3.6.5 Wirkungsquerschnitte und Zerfallswahrscheinlichkeiten:

Übergangswahrscheinlichkeit pro Raum- und Zeiteinheit ("Goldene Regel"):

$$d\Gamma = |S_{fi}|^2 \rho(E_f) dE_f / (V_0 \cdot T).$$

Dabei ist bei Begrenzung der WW auf endliches Volumen V_0 und Zeit T:

$$|S_{fi}|^2 = |\mathcal{M}_{fi}|^2 \cdot V_0 \cdot T \cdot (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i),$$

mit den Gesamtimpulsen P_i und P_f in Anfangs- und Endzustand,

und $\rho(E_f)$ die Zustandsdichte im Endzustand.

Bei unpolarisierten Elektronen und Positronen im Anfangszustand und nicht beobachteter Spinausrichtung der Fermionen im Endzustand muß über die 4 Spinzustände im Anfangszustand gemittelt und über die 4 Spineinstellungen im Endzustand summiert werden:

$$\overline{|\mathcal{M}_{fi}|^2} := \frac{1}{4} \sum_{s_1, s_2} \sum_{s_3, s_4} |\mathcal{M}|^2$$

(Für Quarks muß auch über die Farbfreiheitsgrade summiert werden.)

Damit ist die Übergangsrate

$$\begin{aligned} d\Gamma &= \overline{|\mathcal{M}_{fi}|^2} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) \prod_{i,f} \frac{V}{2E_{i,f}} \prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \\ &=: \underline{\overline{|\mathcal{M}_{fi}|^2} \prod_i \frac{V}{2E_i} d\mathrm{Lips}} \end{aligned}$$

mit dem Lorentz-invarianten Phasenraumelement (Zustandsdichte) für den Endzustand:

$$d\mathrm{Lips} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) \prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3 2E_f}.$$

Das Normierungsvolumen V kürzt sich mit den Normierungskonstanten der Wellenfunktionen $\sim 1/\sqrt{V}$.

Die Lebensdauer eines Teilchens ist $\tau = 1/\int d\Gamma$.

Der differentieller Wirkungsquerschnitt für eine 2-Teilchenreaktion $a + b \to f$ ist:

$$d\sigma = \frac{d\Gamma}{v_a}$$

mit dem einlaufenden Teilchenstrom $v_a =$ Geschwindigkeit der einlaufenden Teilchen:

$$v_a = \sqrt{(p_a \cdot p_b)^2 - m_a^2 m_b^2} / E_a E_b.$$

$$\Longrightarrow \underline{d\sigma = \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{4 v_a E_a E_b} d\mathrm{Lips}.}$$

$v_a E_a E_b$ ist Lorentz-invariant.

3.6.5.1 Fermion-Antifermion-Paarerzeugung in der Elektron-Positron-Vernichtung:

Nach den Feynman-Regeln ist das Übergangsmatrixelement:

$$\mathcal{M} = ie^2 Q_e Q_f \overline{v}_e(p_2)\gamma_\mu u_e(p_1)\frac{1}{q^2}\overline{u}_f(p_3)\gamma^\mu v_f(p_4)$$

mit $q^2 = (p_1 + p_2)^2 =: s = E_{CMS}^2$.

Im Schwerpunktsystem: $\sqrt{s} = 2E_e$.

$$\Longrightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega}(e^+e^- \to f\bar{f}) = N_C^f \frac{\alpha^2 Q_f^2}{4s}(1 + \cos^2\theta);$$

$$\sigma_{f\bar{f}} = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} = \frac{87 \text{ nb}}{s[\text{GeV}^2]}.$$

$N_C^f = 1$ für Leptonen, $N_C^f = 3$ für Quarks.

$$\begin{aligned} R &= \sigma(e^+e^- \to \sum_{q(E_{CMS}>2m_q)} q\bar{q})/\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-) \\ &= 3 \cdot \sum_{q(E_{CMS}>2m_q)} Q_q^2 \end{aligned}$$