0$, gilt für die 5^*-Darstellung:

$$Q(\nu_e) + Q(e^-) + 3 \cdot Q_(\overline{d}) = 0 - 1 + 3 \cdot \frac{1}{3} = 0,$$

d.h. die $SU(5)$-Symmetrie verlangt $Q(\overline{d}) = +\frac{1}{3}$!

Verknüpfung zwischen drittelzahligen Quarkladungen und Zahl der Farben.

Erklärung für die exakte Ladungsquantisierung:

$Q(e^-) = -Q(p)$, neutrale Atome.

$\Longrightarrow$ Kein Platz für rechtshändige Neutrinos; d.h. Neutrinos masselos.

Alternative einfache GUT-Gruppen mit rechtshändigen und massiven Neutrinos:

$SO(10) = E_5 \supset SU(5)$ (16-dim. irred. Darst.) und

$E_6 \supset SO(10)$ (27-dim. irred. Darst.)

(mit $SU(5) = E_4$ die einizgen natürlichen Kandidaten mit komplexen Darstellungen für separate Multipletts für L- bzw. R-händige Fermion- und Antifermionzustände: P-Verletzung und Drehimpulserhaltung).

Die Eichbosonen füllen die $24 - dim.$ adjungierte Darstellung:

$$24 = \underbrace{(8,1)}_{\text{Gluonen}} + \underbrace{\underbrace{(1,3)}_{W_{1,2,3}} + \underbrace{(1,1)}_{B}}_{W^{\pm}, Z^0, \gamma} + \underbrace{(3^*,2)}_{(X,Y)} + \underbrace{(3,2)}_{(\overline{X},\overline{Y})}.$$

$\Longrightarrow$ 12 neue schwere Eichbosonen X, Y ($SU(2)$-Dublett) und ihre Antiteilchen mit elektrischen Ladungen $Q_X = +\frac{4}{3}$ und $Q_Y = +\frac{1}{3}$ in jeweils 3 Farben und Massen $M_{X,Y} \approx M_{GUT}$ nach $SU(5)$-Brechung.

Vermitteln Übergänge zwischen Quarks und Leptonen ('Leptoquarks'):

Mit

$$\begin{aligned} B^\mu &= A^\mu \cos\theta_W + Z^\mu \sin\theta_W, \\ W+3^\mu &= -A^\mu \sin\theta_W + Z^\mu \cos\theta_W \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} D^\mu &= \partial^\mu - ig_5 T_a V_a^\mu = \partial^\mu - ig_5[T_1 B^\mu + T_3 W_3^\mu + ...] \\ &= \partial^\mu - ig_5[T_1 \cos\theta_W A^\mu - T_3 \sin\theta_W A^\mu + ...]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D.h.} \quad -eQ &= -g_5 T_3 \sin\theta_W + g_5 T_1 \cos\theta_W \\ &= -g_5 \sin\theta_W (T_3 - \cot\theta_W T_1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow Q &= T_3 - cT_1 = T_3 - \cot\theta_W T_1; \\ \text{und} \quad c &= -\cot\theta_W; \quad e = g_5 \sin\theta_W. \end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned} g_1 \overline{\psi} \gamma^\mu \frac{Y}{2} \psi B_\mu &= g_1 \overline{\psi} \gamma^\mu (Q - T_3) \psi B_\mu \\ \equiv g_5 \overline{\psi} \gamma^\mu T_1 \psi B_\mu &= g_5 \overline{\psi} \gamma^\mu \frac{(Q - T_3)}{c} \psi B_\mu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow g_5 &= c g_1; \\ \alpha_5 &= \alpha_1'(M_{GUT}^2) = \alpha_{T_1}(M_{GUT}^2) = \cot^2\theta_W \alpha_1(M_{GUT}^2). \end{aligned}$$

Vereinheitlichung der Kräfte bei der GUT-Skala:

Forderung für Kopplungstärken der 3 Wechselwirkugen:

$$\underbrace{\alpha_1'(M_{GUT}^2)}_{U(1)_{T_1}} = \underbrace{\alpha_2(M_{GUT}^2)}_{SU(2)_L} = \underbrace{\alpha_3(M_{GUT}^2)}_{SU(3)_C} = \alpha_5 = \frac{g_5}{4\pi}.$$

Möglich wegen q^2-Abhängigkeit der Kopplungen:

$\alpha(q^2) = \frac{e^2}{4\pi}$ steigt, $\alpha_w(q^2) = \frac{g^2}{4\pi} = \alpha_2(q^2)$ und $\alpha_s(q^2) = \alpha_3(q^2)$ fallen mit zunehmendem q^2.

Beziehung zwischen α, $\alpha_1 = \alpha_Y$ und $\alpha_1' = \alpha_{T_1}$ (rel. Normierung):

In $SU(2)_L \times U(1)_Y$ gilt: $Q = I_3 + Y/2 = T_3 + Y/2$.

In $SU(5)$ gilt: $Q = T_3 + cT_1$.

Für jede Darstellung D einer einfachen Lie-Gruppe mit Generatoren T_a gilt (Vergleiche Spin!):

$$Sp_D T_a T_b = N_D \delta_{ab}.$$

$$\Longrightarrow SpQ^2 = Sp(T_3 + cT_1) = SpT_3^2 + c^2 SpT_1^2 = (1+c^2) SpT_3^2$$

mit $SpT_1T_3 = 0$ und $SpT_1^2 = SpT_3^2$.

Mit $Sp_5 Q^2 = 0 + 1 + 3 \cdot \frac{1}{9} = \frac{4}{3}$ und

$Sp_5 T_3^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 0 + 0 + 0 = \frac{1}{2}$ gilt:

$$\underline{c^2 = \frac{5}{3} = \cot^2\theta_W.}$$

$\Longrightarrow$ Vorhersage für den Weinberg-Winkel bei $q^2 = M_{GUT}$:

$$\sin^2\theta_W(M_{GUT}^2) = \frac{1}{1+c^2} = \frac{3}{8} = 0.375.$$

q^2-Abhängigkeit der Kopplungen:

$$\begin{aligned}
\alpha_i(q^2) &= \frac{\alpha_i(q_0^2)}{1 + b_i \frac{\alpha_i(q_0^2)}{4\pi} \ln\left(\frac{q^2}{q_0^2}\right)} \\
\Longleftrightarrow \frac{1}{\alpha_i(q^2)} &= \frac{1}{\alpha_i(q_0^2)} + \frac{b_i}{4\pi} \ln\left(\frac{q^2}{q_0^2}\right)
\end{aligned}$$

mit ($N_G =$ Zahl der Fermion-Generationen):

$b_3 = 11 - \frac{4}{3} N_G > 0$ (für $N_G \leq 8$)

$b_2 = \frac{22}{3} - \frac{4}{3} N_G > 0$ (für $N_G \leq 5$)

$b_1' = \quad - \frac{4}{3} N_G < 0$

$$\begin{aligned}
\alpha_2(M_{GUT}^2) &\equiv \alpha_3(M_{GUT}^2) = \alpha_5, \quad \text{d.h.} \\
\frac{1}{\alpha_3(q_0^2)} + \frac{b_3}{4\pi} \ln\left(\frac{M_{GUT}^2}{q_0^2}\right) &= \frac{1}{\alpha_2(q_0^2)} + \frac{b_2}{4\pi} \ln\left(\frac{M_{GUT}^2}{q_0^2}\right), \\
\frac{1}{\alpha_3(q_0^2)} - \frac{1}{\alpha_2(q_0^2)} &= -\frac{11}{12\pi} \ln\left(\frac{M_{GUT}^2}{q_0^2}\right).
\end{aligned}$$

Ebenso:

$$\underbrace{\frac{1}{\alpha_3(q_0^2)} - \frac{1}{\alpha_1'(q_0^2)}}_{=\frac{1}{\alpha_3(q_0^2)} - \frac{3}{5}\left(\frac{1}{\alpha(q_0^2)} - \frac{1}{\alpha_2(q_0^2)}\right)} \quad = -\frac{11}{4\pi} \ln\left(\frac{M_{GUT}^2}{q_0^2}\right)$$

$$\text{mit } \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha_Y} + \frac{1}{\alpha_2}, \text{ da } e^2 = \frac{g_1^2 g_2^2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}.$$

$$\Longrightarrow \frac{8}{3} \frac{1}{\alpha_3(q_0^2)} - \frac{1}{\alpha(q_0^2)} = -\frac{11}{2\pi} \ln\left(\frac{M_{GUT}^2}{q_0^2}\right).$$

Mit $q_0^2 = M_z^2$, $\alpha_3(M_z^2) = \alpha_s(M_Z^2) = 0.119$,

$\alpha(M_Z^2) = 1/128.9$:

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{M_{GUT}^2}{M_Z^2}\right) &= 30.4; \\ M_{GUT} &= 1.5 \cdot 10^{15} \text{ GeV} \ll M_{\text{Planck}} \approx 10^{19} \text{ GeV}. \end{aligned}$$

Vorhersage von $\sin^2\theta_W(M_W^2)$:

$$\sin^2\theta_W = \frac{g_1^2}{g_1^2+g_2^2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2} = \frac{1}{1+\frac{\alpha_2(q^2)}{\alpha_1(q^2)}}.$$

$$\sin^2\theta_W(M_{GUT}^2) = \frac{1}{1+c^2} = \frac{3}{8}.$$

Rückentwicklung von M_{GUT}:

$$\begin{aligned}
\cdot \quad & \frac{1}{\alpha_1(M_W^2)} = \frac{5}{3}\frac{1}{\alpha_1'(M_W^2)} \\
= \quad & \frac{5}{3}\Big[\frac{1}{\alpha_1'(M_{GUT}^2)} + \frac{b_1'}{4\pi}\ln\Big(\frac{M_W^2}{M_{GUT}^2}\Big)\Big] \\
\equiv \quad & \frac{5}{3}\Big[\frac{1}{\alpha_2'(M_{GUT}^2)} - \frac{4N_G}{12\pi}\ln\Big(\frac{M_W^2}{M_{GUT}^2}\Big)\Big] \\
= \quad & \frac{5}{3}\Big[\frac{1}{\alpha_2'(M_W^2)} + \frac{22-4N_G}{12\pi}\ln\Big(\frac{M_{GUT}^2}{M_W^2}\Big) - \frac{4N_G}{12\pi}\ln\Big(\frac{M_W^2}{M_{GUT}^2}\Big)\Big] \\
= \quad & \frac{5}{3}\Big[\frac{1}{\alpha_2'(M_W^2)} - \frac{11}{6\pi}\ln\Big(\frac{M_W^2}{M_{GUT}^2}\Big)\Big].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \frac{\alpha_2}{\alpha_1}(M_W^2) \quad &= \quad \frac{5}{3}\Big[1 - \frac{11\alpha_2(M_W^2)}{6\pi}\ln\Big(\frac{M_W^2}{M_{GUT}^2}\Big)\Big] \\
&= \quad \frac{5}{3}\Big[1 - \frac{11G_F M_W^2}{3\pi^2\sqrt{2}}\ln\Big(\frac{M_W^2}{M_{GUT}^2}\Big)\Big] = 3.79,
\end{aligned}$$

unabhängig von N_G. Mit $M_W = 80.33$ GeV ist

$$\Longrightarrow \sin^2\theta_W(M_W^2) = \frac{1}{1+\frac{\alpha_2}{\alpha_1}(M_W^2)} = 0.209.$$

Protonzerfall:

$$\Gamma(p \to e^+\pi^0) \approx \frac{\alpha_5^2 m_p^5}{M_X^4} \approx \frac{\alpha_5^2 m_p^5}{M_{GUT}^4}.$$

$$\Longrightarrow \tau_p = \frac{1}{\Gamma} \approx 10^{31} \text{ Jahre.}$$

Experimentelle Grenzen:

$$\tau_p > 10^{31} \text{ Jahre.}$$