3.6 Störungsrechnung und Feynman-Graphen

Zur Berechnung von Übergangsamplituden $\langle f|\psi(t)\rangle$ für Zerfallswahrscheinlichkeiten und Wirkungsquerschnitte.

Einfachste Methode (nach Feynman):

Iterative Lösung der klassischen Feldgleichungen, mit Wechselwirkungsterm als Störung zu den freien Feldgleichungen, unter Benutzung der Methode der Greenschen Funktion.

3.6.1 Bekanntes Beispiel: Elektrostatik:

Poisson-Gleichung für skalares elektrostatisches Potential $\phi(\vec{x})$:

$$\vec{\nabla}^2\Phi(\vec{x}) = -\rho(\vec{x}).$$

Lösung für Punktladung am Ort $\vec{x}'$: $\rho(\vec{x}) = q\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}')$:

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|} \quad (\mathrm{Coulomb-Potential}).$$

Für eine allgemeine Ladungsverteilung $\rho(\vec{x}')$ ist die Lösung offensichtlich:

$$\Phi(\vec{x}) = \int \frac{\rho(\vec{x}'}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|}d^3x' =: \int G(\vec{x}-\vec{x}')\rho(\vec{x}')d^3x'$$

mit der sog. Greenschen Funktion

$$G(\vec{x},\vec{x}') = G(\vec{x}-\vec{x}') = \frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

die eine Lösung der Poisson-Gleichung ist für eine Einheitspunktladung am Ort $\vec{x}'$ (Definition):

$$\vec{\nabla}_x^2 G(\vec{x},\vec{x}') = -\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}').$$

3.6.2 Anwendung auf Eichfeldtheorien:

3.6.2.1 Elektromagnetische WW von Fermionen (QED):

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{QED}_{\text{Fermion}} &= \overline{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi \\
&= \overline{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - eQ\overline{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \\
&= \overline{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - ej^\mu A_\mu .
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Feldgleichung nach dem Lagrange-Formalismus:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \overline{\psi}} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \overline{\psi})} \right) = 0$$

ist die Dirac-Gleichung

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = eQ\gamma^\mu A_\mu(x)\psi(x)$$

mit elektromagnetischem Kopplungsterm:

inhomogene Differentialgleichung, die i.a. nicht analytisch lösbar ist, d.h. iterative Lösung mit inhomogenem Wechselwirkungsterm als Störung.

Ansatz für Greensche Funktion:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) K(x - x') = \delta^{(4)}(x - x').$$

Mit der Lösung $\psi^{(0)}(x)$ der homogenen freien Dirac-Gleichung, $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi^{(0)}(x) = 0$

ist damit die allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl.:

$$\underline{\psi(x)} = \psi^{(0)}(x) + \int d^4x' K(x - x') \gamma^\mu A_\mu(x') \underline{\psi(x')}.$$

Die Integralgleichung kann iterativ gelöst werden:

0. Näherung: $\psi^{(0)}(x) \longrightarrow$ einsetzen in RS;

1. Näherung:

$$\psi^{(1)}(x) = \psi^{(0)}(x) + eQ \int d^4x' K(x - x') \gamma^\mu A_\mu(x') \underline{\psi^{(0)}(x')};$$

2. Näherung:

$$\psi^{(2)}(x) = \psi^{(0)}(x) + eQ \int d^4x' K(x - x') \gamma^\mu A_\mu(x') \psi^{(0)}(x')$$

$$+ e^2 Q^2 \int \int d^4x'' d^4x' \quad K(x - x'') \quad \gamma^\mu A_\mu(x'') \quad K(x'' - x') \quad \gamma^\mu A_\mu(x') \psi^{(0)}(x').$$

Störungsentwicklung nach Potenzen des WW-Terms $\sim e$.

Fouriertransformation der Greenschen Funktion,

$$K(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\widehat{K}(p)e^{-p(x-x')},$$

ergibt bei Einsetzen in die Dirac-Gleichung:

$$\begin{aligned}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)K(x-x') &= \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p(\not{p}-m)\widehat{K}(p)e^{-p(x-x')} \\ \equiv \delta^{(4)}(x-x')\cdot 1 &= \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4pe^{-ip(x-x')}\cdot 1,\end{aligned}$$

d.h. $(\not{p}-m)\widehat{K}(p) = 1$, mit $\not{p} := \gamma^\mu p_\mu = \gamma^0 p_0 - \vec{\gamma}\cdot\vec{p}$ etc.

$$\Longrightarrow (\not{p}+m)(\not{p}-m)\widehat{K}(p) = (p^2-m^2)\widehat{K}(p) \equiv (\not{p}+m)\cdot 1$$

$\Longrightarrow$ "Fermion-Propagator":

$$\boxed{\widehat{K}(p) = \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\not{p}+m}{p^2-m^2+i\varepsilon}}$$

mit Integrationsregel für das Fourierintegral der räumlichen Greenschen Funktion in der komplexen Ebene:

Konvergente Lösungen für Wellen mit positiver Energie (Teilchen), die sich in positiver Zeitrichtung $(t > t')$ ausbreiten und für Wellen mit negativer Energie (Antiteilchen), die sich in negativer Zeitrichtung ausbreiten $(t < t')$. $\longrightarrow$ Feynman-Bild.

3.6.2.2 Photon-Propagator:

Lösung der Wellengleichung:

$$\partial_\nu \partial^\nu A^\mu(x) = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2\right) A^\mu(x) = -e j^\mu_{\mathrm{el.magn.}}(x).$$

Lösungen der freien Wellengleichung sind ebene Wellen mit 2 transversalen Polarisationsfreiheitsgraden (s.o.).

Lösungsansatz für die inhomogenen Feldgleichungen mit Greenscher Funktion:

$$\partial_\lambda \partial^\lambda D^{\mu\nu}(x - x') = g^{\mu\nu} \delta^{(4)}(x - x')$$

mit der Minkowsky-Metrik $g^{\mu\nu}$.

Damit ist die allgemeine Lösung der inhomogenen Wellengleichung (einsetzen!):

$$A_\mu(x) = -e \int d^4x' D^{\mu\nu}(x - x') j_\nu(x').$$

Die Fouriertransformation der Greenschen Funktion,

$$D^{\mu\nu}(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4q \widehat{D}^{\mu\nu}(q) e^{-iq(x-x')},$$

eingesetzt in die Wellengleichung, ergibt:

$$\begin{aligned}\partial_\lambda \partial^\lambda D^{\mu\nu}(x-x') &= \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4q \widehat{D}^{\mu\nu}(q)(-iq)^2 e^{-iq(x-x')} \\ &= g^{\mu\nu}\delta^{(4)}(x-x').\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ "Photon-Propagator":

$$\boxed{\widehat{D}^{\mu\nu}(q) = \lim_{\varepsilon\to+0} \frac{-g^{\mu\nu}}{q^2+i\varepsilon}}$$

(Integrationsvorschrift und Zeitentwicklung für Teilchen- und Antiteilchen wie für Fermionen).

3.6.2.3 Propagator für massive Eichbosonen: $W_\mu^\pm$, Z_μ^0

Elektromagnetische Wellengleichung ersetzt durch Proca-Gleichung mit Masseterm (nicht eichinvariant):

$$\begin{aligned}
(\partial_\nu \partial^\nu + M^2) W^{\pm\mu} - \partial^\mu (\partial_\nu W^{\pm\nu}) &= -\frac{g}{\sqrt{2}} j_{CC}^{\mp\mu} \\
\Big[(\partial_\nu \partial^\nu + M^2) g^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu\Big] W_\nu^\pm &= -\frac{g}{\sqrt{2}} j_{CC}^{\mp\mu}
\end{aligned}$$

mit zusätzlichem Masseterm $\mathcal{L}_\mathrm{M} = \frac{1}{2} M^2 W^{\pm\mu} W_\mu^\pm$ in der Lagrange-Funktion von SSB (Eichinvarianz wiederhergestellt durch kompensierende zusätzliche WW-Terme mit dem Higgs-Feld).

Feldgleichung ohne die Selbstwechselwirkungsbeiträge für nicht-Abelsche Eichbosonen; nur WW mit Fermionen als Quellterm betrachtet. Der freie Propagator ist davon unabhängig, jede einzele WW ist separate Störung in erster Näherung.

Ansatz für Greensche Funktion:

$$\Big[(\partial_\nu \partial^\nu + M^2) g^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu\Big] D_{\nu\lambda}^{(\pm)}(x - x') = \delta_\lambda^\mu \delta^{(4)}(x - x').$$

$\Longrightarrow$ Lösung der inhomogenen Wellengleichung (einsetzen!):

$$W_\nu^\pm(x) = -\frac{g}{\sqrt{2}} \int d^4x' D_{\nu\lambda}^{(\pm)}(x - x') j^\lambda(x').$$

Für die Fouriertransformierte der Greenschen Funktion gilt nach Einsetzen in die Wellengleichung:

$$\left[(-q^2 + M^2)g^{\mu\nu} + q^\mu q^\nu\right] \widehat{D}_{\nu\lambda}(q) = \delta^\mu_\lambda.$$

Ansatz zur Lösung der Matrixgleichung:

$$\widehat{D}_{\nu\lambda}(q) = A \cdot g_{\nu\lambda} + B \cdot q_\nu q_\lambda.$$

$$\Longrightarrow A \cdot \left[\delta^\mu_\lambda(-q^2 + M^2) + q^\mu q_\lambda\right] + B \cdot M^2 q^\mu q_\lambda = \delta^\mu_\lambda$$

mit $g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = \delta^\mu_\lambda$.

$$\Longrightarrow A = \frac{-1}{q^2 - M^2}; \quad B = -\frac{A}{M^2} = \frac{1}{(q^2 - M^2)M^2}.$$

$\Longrightarrow$ Propagator für massive Vektorbosonen:

$$\boxed{\widehat{D}^{\mu\nu}(q) = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{-[g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu / M^2]}{q^2 - M^2 + i\varepsilon}}$$

$$\widehat{D}^{\mu\nu} \longmapsto \begin{cases} \frac{g^{\mu\nu}}{M^2}; & |q^2| \ll M^2 \\ \frac{g^{\mu\nu}}{-q^2}; & |q^2| \gg M^2 \end{cases}.$$

3.6.2.4 Propagator für skalare Spin-0 Bosonen: Higgs-Boson

o.E.: reelles Feld; beschrieben durch die Klein-Gordon-Gleichung:

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\Phi(x) = -g_f \overline{\psi}\psi$$

mit Yukawa-Wechselwirkung mit Fermionfeld.

Gleichung wie für eine Komponente des elektromagnetischen Feldes, aber mit Masse.

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)G(x - x') = -\delta^{(4)}(x - x');$$

$$\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}(-q^2 + m^2)\widehat{G}(q)e^{-iq(x-x')} = -\frac{d^4q}{(2\pi)^4}e^{-iq(x-x')}.$$

$\Longrightarrow$ Skalarer (Higgs-) Propagator:

$$\boxed{\widehat{G}(q) = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{q^2 - m^2 + i\varepsilon}}$$

3.6.2.5 Übergangsmatrixelemente:

mit der Streumatrix S,

$$\psi_s(x) = S \cdot \psi_i(x),$$

ist das Streumatrixelement

$$\begin{aligned} \langle \psi_f | \psi_s \rangle &= \langle \psi_f | S | \psi_i \rangle =: S_{fi} \equiv \mathcal{M}_{fi} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i) \\ &= \int d^3x \psi_f^\dagger(x) S \psi_i(x) = \int d^3x \psi_f^\dagger(x) \psi_s(x) \\ &= S_{fi}^{(0)} + S_{fi}^{(1)} + S_{fi}^{(2)} + \ldots \end{aligned}$$

wobei für die gestreute Welle $\psi_s(x)$ die obige Störungsentwicklung durchgeführt wird (einsetzen!).

Im Anfangs (i)- und Endzustand (f) befinden sich wechselwirkungsfreie Zustände (ebene Wellen).

3.6.2.6 Ergänzung (Hilfe zum selbst Nachrechnen):

Durch Einsetzen der Störungsentwicklung für $\psi_s(x)$ ist mit $\psi_i(x) = \psi^{(0)}(x)$ die Störungsentwicklung für die Streumatrix S_{fi} und damit für das Streumatrixelement (Abkürzung: $\not{A}(x) := \gamma^\mu A_\mu(x)$):

$$
\begin{aligned}
S_{fi}^{(0)} &= \int d^3x \psi_f^\dagger(x)\psi_i(x) = \frac{2E_i}{V}\delta_{fi}\int d^3x = 2E_i\delta_{fi}, \\
S_{fi}^{(1)} &= eQ\int d^3x\psi_f^\dagger(x)\int d^4x' K(x-x')\gamma^\mu A_\mu(x')\psi_i(x') \\
&= eQ\int d^4x' \Bigg(\underbrace{\int d^3x\psi_f^\dagger(x)K(x-x')}_{=-i\overline{\psi}_f(x')\ \text{(Rückwärtspropagator)}}\Bigg) \not{A}(x')\psi_i(x') \\
. \\
&= -ieQ\int d^4x'\overline{\psi}_f(x')\not{A}(x')\psi_i(x'), \\
S_{fi}^{(2)} &= e^2Q^2\int d^3x\psi_f^\dagger(x) \\
&. \int\int d^4x d^4x' K(x-x')\not{A}(x'')K(x''-x')\not{A}(x')\psi_i(x') \\
&= e^2Q^2\int\int d^4x''d^4x' \\
&\Bigg(\underbrace{\int d^3x\psi_f^\dagger(x)K(x-x'')}_{=-i\overline{\psi}_f(x'')}\Bigg)\not{A}(x'')K(x''-x')\not{A}(x')\psi_i(x') \\
. \\
&= -ie^2Q^2\int\int d^4x''d^4x' \\
&. \quad \overline{\psi}_f(x'')\not{A}(x'')K(x''-x')\not{A}(x')\psi_i(x').
\end{aligned}
$$

3.6.2.7 Wechselwirkung zwischen Fermionen und Photonen:

Einlaufende Fermionen (1: Elektron e^-, 2: Fermion f):

$\psi_{i1}(x) = u(p_1)e^{-ip_1x}$ (Q), $\psi_{i2}(x) = u(p_2)e^{-ip_2x}$ (Q_f).

Auslaufende Fermionen (1: Elektron e^-, 2: Fermion f):

$\overline{\psi}_{f1}(x) = \overline{u}(p_3)e^{ip_3x}$ (Q), $\overline{\psi}_{f2}(x) = \overline{u}(p_4)e^{ip_4x}$ (Q_f).

Lösung der elektromagnetischen Wellengleichung mit Qellen:

$$A_\mu(x) = -e\int d^4x' D_{\mu\nu}(x-x')j^\nu_{\text{el.magn.}}(x').$$

Der elektromagnetische Strom der Photonen emittierenden Fermionen f (Quelle des auf die Elektronen wirkenden el.magn. Feldes) ist in niedrigster Ordnung (freie Fermionen):

$j^\mu_{el.magn.}(x) = Q_f\overline{\psi}_{f2}(x)\gamma^\mu\psi_{i2}(x) = Q_f\overline{u}(p_4)\gamma^\mu u(p_2)e^{i(p_4-p_2)x}$.

Mit dem Photonpropagator erhält man:

$$\begin{aligned} . \quad & A_\mu(x) = \\ = & -eQ_f\int d^4x'\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{-g_{\mu\nu}}{q^2+i\varepsilon}e^{i(p_4-p_2+q)x'}e^{-iqx}\overline{u}(p_4)\gamma^\nu u(p_2) \\ = & -eQ_f\int d^4q\delta^{(4)}(p_4-p_2+q)\frac{-g_{\mu\nu}}{q^2+i\varepsilon}e^{-iqx}\overline{u}(p_4)\gamma^\nu u(p_2) \end{aligned}$$

Elektromagnetische Fermion-Fermion-WW mit Photonaustausch in niedrigster Störungsordnung:

Einsetzen der Näherung für das Photon-Feld in

$$
\begin{aligned}
S_{fi}^{(1)} &= -ieQ \int d^4x' \overline{\psi}_{f1}(x')\gamma^\mu \psi_{i1}(x') A_\mu(x') \\
&= ie^2 Q Q_f \int d^4x' \overline{u}(p_3)\gamma^\mu u(p_1) e^{ip(_3-p_1-q)x} \\
&\cdot \left(\int d^4q \delta^{(4)}(p_4 - p_2 + q) \frac{-g_{\mu\nu}}{q^2 + i\varepsilon} \right) \overline{u}(p_4)\gamma^\nu u(p_2) \\
&= ie^2 Q Q_f (2\pi)^4 \int d^4q \overline{u}(p_3)\gamma^\mu u(p_1) \delta^{(4)}(p_4 - p_2 + q) \\
&\cdot \frac{-g_{\mu\nu}}{q^2 + i\varepsilon} \overline{u}(p_4)\gamma^\nu u(p_2) \underbrace{\int \frac{d^4x'}{(2\pi)^4} e^{ip(_3-p_1-q)x}}_{} \\
&\cdot \qquad\qquad\qquad\qquad = \delta^{(4)}(p_3 - p_1 - q) \\
S_{fi}^{(1)} &= ie^2 Q Q_f (2\pi)^4 \int d^4q \delta^{(4)}(p_4 - p_2 + q) \delta^{(4)}(p_3 - p_1 - q) \\
&\cdot \overline{u}(p_3)\gamma^\mu u(p_1) \frac{-g_{\mu\nu}}{q^2 + i\varepsilon} \overline{u}(p_4)\gamma^\nu u(p_2) \\
&= -ie^2 Q Q_f (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_4 - p_2 + p_3 - p_1) \\
&\cdot \overline{u}(p_3)\gamma^\mu u(p_1) \frac{1}{q^2} \overline{u}(p_4)\gamma_\mu u(p_2) \\
&= \mathcal{M} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_4 - p_2 + p_3 - p_1)
\end{aligned}
$$

mit dem Impulsübertrag $q^2 = (p_3 - p_1)^2$ (Impulserhaltung).

3.6.2.8 Fermion-Fermion-Streuung:

Das Übergangsmatrixelement $\mathcal{M}$ für elektromagnetische Fermion (Elektron e)-Fermion (f)-Streuung unter Austausch eines Photons ist demnach:

$$\mathcal{M} = -ie^2 Q_e Q_f \overline{u}_e(p_3)\gamma_\mu u_e(p_1)\frac{1}{q^2}\overline{u}_f(p_4)\gamma^\mu u_f(p_2)$$

in 1. Ordnung der Störungsrechnung, 2. Ordnung in eQ bzw. 1. Ordnung in der Feinstrukturkonstanten $\alpha \equiv e^2/4\pi \approx 1/137$

$(\sigma(e^- f \to e^- f) \sim |\mathcal{M}|^2 \sim e^2 Q_e^2 Q_f^2 \sim \alpha^2)$

und mit $q^2 = (p_3 - p_1)^2 \approx -2p_1p_3 = -4E_1E_3\sin^2(\theta/2)$ bei Vernachlässigung der Fermion-Massen; $\theta =$ Streuwinkel.

3.6.3 Allgemein: Feynman-Regeln:

Regeln zur Berechnung der Streumatrixelemente $\mathcal{M}$ in der Stöhrungstheorie, die sich durch die sog. Feynman-Diagramme veranschaulichen lassen.

Faktoren im Streumatrixelement $\mathcal{M}$ für beliebige Streuprozesse bzw. Teichenzerfälle: mit Integration über die 4-Impulse der virtuellen Teilchen ($p^2 \neq m^2$) im Zwischenzustand:

QED:

Ein- (auslaufendes) Fermion: $u_s(p)$ $(\overline{u}_s(p))$

Ein- (auslaufendes) Anti-Fermion: $v_s(p)$ $(\overline{v}_s(p))$

Ein- (auslaufendes) reelles Photon: $\varepsilon_\mu(k;\lambda)$ $(\varepsilon^*_\mu(k;\lambda))$

Virtuelles (intermediäres) Photon: $-i\dfrac{g_{\mu\nu}}{q^2+i\varepsilon}$

Virtuelles Fermion (Propagator): $i\dfrac{\not{p}+m}{p^2-m^2+i\varepsilon}$

Fermion-Photon-Vertex: $-ieQ_f\gamma^\mu(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_f-p_i-q)$

QCD:

Quark-Gluon-Vertex: $-i\frac{g_s}{2}\lambda^a_{\alpha\beta}\gamma^\mu(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_f-p_i-q)$

Elektroschwache Wechselwirkung:

Ein- (auslaufendes) Z^0-, $W^\pm$-Boson: $\varepsilon_\mu(k;\lambda)$ $(\varepsilon^*_\mu(k;\lambda))$

Virtuelles Z^0-, $W^\pm$-Boson: $-i\dfrac{g_{\mu\nu}-q_\mu q_\nu/M^2}{q^2-M^2+i\varepsilon}$

Virtuelles Higgs–Boson: $\dfrac{i}{q^2-M_H^2+i\varepsilon}$

Fermion-Higgs-Boson-Vertex:

$$-i\tfrac{m_f}{v}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_f-p_i-q)$$

Fermion-$W^\pm$-Vertex:

$$-i\tfrac{g}{2\sqrt{2}}\gamma^\mu(1-\gamma_5)(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_f-p_i-q)$$

Fermion-Z^0-Vertex:

$$-i\tfrac{g}{2\cos\theta_W}\gamma^\mu[c_L^f(1-\gamma_5)+c_R^f(1+\gamma_5)](2\pi)^4\delta^{(4)}(p_f-p_i-q)$$

Schwache NC-Kopplungskonstanten:

$$\text{Links}: \ \mathrm{c_L^f = I_f^3 - Q_f}\sin^2\theta_\mathrm{W}; \quad \text{rechts}: \ \mathrm{c_R^f = -Q_f}\sin^2\theta_\mathrm{W};$$

$$\text{Vektor}: \ \mathrm{v_f = c_L^f + c_R^f = I_f^3 - 2Q_f}\sin^2\theta_\mathrm{W};$$

$$\text{Axialvektor}: \ \mathrm{a_f = c_L^f - c_R^f = I_f^3}.$$

$$\overline{u}\gamma^\mu c_L^f(1-\gamma_5)+c_R^f(1+\gamma_5)u=\overline{u}\gamma^\mu(v_f-a_f\gamma_5)u.$$

3.6.3.1 Elektron-Positron-Vernichtung:

Nach den Feynman-Regeln ist das QED-Übergangsmatrixelement für die Elektron-Positron-Vernichtung unter Erzeugung eines Fermion-Antifermion-Paars (Erzeugung neuer Materie an e^+e^--Speicherringen):

$$\mathcal{M} = -ie^2 Q_e Q_f \overline{v}_e(p_2)\gamma_\mu u_e(p_1)\frac{1}{q^2}\overline{u}_f(p_3)\gamma^\mu v_f(p_4)$$

mit $q^2 = (p_1 + p_2)^2 =: s = E^2_{CMS}$ (Schwerpunktsenergie).

Im Schwerpunktsystem gilt: $\sqrt{s} = 2E_e$.

Weitere fundamentale Wechselwirkungen im Standardmodell (unerläßlich für die Konsistenz der Feldtheorie: endliche Wirkungsquerschnitte, die experimentell überprüft werden können):

3.6.3.2 Selbstwechselwirkung der Eichbosonen und des Higgs-Bosons:

Freie nicht-Abelsche $SU(2) \times U(1)$-Eichfelder:

$$\vec{W}_\mu, B_\mu \longrightarrow W_\mu^\pm, Z_\mu^0, A_\mu$$

mit der Lagrangedichte ($i = 1, ..., 3$)

$$\mathcal{L}_{SU(2)}^{\text{frei}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^i F^{i\mu\nu}$$

mit

$$F_{\mu\nu}^i = \partial_\nu W_\mu^i - \partial_\mu W_\nu^i + g\varepsilon^{ijk} W_\mu^j W_\nu^k$$

oder kurz:

$$\vec{F}_{\mu\nu} = \partial_\nu \vec{W}_\mu - \partial_\mu \vec{W}_\nu + g\vec{W}_\mu \times \vec{W}_\nu.$$

Die zugehörige Bewegungsgleichung nach dem Lagrange-Formalismus ist:

$$\partial_\mu \partial^\mu \vec{W}_\nu - \partial_\nu(\partial^\mu \vec{W}_\mu) = \vec{J}_\nu,$$

eine Wellengleichung für jede Komponente (ohne Lorentz-Eichung) mit neuem Selbstwechselwirkungsterm (Quellterm)

$$\begin{aligned}\vec{J}_\nu &= -g\vec{W}^\mu \times \vec{F}_{\mu\nu} \\ &= -g\left[\vec{W}^\mu \times \partial_\mu \vec{W}_\nu - \vec{W}^\mu \times \partial_\nu \vec{W}_\mu\right] + g^2 \vec{W}^\mu \times \left(\vec{W}_\mu \times \vec{W}_\nu\right),\end{aligned}$$

d.h. $\mathcal{L}_{\mathrm{Selbst-WW}} = \vec{J}_\mu \vec{W}^\mu$.

$\Longrightarrow$ 3- und 4-Eichbosonkopplung ($\sim g$ bzw. $\sim g^2$).

3.6.4 Phänomene der schwachen Wechselwirkung

Beispiel: Schwache Neutrino-Elektron-Streuung:

CC-Prozeß: $\nu_\mu e^- \longrightarrow \mu^- \nu_e$

(verwandt mit dem schwachen Myonzerfall: $\mu^- \to e^- \nu_\mu \overline{\nu_e}$):

Das Übergangsmatrixelement

$$\mathcal{M} = i\,\frac{g^2}{2} \quad \cdot \quad \left[\overline{u}_\mu(p_3)\gamma^\mu \frac{1-\gamma_5}{2} u_{\nu_\mu}(p_1)\right] \underbrace{\frac{-g_{\mu\nu} + q_\mu q_\nu / M_w^2}{q^2 - M_W^2}}_{\longrightarrow \frac{1}{M_W^2}\ \mathrm{f.}\ |q|^2 \ll M_W^2}$$

$$\cdot \quad \left[\overline{u}_{\nu_e}(p_4)\gamma^\nu \frac{1-\gamma_5}{2} u_e(p_2)\right]$$

geht in der Näherung kleiner Impulsüberträge $|q|^2 \ll M_W^2$ (wie beim Myonzerfall), d.h. sehr kurze Reichweite der Feldquanten, über in das Matrixelement für die Fermi'sche 4-Fermion-Punktwechselwirkung oder schwache Strom-Strom-Wechselwirkung (kein Propagator für Austauschteilchen):

$$\mathcal{M} = i\frac{G_F}{\sqrt{2}}[\overline{u}_\mu(p_3)\gamma^\mu(1-\gamma_5)u_{\nu_\mu}(p_1)][\overline{u}_{\nu_e}(p_4)\gamma_\mu(1-\gamma_5)u_e(p_2)]$$

mit der schwachen Fermi-Kopplungskonstanten G_F.

Präzisionmessung der Fermi-Konstanten aus der Myon-Lebensdauer

$$\tau_\mu = \frac{1}{\Gamma_\mu} = \frac{192\pi^3}{G_F^2 m_\mu^5}:$$

$$\Longrightarrow G_F = (1.16639 \pm 0.00002) \cdot 10^{-5}\ \mathrm{GeV}^{-2}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{g^2}{8M_W^2} = \frac{G_F}{\sqrt{2}}}$$

Erklärt die Schwachheit der schwachen Wechselwirkung bei niedrigen Energien trotz

$$g = \frac{e}{\sin\theta_W} \geq e:$$

<u>Wenn M_W groß ist, ist G_F klein.</u>

Nach der SSB gelten die Beziehungen:

$$M_W \equiv \frac{gv}{2} = \left(\frac{g^2\sqrt{2}}{8G_F}\right)^{1/2} = \frac{g}{2}(\sqrt{2}G_F)^{-1/2}$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow v &= (\sqrt{2}G_F)^{-1/2} = 246 \text{ GeV} = \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}, \\
\Longrightarrow \Phi_0 &= \frac{v}{\sqrt{2}} = 174 \text{ GeV},
\end{aligned}$$

der Energieskala (d.h. Temperaturskala, $E = kT$) der elektroschwachen Symmetriebrechung (Phasenübergang).

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow M_W &= \frac{ev}{2\sin\theta_W} \\
M_W^2 &= \frac{e^2}{4\sqrt{2}G_F\sin^2\theta_W} \equiv \frac{\pi\alpha}{\sqrt{2}G_F\sin^2\theta_W} \\
&= \frac{(37.3 \text{ GeV})^2}{\sin^2\theta_W}.
\end{aligned}$$

Experimentell (Fermion-Paarproduktion in e^+e^--Vernichtung bei LEP/CERN, νN-Streuung):

$$\begin{aligned}
\sin^2\theta_W(E = M_Z) &= 0.23117 \pm 0.00016 \\
\Longrightarrow M_W &\approx 78 \text{ GeV} \\
\Longrightarrow M_Z &= \frac{M_W}{\cos\theta_W} \approx 89 \text{ GeV}
\end{aligned}$$

(Vorhersagen der GSW-Theorie in niedgrigster Ordnung der Störungstheorie).

Experimentell (Z- und W-Bosonerzeugung in e^+e^--Vernichtung bei LEP und in $p\overline{p}$-Vernichtung am Tevatron/FNAL):

$$\begin{aligned} M_Z &= 91.188 \pm 0.002 \text{ GeV}, \\ M_W &= 80.42 \quad \pm 0.06 \quad \text{GeV}. \end{aligned}$$

Übereinstimmung mit den theoretischen Vorhersagen mit hoher Präzision, wenn elektroschwache Strahlungskorrekturen (Prozesse höherer Ordnung der Störungstheorie der elektroschwachen WW).

$\Longrightarrow$ Die am besten geprüfte physikalische Theorie.

Inputparameter der Theorie:

$$g,\ g',\ v,\ g_f.$$

Alternativ (experimentell am besten bestimmt):

$$\alpha(E = M_Z),\ G_F,\ \sin^2\theta_W \text{ oder } M_Z,\ m_f.$$

Die Masse des Higgs-Bosons

$$M_H = \sqrt{-2\mu^2} = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \cdot v$$

und die Massen der Fermionen

$$m_f = \frac{g_f v}{\sqrt{2}}$$

lassen sich im Standardmodell nicht vorhersagen.

3.6.5 Wirkungsquerschnitte und Zerfallswahrscheinlichkeiten:

Übergangswahrscheinlichkeit pro Raum- und Zeiteinheit ("Goldene Regel"):

$$dw = |S_{fi}|^2 \rho(E_f) dE_f / (V_0 \cdot T).$$

Dabei ist bei Begrenzung der WW auf V_0, T:

$$|S_{fi}|^2 = |M_{fi}|^2 \cdot V_0 \cdot T \cdot (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i)$$

und $\rho(E_f)$ die Zustandsdichte im Endzustand.

Differentieller Wirkungsquerschnitt für die 2-Körper-Reaktion $a+b \rightarrow c+d$ (mit $p_1+p_2 = p_3+p_4$, $s := (p_1+p_2)^2 = E_{CMS}^2$):

$$d\sigma = dw / j_{\text{ein}}$$

mit der einlaufenden Teilchenstromdichte (Lorentz-invariant):

$$\begin{aligned} j_{\text{ein}} &= |\vec{v}_{ab}| \frac{2E_1}{V} \frac{2E_2}{V} = \frac{4}{V^2} [(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{4}{V^2} E_{CMS} |\vec{p}_a^{\,CMS}|. \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \boxed{d\sigma = \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{j_{\mathrm{ein}}} d\mathrm{Lips}}$$

mit dem Lorentz-invarianten Phasenraumelement (Zustandsdichte im Endzustand):

$$d\mathrm{Lips} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_3 + p_4 - p_1 - p_2) \frac{V}{2E_3} \frac{d^3p_3}{(2\pi)^3} \frac{V}{2E_4} \frac{d^3p_4}{(2\pi)^3}.$$

Zerfallsbreite für n-Körperzerfall $a \to 1, ..., n$:

$$\boxed{d\Gamma = \frac{|\mathcal{M}|^2}{2E_a} d\mathrm{Lips}}$$

mit

$$d\mathrm{Lips} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i) \prod_{j=1}^{n} \frac{V}{2E_j} \frac{d^3p_j}{(2\pi)^3}.$$

$\Gamma = \int d\Gamma = \frac{1}{\tau}$.

Das Normierungsvolumen V kürzt sich!