3.5 Massen der schwachen Eichbosonen und der Fermionen

- Nur ein masseloses Spin-1 Teilchen beobachtet: Photon $\longrightarrow U(1)_Q$-Eichsymmetrie.

- Die schwache Wechselwirkung ist kurzreichweitig.
  $\Longrightarrow$ schwere Feldquanten.

- Explizite Massenterme für Eichbosonen (Proca-Gleichung) verletzen die lokale Eichsymmetrie der Lagrange-Funktion, explizite Massenterme für die Fermionen (Dirac-Gleichung) brechen die globale $SU(2)_L$-Eichsymmetrie.

- Die Eichsymmetrie ist aber verantwortlich und notwendig für die Aufhebung von Divergenzen in jeder Ordnung der Störungstheorie, d.h. die Renormierbarkeit der elektroschwachen Theorie (wie in der QED).

Ausweg:

Sog. spontane Brechung der Symmetrie des Grundzustands (des Vakuums der Feldtheorie),

während die volle Eichsymmetrie der Lagrange-Funktion und der Feldgleichungen erhalten bleibt:

$$SU(2)_L \otimes U(1)_Y \stackrel{SSB}{\longrightarrow} U(1)_Q$$

("verborgene Eichsymmetrie").

Motivation:

Konstruktion in Analogie zu Phasenübergängen
2. Ordnung in der Festkörperphysik: SSB unterhalb der kritischen Temperatur.

Ordnungsparameter (z.B. Magnetisierung) nimmt spontan und diskontinuierlich einen von Null verschiedenen Wert im Grundzustand an.

In der Teilchenphysik: Volle Symmetrie des Vakuums wiederhergestellt bei hohen Energien,

d.h. Phasenübergänge mit spontaner Symmetriebrechung bei Abkühlung des expandierenden frühen Universums.

In der Theorie der Phasenübergänge (Ginzburg-Landau-Theorie) entspricht der Ordnungsparameter einem selbstwechselwirkenden skalaren Feld, das im Grundzustand einen von Null verschiedenen Erwartungswert annimmt.

Goldstone-Theorem:

Für jeden Generator einer globalen kontinuierlichen Symmetrie der Bewegungsgleichungen, die im Grundzustand gebrochen ist, tritt ein masseloses skalares Teilchen (Goldstone-Boson) auf.

Goldstone-Bosonen sind (wegen der Eichsymmetrie) energielose Anregungen, die die durch die gebrochenen Symmetrie-Generatoren erreichbaren (ineinander transformierbaren) Grundzustände verbinden (Quasiteilchenanregungen in der Festkörperphysik, z.B. Phononen).

Als Elementarteilchen wurden sie nicht beobachtet.

Bei lokaler Eichsymmetrie transformieren die Goldstone-Bosonen mittels Eichtransformationen zu den gebrochenen Generatoren als longitundinale Polarisationsfreiheitsgrade der Eichbosonen, die dadurch eine Masse erhalten (Higgs-Mechanismus).

Analogie zum Supraleiter im Magnetfeld:

Durch lokal eichinvariante, elektromagnetische Wechselwirkung mit den Cooper-Paarkondensat im kohärenten supraleitenden Grundzustand (Ordnungsparameterfeld) wird das Photonfeld aus dem Supraleiter abgeschirmt und erhält eine effektive Masse (endliche Reichweite, Eindringtiefe).

Die lokale $U(1)$-Phasensymmetrie (Teilchenzahlerhaltung) wird im kohärenten Grundzustand gebrochen.

3.5.1 (Minimaler) Higgs-Mechanismus im Standardmodell

Zusätzliches komplexes, skalares Feld, $SU(2)_L$-Dublett,

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi^+ \\ \Phi^0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} Q & I^0 & Y = 2(Q - I^0) \\ +1 & +\frac{1}{2} & +1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & +1 \end{matrix}$$

mit schwacher und elektromagnetischer Wechselwirkung (4 Freiheitsgrade).

Erfüllt die Klein-Gordon-Gleichung mit $SU(2)_L \times U(1)_Y$-eichinvarianter Lagrange-Dichte:

$$\mathcal{L}_{\text{Skalar}} = (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - V(\Phi^\dagger \Phi) = T - V$$

mit

$$D_\mu = \partial_\mu \cdot 1 + i\frac{g'}{2} Y B_\mu \cdot 1 + i\frac{g}{2}\vec{\tau} \cdot \vec{W}_\mu$$

und dem Selbstwechselwirkungspotential ($\lambda > 0$):

$$V(\Phi^\dagger \Phi) = \mu^2 (\Phi^\dagger \Phi) + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2.$$

$|\Phi|$ ist der Ordnungsparameter in Analogie zur Ginzburg-Landau-Theorie (freie Energie ersetzt Lagrangedichte).

Für $\mu^2 < 0$ ist der Grundzustand (kin. Energie $T = 0$, $V = V_{\min.}$) bei einem von Null verschiedenen Betrag des Skalarfelds (Vakuumerwartungswert $|\Phi_0| = v/\sqrt{2}$):

$$\frac{\partial V}{\partial |\Phi|} = 2\mu^2 |\Phi_0| + 4\lambda |\Phi_0|^3 = 0.$$

$$\Longrightarrow |\Phi_0| = \sqrt{\frac{-\mu^2}{2\lambda}} =: \frac{v}{\sqrt{2}}.$$

Die Mannigfaltigkeit (Unterraum) im Φ-Raum, auf der $V(\Phi^\dagger \Phi)$ minimal wird, ist $SU(2)_L \times U(1)_Y$-invariant.

Durch Auswahl eines der möglichen Grundzustände,

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

wird die $SU(2)_L \times U(1)_Y$-Symmetrie spontan gebrochen.

Eine $U(1)_Q$-Phasensymmetrie des Vakuums, entsprechend der Erhaltung der elektrische Ladung bleibt, wie beobachtet, ungebrochen zurück:

$$SU(2)_L \otimes U(1)_Y \stackrel{SSB}{\longrightarrow} U(1)_Q.$$

Generatoren T, die den Grundzustand Φ_0 invariant lassen:

$$e^{iT\alpha}\Phi_0 = \Phi_0 \Longrightarrow T\Phi_0 = 0.$$

Für die gebrochenen $SU(2)_L \times U(1)_Y$-Generatoren gilt:

$$\begin{aligned}
\tau_1\Phi_0 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{v}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0; \\
\tau_2\Phi_0 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\frac{v}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0; \\
\tau_3\Phi_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{v}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0; \\
Y\Phi_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \neq 0; \\
\frac{(\tau_3 - Y)}{2}\Phi_0 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \neq 0;
\end{aligned}$$

während die elektrische Ladung erhalten bleibt:

$$Q\Phi_0 = \frac{1}{2}(\tau_3 + Y)\Phi_0 = 0.$$

(orthogonal zum Generator $(\tau_3 - Y)/2$, der dem Z^0_μ-Eichfeld entspricht).

Eine Parametrisierung von Feldanregungen aus dem Grundzustand Φ_0 (Quasiteilchenanregungen):

$$\Phi(x) = e^{i\frac{\vec{\tau}\vec{\zeta}(x)}{2v}} \begin{pmatrix} 0 \\ (v + H(x))/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

mit der reellen radialen Anregung $H(x)$ (skalares Higgs-Boson: massiv, gegen die Rückstellkraft des Potentials V) und den reellen Winkelanregungen $\zeta_i(x)$ $(i = 1, ..., 3)$, die die verschiedenen Grundzustände verbinden.

Die masselosen Goldstone-Moden ζ_i werden von den Eichbosonen "absorbiert", die den gebrochenen Generatoren entsprechen.

Dies geschieht durch die lokale $SU(2)_L$-Eichtransformation:

$$\begin{aligned}
\Phi(x) &\longrightarrow \Phi'(x) = e^{-i\frac{\vec{\tau}\vec{\zeta}(x)}{2v}}\Phi(x), \\
L_f(x) &\longrightarrow L'_f(x), \\
R_f(x) &\longrightarrow R_f(x), \\
\vec{W}_\mu(x) &\longrightarrow \vec{W}'_\mu(x), \\
B_\mu(x) &\longrightarrow B_\mu(x)
\end{aligned}$$

(sog. "unitäre Eichung").

Mit $Y_\Phi = +1$ gilt danach:

$$
\begin{aligned}
(D_\mu\Phi)' &= (\partial_\mu 1 + ig\frac{\vec{\tau}}{2}\cdot\vec{W}'_\mu + ig'B_\mu 1)\frac{1}{\sqrt{2}}(v+H)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\ \partial_\mu H\end{pmatrix} + \frac{ig}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}(W^{1\prime}_\mu - iW^{2\prime}_\mu)(v+H)\\ 0\end{pmatrix} \\
&+ \frac{i}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\ (g'B_\mu - gW^{3\prime}_\mu)(v+H)\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Einsetzen von $\Phi'(x)$ und $(D_\mu\Phi)'$ in $\mathcal{L}_{\text{Skalar}} = T - V$ ergibt:

$$
\begin{aligned}
T &= (D^\mu\Phi)'^\dagger(D_\mu\Phi)' \\
&= \frac{1}{2}\partial^\mu H\partial_\mu H + \frac{g^2(v+H)^2}{8}|W^{1\prime}_\mu - iW^{2\prime}_\mu|^2 \\
&+ \frac{(v+H)^2}{8}|g'B_\mu - gW^{3\prime}_\mu|^2 \\
&= \frac{1}{2}\partial^\mu H\partial_\mu H + \frac{g^2v^2}{8}(W^+_\mu W^{\mu+} + W^-_\mu W^{\mu-}) \\
&+ \frac{g^2v^2}{8\cos^2\theta_W}Z^0_\mu Z^{0\mu} \\
&+ \frac{g^2}{4}(H^2+2vH)\left[W^+_\mu W^{\mu-} + \frac{1}{2\cos^2\theta_W}Z^0_\mu Z^{0\mu}\right]. \\
V &= \mu^2\Phi^\dagger\Phi + \lambda(\Phi^\dagger\Phi)^2 \\
&= \frac{\mu^2}{2}(v+H)^2 + \frac{\lambda}{4}(v+H)^4 = -\mu^2H^2 + \lambda vH^3 + \frac{\lambda}{4}H^4.
\end{aligned}
$$

Alle Wechselwirklungsterme werden genau so benötigt, damit die elektroschwache Theorie störungstheoretisch berechenbar ("renormierbar") ist (durch Eichsymmetrie!).

$$\text{mit } (W_\mu^{1\prime} + iW_\mu^{2\prime})(W^{1\prime\mu} - iW^{2\prime\mu}) \equiv 2W_\mu^+ W^{-\mu}$$
$$= W_\mu^+ W^{\mu+} + W_\mu^- W^{\mu-}$$

und Rotation mit Weinberg-Winkel θ_W wie beim neutralen Strom (Diagonalisierung der Massenmatrix der neutralen Eichbosonen):

$$Z_\mu^0 = \frac{g' B_\mu - g W_\mu^{3\prime}}{\sqrt{g^2 + g'^2}} = \frac{g}{\cos\theta_W}(g' B_\mu - g W_\mu^{3\prime}).$$

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{L}_{\text{Skalar}} = \frac{1}{2}\left(\partial^\mu H \partial_\mu H - M_H^2 H^2\right) - \lambda v H^3 - \frac{\lambda}{4} H^4$$
$$+ \quad \frac{g^2}{4}(H^2 + 2vH)\left[W_\mu^+ W^{-\mu} + \frac{1}{2\cos^2\theta_W} Z_\mu^0 Z^{0\mu}\right.$$
$$+ \quad \frac{1}{2} M_W^2 (W_\mu^+ W^{\mu+} + W_\mu^- W^{\mu-}) + \frac{1}{2} M_Z^2 Z_\mu^0 Z^{0\mu}.$$

mit

$$\text{Eichbosonen} : M_W = \frac{gv}{2}; \quad M_Z = \frac{gv}{2\cos\theta_W} = \frac{M_W}{\cos\theta_W};$$
$$\text{Higgsboson} : \quad M_H = \sqrt{-2\mu^2} = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} v.$$

$$\text{und} \quad \sin^2\theta_W = 1 - \cos^2\theta_W = 1 - \frac{M_W^2}{M_Z^2}.$$

3.5.2 Massen der Fermionen:

Eichinvariante Kopplung der links- und rechtshändigen Fermionen an das Skalarfeld $\Phi(x)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{WW}^{\text{Yukawa}} = & - \sum_{f(\text{up})} g_f \left[\left(\overline{L}_f \overline{\Phi} \right) \psi_{fR} + \overline{\psi}_{fR} \left(\overline{\Phi}^\dagger L_f \right) \right] \\ & - \sum_{f(\text{down})} g_f \left[\left(\overline{L}_f \Phi \right) \psi_{fR} + \overline{\psi}_{fR} \left(\Phi^\dagger L_f \right) \right]\end{aligned}$$

(Yukawa-Kopplung vom Typ $-g(\overline{\psi}\psi)\phi$ zuerst für Nukleon-Pion-Kernwechselwirkung eingeführt.)

mit dem $SU(2)_L$-Dublett ($Y_{\overline{\Phi}} = 2(Q - I^0) = -1 = -Y_\Phi$):

$$\overline{\Phi} := i\tau_2 \Phi^* = \begin{pmatrix} \overline{\Phi}^0 \\ -\Phi^- \end{pmatrix} \overset{SSB}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} (v+H)/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wegen der speziellen Eigenschaft der $SU(2)$-Gruppe, daß $\tau_2 \vec{\tau}^* = -\vec{\tau}\tau_2$, gilt unter $SU(2)_L \times U(1)_Y$-Eichtransformationen:

$$\begin{aligned}\overline{\Phi} &= i\tau_2 \Phi^* \longrightarrow (i\tau_2 \Phi^*)' = i\tau_2 (U\Phi)^* \\ &= i\tau_2 e^{-i\frac{\vec{\tau}^*}{2}\cdot\vec{\beta}} e^{-i\frac{Y_\Phi}{2}\alpha} \Phi^* \\ &= e^{i\frac{\vec{\tau}}{2}\cdot\vec{\beta}} e^{i\frac{Y_{\overline{\Phi}}}{2}\alpha} (i\tau_2 \Phi^*) = U\overline{\Phi}.\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ $SU(2)_L$-Invarianz von $\mathcal{L}_{WW}^{\text{Yukawa}}$:

$$\begin{aligned}(\overline{L}\Phi)\psi_R &\longrightarrow (\overline{L}U^\dagger U\Phi)\psi_R = (\overline{L}\Phi)\psi_R,\\ \overline{\psi}_R(\Phi^\dagger L) &\longrightarrow \overline{\psi}_R(\Phi^\dagger U^\dagger U L) = \overline{\psi_R}(\Phi^\dagger L).\end{aligned}$$

(und ebenso für die 'up'-Terme mit $\overline{\Phi}$),

wobei

$L \longrightarrow UL$, $\overline{L} \longrightarrow \overline{L}U^\dagger$, $\psi_R \longrightarrow \psi_R$, $\Phi \longrightarrow U\Phi$ und

$\overline{\Phi} \longrightarrow U\overline{\Phi}$.

Einsetzen von $\Phi'(x)$ ergibt:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{WW}^{\text{Yukawa}} &= -\sum_f g_f \frac{v+H}{\sqrt{2}}\left(\overline{\psi}_{fL}\psi_{fR} + \overline{\psi}_{fR}\psi_{fL}\right) \\ &\equiv -\sum_f \frac{g_f v}{\sqrt{2}}\overline{\psi}_f\psi_f - \sum_f \frac{g_f}{\sqrt{2}}(\overline{\psi}_f\psi_f)H.\end{aligned}$$

Damit Dirac-Massenterm mit

$$m_f = \frac{g_f v}{\sqrt{2}}$$

und Yukawa-Kopplung der Fermionen an das Higgsfeld H

$$\frac{g_f}{\sqrt{2}} = \frac{m_f}{v} \sim m_f.$$

Damit $H \to f\bar{f}$ bevorzugt in schwerste Fermionen mit $2m_f \leq M_H$.

Beachte: für Quarks gilt:

Massen- (und flavour-) Eigenzustände $\neq$ schwache Eigenzustände von $SU(2)_L$.