3.4 Die Starke Wechselwirkung: Quantenchromodynamik (QCD)

SU(3)-Eichfeldtheorie der starken Wechselwirkung zwischen Quarks mit 8 Ladungen (Generatoren) λ^a $(a = 1, ..., 8)$:

$$[\lambda^a, \lambda_b] = 2if^{abc}\lambda^c$$

mit den Strukturkonstanten f_{abc} der $SU(3)$-Lie-Algebra.

Lokale Eichtransformation:

$$\Psi_q(x) \longrightarrow \Psi_q'(x) = U(x)\Psi_q(x) = e^{ig_s\frac{\lambda^a}{2}\gamma^a(x)}\Psi_q(x).$$

Lagrange-Funktion:

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} + \sum_q \overline{\Psi}_q(i\gamma^\mu D_\mu - m_q)\Psi_q$$

mit der kovarianten Ableitung (mit $D_\mu'\Psi' = U(D_\mu\Psi)$):

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_s\frac{\lambda^a}{2}G^a_\mu,$$

den 8 masselosen Eichbosonfeldern $G_\mu^a(x)$ $(a = 1, ..., 8)$

und den Feldtensoren (mit $\lambda^a F_{\mu\nu}^{a\prime} = U\lambda^a F_{\mu\nu}^a U^\dagger$):

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\nu G_\mu^a - \partial_\mu G_\nu^a + g_s f^{abc} G_\mu^b G_\nu^c.$$

In der fundamentalen SU(3)-Darstellung bilden die Quarkfelder Tripletts mit einer neuen inneren Quantenzahl "Farbe" oder Colour (<u>r</u>ot, <u>g</u>rün, <u>b</u>lau): $\Psi_q = \psi_q \cdot \chi_C$:

$$\chi_C = \begin{pmatrix} q_\mathrm{r} \\ q_\mathrm{g} \\ q_\mathrm{b} \end{pmatrix}; \; \chi_r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \; \chi_g = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \; \chi_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Antiquarks befinden sich in der konjugierten fundamentalen Darstellung und besitzen Antifarben
($\bar{r}$, $\bar{g}$, $\bar{b}$).

Einführung von Schiebeoperatoren in den $SU(3)_C$ Farb-Tripletts:

$$\begin{aligned} I_C^\pm &= \frac{1}{2}(\lambda_1 \pm i\lambda_2); \quad (\text{Transformation } \; g \longleftrightarrow r), \\ V_C^\pm &= \frac{1}{2}(\lambda_4 \mp i\lambda_5); \quad (\text{Transformation } \; r \longleftrightarrow b), \\ U_C^\pm &= \frac{1}{2}(\lambda_6 \pm i\lambda_7); \quad (\text{Transformation } \; b \longleftrightarrow g). \end{aligned}$$

Ihre Funktion in Analogie zu $\tau^\pm$ für $SU(2)$ ist offensichtlich mit der 3-dim. Darstellung der λ-Matrizen (Gell-Mann-Matrizen):

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \ \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (g \longleftrightarrow r)$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \ \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (r \longleftrightarrow b)$$

$$\lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} ; \ \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad (b \longleftrightarrow g)$$

$$\lambda_3 = \begin{array}{c} \begin{matrix} \ r \quad & g \quad & b \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \bar{r} \\ \bar{g} \\ \bar{b} \end{array} \quad (\text{koppelt} \ \ r\bar{r}, -g\bar{g})$$

$$\lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{array}{c} \begin{matrix} \ r \quad & g \quad & b \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \bar{r} \\ \bar{g} \\ \bar{b} \end{array} \quad (\text{koppelt} \ \ r\bar{r}, g\bar{g}, -2b\bar{b}).$$

$\Longrightarrow$ Wechselwirkungsterm der QCD-Lagrangedichte:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{WW}(SU(3)_C) &= -g_s \overline{\Psi} \gamma^\mu \frac{\lambda^a}{2} \Psi G^a_\mu \\
= -\frac{g_s}{\sqrt{2}} & \Big[\quad \overline{\Psi} \gamma^\mu I_C^+ \Psi (g\bar{r})_\mu + \overline{\Psi} \gamma^\mu I_C^- \Psi (r\bar{g})_\mu \\
&+ \quad \overline{\Psi} \gamma^\mu V_C^+ \Psi (r\bar{b})_\mu + \overline{\Psi} \gamma^\mu V_C^- \Psi (b\bar{r})_\mu \\
&+ \quad \overline{\Psi} \gamma^\mu U_C^+ \Psi (b\bar{g})_\mu + \overline{\Psi} \gamma^\mu U_C^- \Psi (g\bar{b})_\mu \\
&+ \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \overline{\Psi} \gamma^\mu \lambda^3 \Psi G^3_\mu + \frac{1}{\sqrt{2}} \overline{\Psi} \gamma^\mu \lambda^8 \Psi G^8_\mu \Big]
\end{aligned}
$$

mit den 8 Gluonfeldern

$$
\begin{aligned}
g_{\mu 1} &= (g\bar{r})_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(G^1_\mu - iG^2_\mu), \\
g_{\mu 2} &= (r\bar{g})_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(G^1_\mu + iG^2_\mu) = \overline{g}_1, \\
g_{\mu 4} &= (r\bar{b})_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(G^4_\mu + iG^5_\mu), \\
g_{\mu 5} &= (b\bar{r})_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(G^4_\mu - iG^5_\mu) = \overline{g}_4, \\
g_{\mu 6} &= (b\bar{g})_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(G^6_\mu - iG^7_\mu), \\
g_{\mu 7} &= (g\bar{b})_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(G^6_\mu + iG^7_\mu) = \overline{g}_6, \\
g_{\mu 3} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(r\bar{r} - g\bar{g}) = G^3_\mu \quad \text{(farbneutral)}, \\
g_{\mu 8} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(r\bar{r} + g\bar{g} - 2b\bar{b}) = G^8_\mu \quad \text{(farbneutral)}.
\end{aligned}
$$

zu 8 erhaltenen Farbladungsoperatoren, die sich in der $N^2 - 1{=}8$-dim. adjungierten Darstellung befinden:

$3_C \otimes \overline{3}_C = 1_C + 8_C.$

Gluonaustausch ändert die Farb-, nicht die Flavour-Quantenzahlen der Quarks.

Keine colour-Singulett-Gluonen in $SU(3)_C$ mit $\det U = 1$ (im Gegensatz zu $U(3)$:

würden an farbneutrale Zustände, Mesonen und Baryonen, koppeln und starke Kernkräfte mit langer Reichweite, wie elektromagnetische Felder, hervorrufen.

"Farbige" Teilchen (Quarks und Gluonen) sind in farbneutralen colour-Singulett-Zuständen (Mesonen $q\bar{q}$ und Baryonen qqq) gebunden und treten nicht als freie Zustände auf (Confinement-Hypothese).

Beispiel:

$$\pi^+ = \frac{1}{\sqrt{3}}(u_r\bar{d}_{\bar{r}} + u_g\bar{d}_{\bar{g}} + u_b\bar{d}_{\bar{b}}).$$

(Farbsingulettzustand 1_C aus der Darstellung

$3_C \otimes \overline{3}_C = 1_C + 8_C$).

Kernkräfte sind Van-der-Waalssche Restwechselwirkung zur Farbwechselwirkung der Quarks und Gluonen.

Motivation der Farbquantenzahl:

1. Die neuen inneren Freiheitsgrade der $SU(3)_C$-Farbsymmetrie erlauben die Konstruktion einer antisymmetrischen Wellenfunktion für das Baryon $\Delta^{++} = (u\uparrow u\uparrow u\uparrow)$ mit $J^P = \frac{3}{2}^+$ und $L = 0$:

$$\chi_C(\Delta^{++}) = \frac{1}{\sqrt{6}}\varepsilon_{ijk} u_i\, u_j\, u_k$$

(Farbsingulettzustand 1_c aus der Darstellung

$3_C \otimes 3_C \otimes 3_C = 1_C + 8_C + 8_C + 10_C$).

2. Hadronischer Wirkungsquerschnitt in der e^+e^--Vernichtung:

$$\begin{aligned} R &= \sigma(e^+e^- \to \sum_{q(E_{CM}>2m_q)} q\bar{q})/\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-) \\ &= N_C \cdot \sum_{q(E_{CM}>2m_q)} Q_q^2 \end{aligned}$$

mit $N_C = 3 =$ Zahl der Farbfreiheitsgrade der Quarks im Gegensatz zu Leptonen.

3. $\Gamma(\pi^0 \to \gamma\gamma) \sim N_C^2$.

4. Renormierbarkeit der GSW-Eichfeldtheorie der elektroschwachen Wechselwirkung:

Aufhebung divergenter Terme in höherer Ordnung der Stöhrungstheorie, bei denen 2 Vektorströme und 1 Axialvektorstrom koppeln (sog. Dreiecks-Anomalien), zwischen Lepton- und Quark-Beiträgen, falls gilt:

$$\sum_f Q_f(\mathrm{L-Dubletts}) = 0.$$

Dies ist möglich, wenn Lepton- und Quark-Dubletts der schwachen WW in jeder Familie gepaart sind, d.h. gleiche Anzahl, und die Quarks jeweils in 3 Farben auftreten:

$$\sum_f Q_f = \sum_\ell Q_\ell + N_C \cdot \sum_q Q_q = 3 \cdot (-1 + N_C \cdot \frac{1}{3}) = 0.$$

D.h. Verknüpfung zwischen Leptonen und Quarks und zwischen den Eichtheorien der elektroschwachen und der starken WW: $SU(2)_L$ und $SU(3)_C$!