4.3 Schwache Wechselwirkung der Quarks

Experimentelle Beobachtung (schwache Zerfälle von K-, D-, B-Mesonen mit s-, c-, b-Quarks):

Die Masseneigenzustände der Quarks (Massenoperator diagonal; feste Massen) sind verschieden von den schwachen Eigenzuständen der Quarks, den linkshändigen $SU(2)$-Dubletts und den rechtshändigen $SU(2)$-Singuletts (schwache Ladungsoperatoren, $SU(2)$-Generatoren diagonal; feste schwache Ladungen).

Deshalb ist der Quark-Massenterm in der elektroschwachen Lagrange-Funktion nach der spontanen Symmetriebrechung statt

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{Masse}} &= -\sum_q \frac{g_q v}{\sqrt{2}}(\overline{\psi}_{qL}\psi_{qR} + \overline{\psi}_{qR}\psi_{qL}) \\ &\equiv -\sum_q \frac{g_q v}{\sqrt{2}}\overline{\psi}_q\psi_q = -\sum_q m_q\overline{\psi}_q\psi_q\end{aligned}$$

(vereinfacht durch Annahme einer diagonalen Massenmatrix)

allgemeiner von der Form

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{Masse}} &= -\frac{v}{\sqrt{2}}\sum_{i,j}[\Gamma_{ij}\overline{u}_{iL}u_{jR} + \Gamma^*_{ji}\overline{u}_{jR}u_{iL} \\ &\qquad + \Gamma_{ij}\overline{d}_{iL}d_{jR} + \Gamma^*_{ji}\overline{d}_{jR}d_{iL}] \\ &= -\sum_{i,j}[M^{(u)}_{ij}\overline{u}_{iL}u_{jR} + M^{(u)*}_{ji}\overline{u}_{jR}u_{iL} \\ &\qquad + M^{(d)}_{ij}\overline{d}_{iL}d_{jR} + M^{(d)*}_{ji}\overline{d}_{jR}d_{iL}]\end{aligned}$$

mit den allgemeinen komplexen Massenmatrizen

$$M_{ij}^{(d)} = \Gamma_{ij}\frac{v}{\sqrt{2}} \;\text{ und }\; M_{ij}^{(u)} = \overline{\Gamma}_{ij}\frac{v}{\sqrt{2}}$$

Oder mit der Definition für die up (u)- und down (d)-artigen Quark-Eigenzustände des schwachen Isospins

$$D = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} \;\text{ und }\; U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix}$$

in Matrixschreibweise:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{\text{Quarks}}_{\text{Masse}} = & - \quad \overline{D}_L M^{(d)} D_R - \overline{D}_R M^{(d)\dagger} D_L \\ & - \quad \overline{U}_L M^{(u)} U_R - \overline{U}_R M^{(u)\dagger} U_L . \end{aligned}$$

(Es gilt $\mathcal{L}^\dagger = \mathcal{L}$ wie verlangt fuer eine Observable.)

Die separaten Massenmatrizen für up- und down-artige Quarks lassen sich diagonalisieren durch separate unitäre Transformationen jeweils für die links- und die rechtshändigen Quark-Zustände:

$$\begin{aligned}
U_d^\dagger M^{(d)}\, V_d &= M^{(d)}_{\text{diag.}}; \quad U_u^\dagger M^{(u)} V_u = M^{(u)}_{\text{diag.}}; \\
V_d^\dagger M^{(d)\dagger} U_d &= (U_d^\dagger M^{(d)} V_d)^\dagger = M^{(d)*}_{\text{diag.}}; \\
V_u^\dagger M^{(u)\dagger} U_u &= (U_u^\dagger M^{(u)} V_u)^\dagger = M^{(u)*}_{\text{diag.}};
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
D'_L &= U_d^\dagger D_L; \quad U'_L = U_u^\dagger U_L; \\
D'_R &= V_d^\dagger D_R; \quad U'_R = V_u^\dagger U_R.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & \mathcal{L}^{\text{Quarks}}_{\text{Masse}} = \\
- \quad & \overline{D}_L \overbrace{U_d U_d^\dagger}^{=1} M^{(d)} \overbrace{V_d V_d^\dagger}^{=1} D_R - \overline{D}_R \overbrace{V_d V_d^\dagger}^{=1} M^{(d)\dagger} \overbrace{U_d U_d^\dagger}^{=1} D_L \\
- \quad & \overline{U}_L U_u \underbrace{U_u^\dagger M^{(u)} V_u} V_u^\dagger U_R - \overline{U}_R V_u \underbrace{V_u^\dagger M^{(u)\dagger} U_u} U_u^\dagger U_L \\
= \quad & -\overline{D}'_L M^{(d)}_{\text{diag.}} D'_R - \overline{D}'_R M^{(d)*}_{\text{diag.}} D'_L \\
& -\overline{U}'_L M^{(u)}_{\text{diag.}} U'_R - \overline{U}'_R M^{(u)*}_{\text{diag.}} U'_L \\
= \quad & -\overline{D}' M^{(d)}_{\text{diag.}} D' - \overline{U}' M^{(u)}_{\text{diag.}} U'.
\end{aligned}$$

Die letzte Zeile gilt nach einer $U(1)$-Phasentransformation der Quarkfelder, so daß die Masseneigenwerte reell werden.

Die Lagrange-Funktion für die schwache geladene Stromwechselwirkung der Quarks läßt sich folgendermaßen durch die Masseneigenzustände ausdrücken:

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{L}_{CC}^{\text{Quarks}} = \\
= \quad & -\frac{g}{\sqrt{2}}[j_{CC}^{\mu +} W_\mu^- + j_{CC}^{\mu -} W_\mu^+] \\
= \quad & -\frac{g}{\sqrt{2}} \sum_{i=1}^{3} \Big[(\overline{U}_{Li} \gamma^\mu D_{Li}) W_\mu^- + (\overline{D}_{Li} \gamma^\mu U_{Li}) W_\mu^+ \Big] \\
= \quad & -\frac{g}{\sqrt{2}} \Big[(\overline{U}_L \gamma^\mu 1 D_L) W_\mu^- + (\overline{D}_L \gamma^\mu 1 U_L) W_\mu^+ \Big] \\
\equiv \quad & -\frac{g}{\sqrt{2}} \Big[(\overline{U}'_L U_u^\dagger \gamma^\mu U_d D'_L) W_\mu^- + (\overline{D}'_L U_d^\dagger \gamma^\mu U_u U'_L) W_\mu^+ \Big] \\
\equiv \quad & -\frac{g}{\sqrt{2}} \Big[\underbrace{(\overline{U}'_L \gamma^\mu V_{CKM} D'_L)}_{= j'^{\mu +}_{CC}} W_\mu^- \\
& \qquad + \underbrace{(\overline{D}'_L V_{CKM}^\dagger \gamma^\mu U'_L)}_{= j'^{\mu -}_{CC}} W_\mu^+ \Big]
\end{aligned}
$$

mit der unitären Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM)-Matrix $V_{CKM} = U_u^\dagger U_d$.

4.3.1 Die Mischung der Quark-Flavours

Die "Quark-Mischungsmatrix" V_{CKM} führt zu geladenen schwachen Übergängen zwischen den Quarkgenerationen, definiert als die Masseneigenzustände der Quarks, die an die elektromagnetische und starke Wechselwirkung koppeln, und gibt verschiedene Gewichte für die Wahrscheinlichkeit der schwachen CC-Übergänge zwischen den up- und down-artigen Masseneigenzuständen der Quarks:

$$\begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} d_C \\ s_C \\ b_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} .$$

Z.B.: $u \longleftrightarrow d_C = V_{ud}d + V_{us}s + V_{ub}b$.

Die Elemente der CKM-Matrix werden vom Standardmodell nicht vorhergesagt, sondern müssen experimentell bestimmt werden. Dies ist ein aktiver Forschungszweig, insbesondere für die Übergänge mit schweren Quarks (c, b, t).

Zahl der unabhängigen Parameter der CKM-Matrix:

Für $n = 2$ Generationen:

Bis zur Entdeckung des bottom-Quarks.

Reelle orthogonale 2×2 Matrix mit 1 reellen Parameter, keine komplexe Phase:

$$\mathrm{Cabibbo-Matrix}: V = \begin{pmatrix} \cos\theta_c & \sin\theta_c \\ -\sin\theta_c & \cos\theta_c \end{pmatrix}.$$

θ_c ist der Cabibbo-Winkel mit $\sin\theta_c \approx 0.23$ und $\cos\theta_c \approx 0.95$.

Für $n = 3$ Generationen:

CKM-Matrix mit 3 reellen Parametern und 1 komplexen Phase: $V^* \neq V$ (möglich nur für ≥ 3 Generationen):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -s_{23}c_{12} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}$$

Mit den 3 Mischungswinkeln θ_{ij} $(i,j = 1,2,3; i > j)$, $c_{ij} = \cos\theta_{ij} > 0$, $s_{ij} = \sin\theta_{ij} > 0$, und dem Phasenfaktor $e^{i\delta}$.

Allgemeine Herleitung:

Komplexe $n \times n$-Matrix: $2n^2$ Parameter.

Unitäre Matrix mit n^2 Nebenbedingungen ($V^\dagger V = 1$): n^2 Parameter.

Davon sind $\underline{n(n-1)/2}$ Parameter reell; die übrigen $n^2 - n(n-1)/2 = \overline{n(n+1)/2}$ Parameter sind komplexe Phasenfaktoren.

Denn eine reelle unitäre Matrix (orthogonale Matrix) mit $n + n(n-1)/2$ Nebenbedingungen ($V^T V = 1$) hat $n^2 - n - n(n-1)/2 = n(n-1)/2$ unabhängige reelle Parameter.

n Phasenfaktoren können in den n U-Feldern durch Neudefinition ihrer Phase absorbiert werden (aus der 1. Spalte der Mischungsmatrix):

$$U_{Lj} \longrightarrow e^{-i\alpha_j^{(u)}} U_{Lj} \quad (j = 1, ..., n).$$

$n - 1$ weitere Phasenfaktoren können aus der 1. Reihe der Mischungsmatrix in den $n - 1$ D-Feldern absorbiert werden:

$$D_{Lj} \longrightarrow e^{-i\alpha_j^{(d)}} D_{Lj} \quad (j = 2, ..., n),$$

d.h. insgesamt werden $2n - 1$ Phasenfaktoren eliminiert.

Danach bleiben $n(n+1)/2 - (2n-1) = \underline{(n-1)(n-2)/2}$ unabhängige Phasenfaktoren übrig.

Die aktuellen Meßwerte für die CKM-Matrixelemente sind:

$\|V_{ud}\| = 0.9736 \pm 0.0010$	aus nuklearem β- und μ-Zerfall
$\|V_{us}\| = 0.2205 \pm 0.0018$	aus semilept. Kaon-Zerfällen $K \to \pi e \nu_e$
$\|V_{ub}\| = (3.6 \pm 0.5) \cdot 10^{-3}$	aus semileptonischen Zerfällen $B \to X_u \ell \nu_\ell$
$\|V_{cd}\| = 0.224 \pm 0.016$	charm-Quark-Produktionsrate in $\nu(\bar{\nu})$-Kern-Streuung
$\|V_{cs}\| = 1.01 \pm 0.18$	semileptonische charm-Quark Zerfälle $D \to K e \nu_e$ $(c \to s)$
$\|V_{cb}\| = 0.040 \pm 0.002$	aus semilept. B-Mesonzerfällen
$\|V_{td}\| = 0.009 \pm 0.002$	von $B_d^0\overline{B}_d^0$-Mischung
$\|V_{td}\| < 0.009$ (95% C.L.)	von $B_s^0\overline{B}_s^0$-Mischung
$\|V_{td}/V_{ts}\| < 0.29$ (95 % C.L.)	von $B_d^0\overline{B}_d^0$- und $B_s^0\overline{B}_s^0$-Mischung
$\|V_{td}/V_{ts}\| < 0.56$ (90 % C.L.)	von $b \to s\gamma$ Zerfällen
$\|V_{ts}/V_{cb}\| = 1.1 \pm 0.4$	von $b \to s\gamma$ Zerfällen
$\|V_{tb}\| > 0.016$ (95 % C.L.)	aus top-Quark-Zerfällen $t \to W^+ b$

$$\begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix}$$

Die Hierarchie der Übergangswahrscheinlichkeiten und der Quarkmassen läßt eine Erklärung durch eine dem Standardmodell übergeordnete Theorie erwarten.

u **c** **t**

d **s** **b**

Die näherungsweise Wolfenstein-Parametrisierung macht die Rangordnung der Übergänge zwischen den Quark-Generationen (Massen/flavour-Eigenzustände) deutlich:

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} 1-\frac{\lambda^2}{2} & \lambda & A\lambda^3(\rho - i\eta) \\ -\lambda & 1-\frac{\lambda^2}{2} & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1-\rho-i\eta) & -A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\lambda^4),$$

bei der die Matrixelemente nach dem kleinen Parameter λ entwickelt werden.

Die 4 Wolfenstein-Parameter haben die gemessenen Werte:

$$\begin{aligned} \lambda &\equiv s_{12} = 0.2205 \pm 0.0018, \\ A &\equiv s_{23}/\lambda^2 = 0.82 \pm 0.06, \\ \sqrt{\rho^2+\eta^2} &\equiv |V_{ub}|/A\lambda^3 = 0.36 \pm 0.09. \end{aligned}$$

Eine komplexe CKM-Matrix ermöglicht eine Beschreibung der beobachteten schwachen Verletzung der CP-Symmetrie im Rahmen des Standardmodells (mit 6 Quarks in 3 Generationen), hervorgerufen wiederum durch die schwache Wechselwirkung und mit Ursprung in der Fermion-Higgs-Boson-Kopplung bzw. der Quark-Massenmatrix:

Vorschlag von Kobayahi und Maskawa 1973 noch vor der Entdeckung der dritten Fermion-Generation (τ-Lepton 1975, bottom-Quark 1977, top-Quark 1994) und vor der Entdeckung des charm-Quarks 1974.

Denn mit

$$\begin{aligned} j_{CC}^{\mu+} &= \overline{U}_L \gamma^\mu V_{CKM} D_L \xrightarrow{CP} -\overline{D}_L V_{CKM}^T \gamma^\mu U_L; \\ j_{CC}^{\mu-} &= \overline{D}_L V_{CKM}^\dagger \gamma^\mu U_L \xrightarrow{CP} -\overline{U}_L \gamma^\mu V_{CKM}^* D_L; \end{aligned}$$

und

$$W_\mu^\pm \xrightarrow{CP} -W_\mu^\mp.$$

verhält sich $\mathcal{L}_{CC}^{\mathrm{Quarks}}$ unter CP-Transformationen wie

$$\begin{aligned} & (\overline{U}_L \gamma^\mu V_{CKM} D_L) W_\mu^- + (\overline{D}_L V_{CKM}^\dagger \gamma^\mu U_L) W_\mu^+ \\ \xrightarrow{CP} \quad & (\overline{D}_L V_{CKM}^T \gamma^\mu U_L) W_\mu^+ + (\overline{U}_L \gamma^\mu V_{CKM}^* D_L) W_\mu^-, \end{aligned}$$

d.h. $\mathcal{L}_{CC}^{\mathrm{Quarks}}$ ist nur CP-invariant, wenn $V^* = V$.

4.3.2 Neutrale Ströme der Quark-Massenzustände

$$\mathcal{L}_{NC} = -ej^{\mu}_{\mathrm{el.magn.}} A_{\mu} - \frac{e}{\sin\theta_W \cos\theta_W} \left[j^{\mu 3} - j^{\mu}_{\mathrm{el.magn.}} \sin^2\theta_W \right] Z_{\mu}$$

mit dem elektromagnetischen Strom

$$\begin{aligned} j^{\mu}_{\mathrm{el.magn.}} &= Q_u(\overline{U}\gamma^{\mu}U) + Q_d(\overline{D}\gamma^{\mu}D) \\ &= Q_u(\overline{U}'\gamma^{\mu}U') + Q_d(\overline{D}'\gamma^{\mu}D') \end{aligned}$$

und dem Strom der dritten Komponente des schwachen Isospins

$$\begin{aligned} j^{\mu 3} &= I^3_u(\overline{U}\gamma^{\mu}U) + I^3_d(\overline{D}\gamma^{\mu}D) \\ &= \frac{1}{2}(\overline{U}\gamma^{\mu}U) - \frac{1}{2}(\overline{D}\gamma^{\mu}D) \\ &= \frac{1}{2}(\overline{U}'\gamma^{\mu}U') - \frac{1}{2}(\overline{D}'\gamma^{\mu}D'). \end{aligned}$$

Die neutralen Ströme bleiben flavour-erhaltend für die Masseneigenzustände U', D' wie für die schwachen Eigenzustände U, D wegen der Unitarität der Transformation,

$$U^{\dagger}_{u,d}U_{u,d} = 1; \quad V^{\dagger}_{u,d}V_{u,d} = 1,$$

so daß z.B. gilt

$$\begin{aligned}\overline{U}\gamma_\mu U &= \overline{U}_L\gamma_\mu U_L + \overline{U}_R\gamma_\mu U_R \\ &= \overline{U}'_L U_u^\dagger \gamma_\mu U_u U'_L + \overline{U}'_R V_u^\dagger \gamma_\mu V_u U'_R \\ &= \overline{U}'_L\gamma_\mu U'_L + \overline{U}'_R\gamma_\mu U'_R = \overline{U}'\gamma_\mu U'.\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Keine CP-Verletzung in der schwachen neutralen und der elektromagnetischen WW.

Die kinetischen Terme bleiben ebenfalls unverändert.

$\Longrightarrow$ Keine flavour-ändernden Prozesse mit neutralen Strömen (FCNC-Prozesse) in 1. Ordnung im Standardmodell.

Unterdrückung von FCNC-Prozessen auch in höherer Ordnung der schwachen WW: durch den

"**GIM-Mechanismus**" (Glashow, Illiopoulos, Maiani).

Experimentell sind FCNC-Prozesse sehr klein, z.B. ist das Verzweigungsverhältnis

$$BR(K_L^0 \to \mu^+\mu^-) = \frac{\Gamma(K_L^0 \to \mu^+\mu^-)}{\Gamma^{tot}_{K_L^0}} \approx 9 \cdot 10^{-7}\%$$

während $BR(K^+ \to \mu^+\nu_\mu) = 63.5\%$ (typischer schwacher CC-Zerfall).

(NB: Schwacher Zerfall in Myonpaar bevorzugt gegenüber Zerfall in Elektronpaar wegen Drehimpulserhaltung und Paritätsverletzung!)

In 2. Ordnung der schwachen Wechselwirkung ist der Prozeß für den Zerfall $K_L^0 \to \mu^+\mu^-$:

Gegenseitige Aufhebung der Amplituden für up- und charm-Quark-Austausch wegen der Unitariät der CKM-Matrix (Orthogonalität der Cabibbo-Matrix für 2 Generationen):

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_u &\sim \quad g^4 \sin\theta_C \cos\theta_C; \\ \mathcal{M}_c &\sim -g^4 \sin\theta_C \cos\theta_C; \end{aligned}$$

Details abhängig vom Wert der charm-Quark-Masse $m_c \gg m_u$.

$\Longrightarrow$ Vorhersage für die Masse des charm-Quarks: > 1 GeV.

Konsequenzen der Quark-Flavour-Mischung in der schwachen Wechselwirkung:

1. Quark-Flavour-Oszillationen.

2. Verletzung der CP-Symmetrie.

4.3.3 Quark-Flavour-Oszillationen

Teilchen-Antiteilchen-Oszillationen der neutralen Mesonen:

$$\begin{aligned}
K^0 &= (d\bar{s}) \quad \longleftrightarrow \quad \overline{K}^0 = (\bar{d}s) \quad (|\Delta S| = 2); \\
D^0 &= (c\bar{u}) \quad \longleftrightarrow \quad \overline{D}^0 = (\bar{c}u) \quad (|\Delta C| = 2); \\
B_d^0 &= (d\bar{b}) \quad \longleftrightarrow \quad \overline{B}_d^0 = (\bar{d}b) \quad (|\Delta B| = 2); \\
B_s^0 &= (s\bar{b}) \quad \longleftrightarrow \quad \overline{B}_d^0 = (\bar{s}b) \quad (|\Delta B| = 2).
\end{aligned}$$

Die schwache Wechselwirkung verletzt die Erhaltung der flavour-Quantenzahlen.

Vorhersage von Gell-Mann und Pais 1955 für K^0-Mesonen:

Flavour-Eigenzustände K^0 $(S=-1)$, $\overline{K}^0$ $(S=+1)$

$\neq$ CP-Eigenzustände mit definierten Massen $m_{S,L}$ und Lebensdauern:

K_S^0 (kurzlebig): $\tau_S \approx 10^{-10}$ s; $K_S^0 \to \pi^+\pi^-$ $(CP=+1)$;

K_L^0 (langlebig): $\tau_L \approx 10^{-7}$ s; $K_L^0 \to \pi^+\pi^-\pi^+$ $(CP=-1)$.

Die zeitliche Entwicklung der Zustände

$$\phi(t) >= a(t)|K^0 > +b(t)|\overline{K}^0 >= \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix},$$

$$|K^0 >= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{K}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

wird beschrieben durch die Schrödinger-Gleichung

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\phi >= H\phi >$$

mit dem effektiven Hamilton-Operator $(H^\dagger \neq H)$:

$$H = H_{\text{el.magn.}} + H_{\text{stark}} + H_{\text{schwach}} = \widehat{M} - i\widehat{\Gamma}/2$$

$\widehat{M}$, $\widehat{\Gamma}$ sind die Massenmatrix und die Zerfallsmatrix:

$$\begin{aligned}\widehat{M} - \frac{i}{2}\widehat{\Gamma} &= \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} - \frac{i}{2}\begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} m_K & m_{12} \\ m_{12} & m_K \end{pmatrix} - \frac{i}{2}\begin{pmatrix} \Gamma_K & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_K \end{pmatrix}\end{aligned}$$

mit $m_{11} = m_{22}$, $m_{21} = m_{12}^*$ wegen CPT-Invarianz,
$m_{12} = m_{21} = m_{12}^*$ bei CP-Invarianz,
$m_K = (m_S + m_L)/2$ und $\Delta m := m_L - m_S$, $\Delta\Gamma := \Gamma_L - \Gamma_S$.

Die Matrizen lassen sich Diagonalisieren durch die Transformation ($K^0 - \overline{K}^0$-Mischung):

$$\begin{aligned}K_S^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(K^0 + \overline{K}^0); \\ K_L^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(K^0 - \overline{K}^0),\end{aligned}$$

mit den Massen- und Lebensdauer-Eigenzuständen K_L^0 und K_S^0 und den Eigenwerten:

$$\begin{aligned}m_{S,L} &= m_K \pm \mathcal{R}e\sqrt{\left(m_{12} - \frac{i}{2}\Gamma_{12}\right)\left(m_{12}^* - \frac{i}{2}\Gamma_{12}^*\right)}; \\ \Gamma_{S,L} &= \Gamma_K \mp \mathcal{I}m\sqrt{\left(m_{12} - \frac{i}{2}\Gamma_{12}\right)\left(m_{12}^* - \frac{i}{2}\Gamma_{12}^*\right)} = \tau_{S,L}^{-1};\end{aligned}$$

$K^0 - \overline{K}^0$-Übergänge (durch $M_{12} \neq 0$) werden in 2. Ordnung der schwachen Wechselwirkung ($\Delta S = 2$) erzeugt:

$$\Longrightarrow \Delta m \approx \frac{G_F^2}{4\pi^2} f_K^2 m_K m_c^2 \cos^2\theta_C \sin^2\theta_C$$

mit der Kaon-Zerfallskonstante f_K (QCD-Parameter) und dem Cabibbo-Winkel θ_C.

Der Beitrag des charm-Quark-Austauschs (umgekehrtes Vorzeichen der Amplitude wegen V_{CKM}) dominiert, da $m_c \gg m_u$.

$\Longrightarrow$ Vorhersage der charm-Quarkmasse $m_c \approx 1.5$ GeV 1974 (Gaillard, Lee) vor der Entdeckung des charm-Quarks.
(bis heute gültig).

(Der Beitrag des top-Quark-Austauschs ist aufgrund der V_{CKM}-Faktoren unterdrückt; er dominiert für $B^0 - \overline{B}^0$-Mischung.)

Die zeitliche Entwicklung der Masseneigenzustände ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} K_S^0(t) &= \mathcal{N} e^{-(im_S + \frac{\Gamma_S}{2})t} K_S(0); \\ K_L^0(t) &= \mathcal{N} e^{-(im_L + \frac{\Gamma_L}{2})t} K_L(0). \end{aligned}$$

Damit ist die zeitliche Entwicklung der flavour-Eigenzustände $K^0(0)$ und $\overline{K}^0(0)$ (in der vereinfachenden und guten Näherung $\Delta\Gamma \approx 0$, d.h. $\Gamma_S \approx \Gamma_L$):

$$\begin{aligned} K^0(t) &= \mathcal{N} e^{-(im_K + \frac{\Gamma_K}{2})t} \left[\cos(\Delta m t/2) K^0 + \sin(\Delta m t/2) \overline{K}^0\right] \\ \overline{K}^0(t) &= \mathcal{N} e^{-(im_K + \frac{\Gamma_K}{2})t} \left[\sin(\Delta m t/2) K^0 + \cos(\Delta m t/2) \overline{K}^0\right] \end{aligned}$$

Die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten $\mathcal{P}$ der K^0-Zustände oszillieren mit einer Frequenz Δm und $180°$ relativer Phasenverschiebung neben dem Zerfall mit der mittleren Lebensdauer $\tau_K = \Gamma_K^{-1}$ (flavour-Oszillationen):

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(K^0 \to K^0(t)) &= |< K^0 | K^0(t) > |^2 \\ &= \frac{1}{2\tau_K} e^{-t/\tau_K} (1 + \cos \Delta m\ t) \\ \mathcal{P}(K^0 \to \overline{K}^0(t)) &= |< \overline{K}^0 | K^0 > |^2 \\ &= \frac{1}{2\tau_K} e^{-t/\tau_K} (1 - \cos \Delta m\ t) \end{aligned}$$

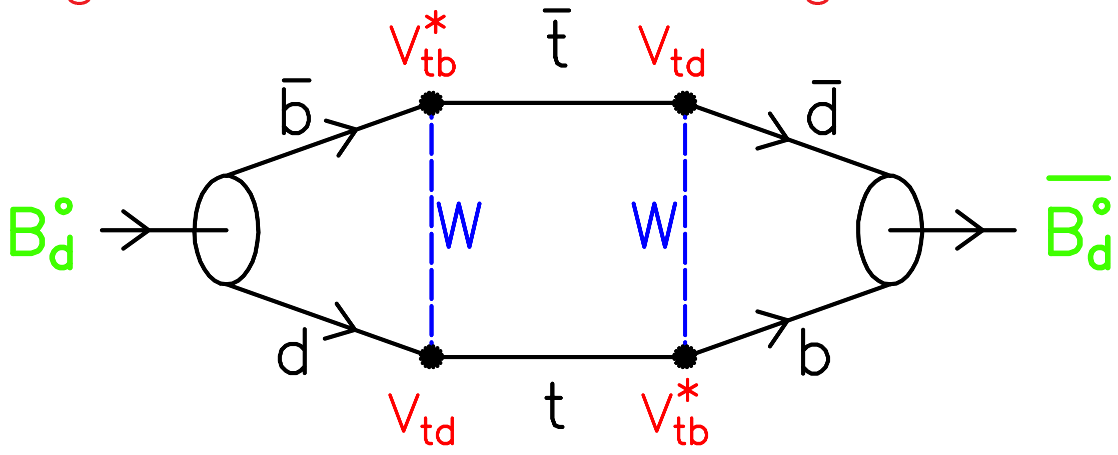
(ebenso für $\overline{K}^0$).

Die gemessene $K_L^0 - K_S^0$-Massenaufspaltung = Oszillationsfrequenz ($\hbar\omega = \Delta M c^2$) ist:

$$\Delta M = (3.489 \pm 0.008) \cdot 10^{-6}\ \mathrm{eV} = (0.530 \pm 0.001) \cdot 10^{10}\ \mathrm{Hz}.$$

$B^0\overline{B^0}$-Oszillationen

2. Ordnung der schwachen Wechselwirkung:



$$\boxed{\Delta m_d = \frac{G_F^2}{6\pi^2} M_{B_d} m_{\mathrm{top}}^2 F\left(\frac{m_{\mathrm{top}}^2}{M_W^2}\right) \eta_{QCD} (f_{B_d}^2 B_{B_d}) |V_{td} V_{tb}^*|^2}$$

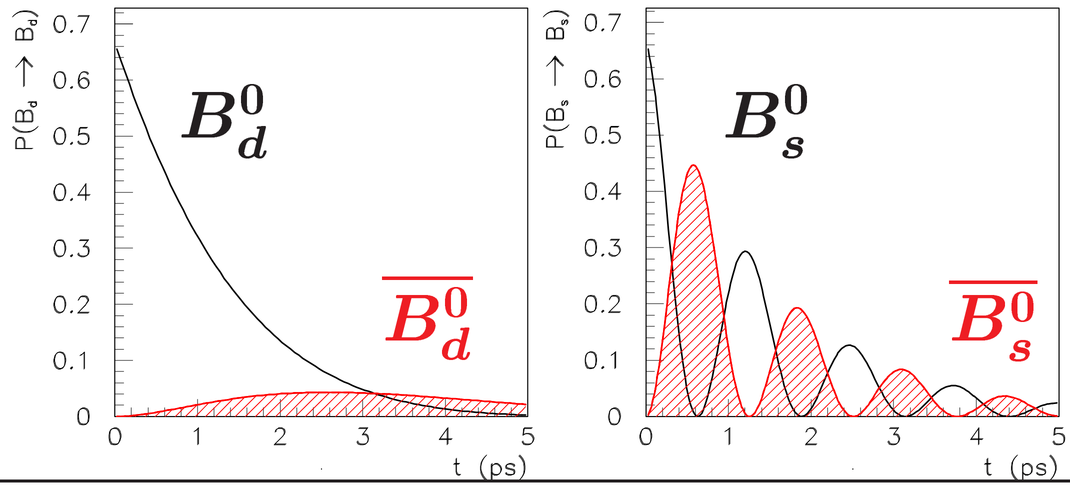
$$\Longrightarrow \frac{\Delta m_d}{\Delta m_s} = \frac{M_{B_d}}{M_{B_s}} \cdot \frac{f_{B_d}^2 B_{B_d}}{f_{B_s}^2 B_{B_s}} \cdot \frac{|V_{td}|^2}{|V_{ts}|^2} \overset{|V_{ts}| \approx |V_{cb}|}{=}$$

$$\approx (0.88 \pm 0.04)^2 \frac{|V_{td}|^2}{|V_{cb}|^2}$$

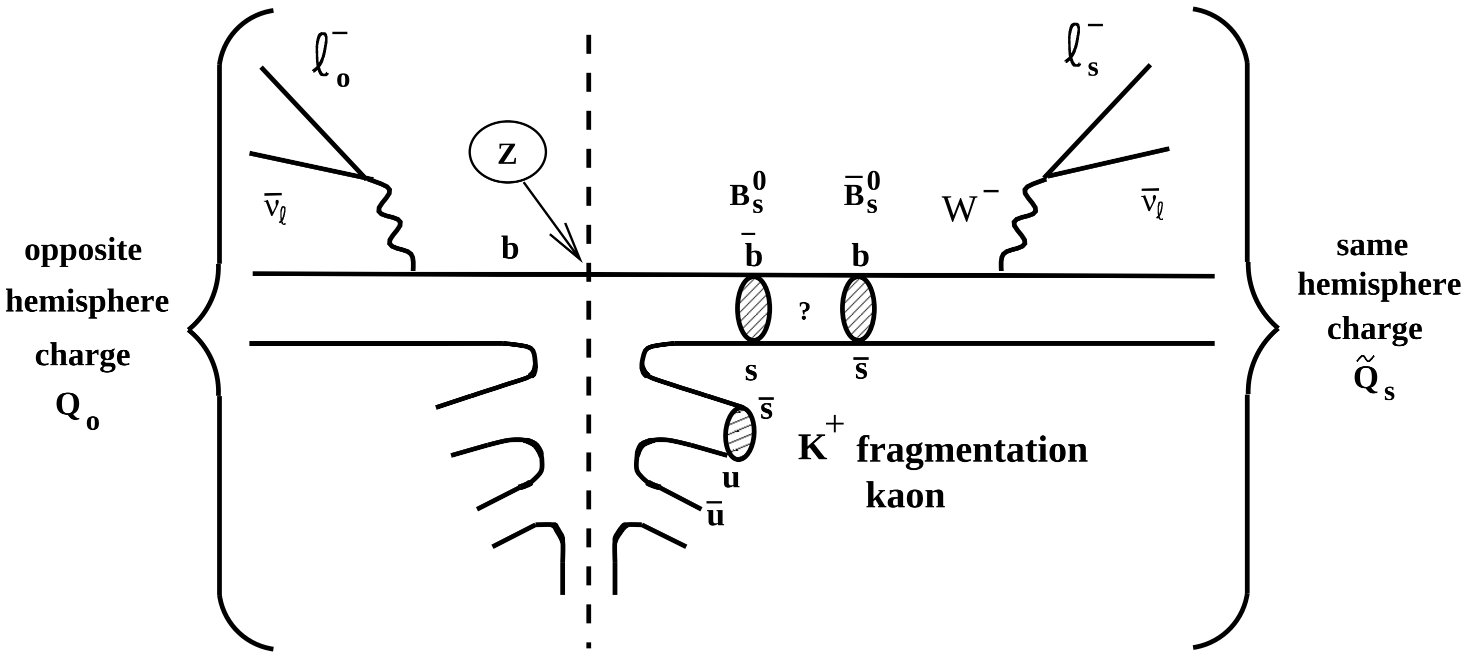
$(\approx 3 \cdot 10^{-4}$ eV$)$ | $(> 10^{-2}$ eV$)$

$\boxed{\Delta m_d = 0.495 \pm 0.010\ \mathrm{ps}^{-1}}$ | $\boxed{\Delta m_s > 15.0\ \mathrm{ps}^{-1}\ (95\%\ \mathrm{CL})}$

$|V_{td}| = 0.009 \pm 0.002$ | $|V_{td}| < 0.009$



Unterscheidung zwischen B^0 und $\overline{B^0}$ durch Ladung der Zerfallsleptonen:



Signal für $B^0\overline{B^0}$-Oszillation:

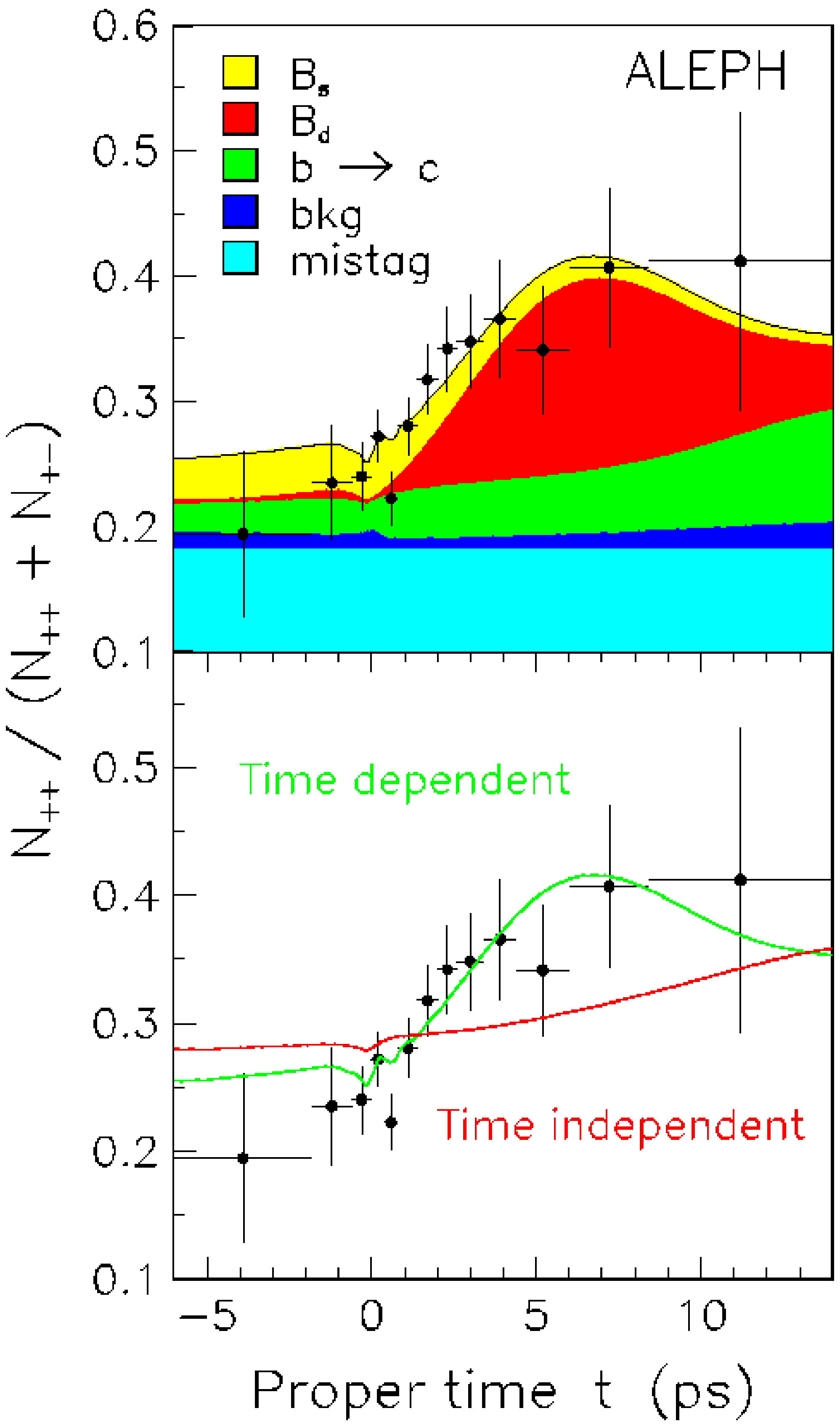
gleichgeladene Leptonpaare

in Abhängigkeit von der Zerfallsdauer $t = d/\beta\gamma c$:

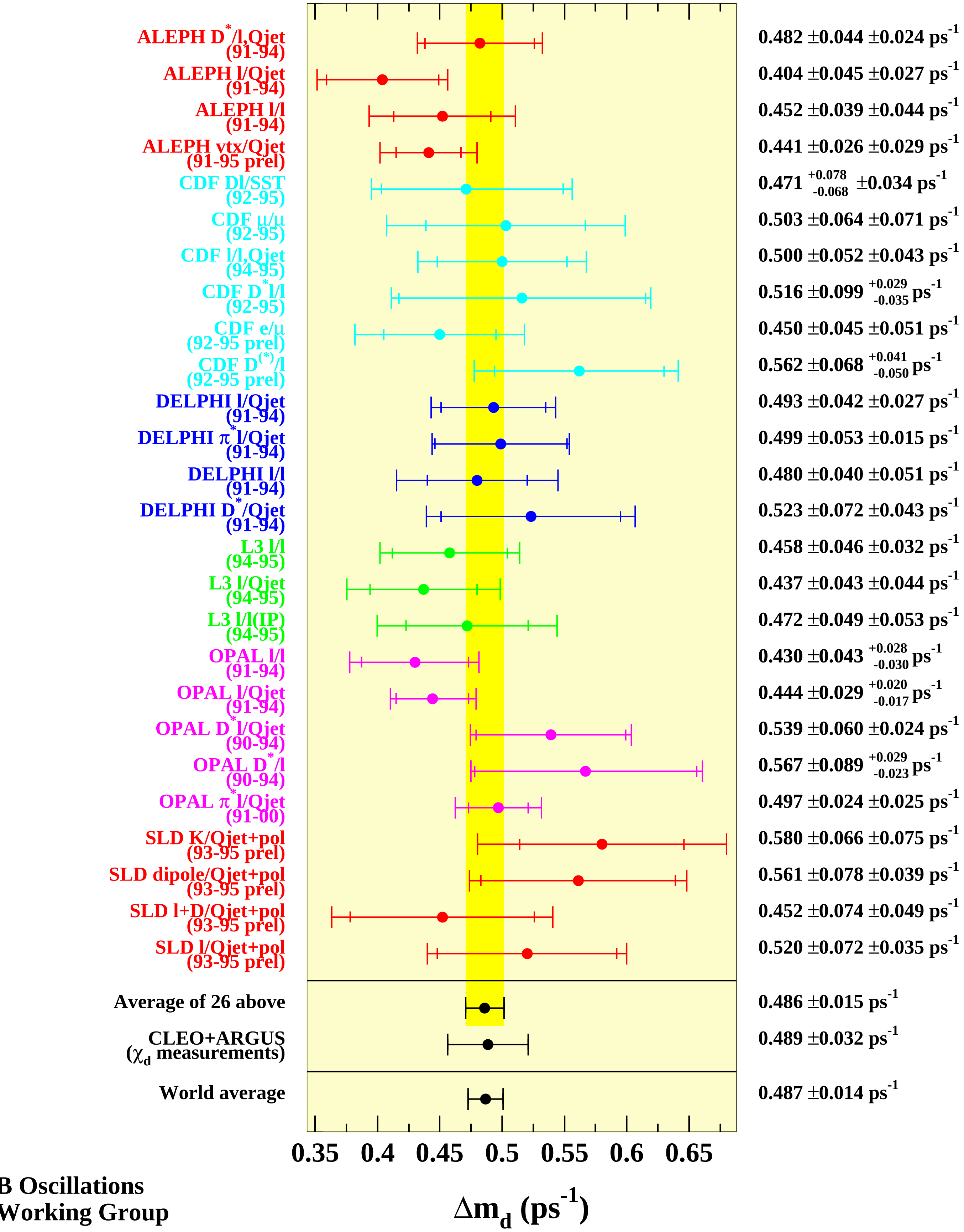
$$\frac{N(\ell^\pm\ell^\pm)[t]}{N_{\mathrm{tot}}(\ell\ell)[t]} = \frac{\mathcal{P}(B^0 \to \overline{B^0})[t]}{\mathcal{P}(B^0 \to \overline{B^0})[t] + \mathcal{P}(B^0 \to B^0)[t]}$$

$$= \sin^2(\Delta m \cdot t/2)$$

$B^0\overline{B^0}$-Oszillationen im ALEPH-Experiment



$B_d^0\overline{B_d^0}$-Mischung: $\boxed{\Delta m_d = 0.495 \pm 0.010\ \mathrm{ps}^{-1}}$



BaBar, BELLE 2000: $\Delta m_d = 0.503 \pm 0.014\ \mathrm{ps}^{-1}$

4.3.4 Verletzung der CP-Symmetrie

4.3.4.1 CP-Verletzung in K^0-Zerfällen

1964: Nachweis von $K_L^0 \to \pi^+\pi^-$ (sehr kleiner Anteil mit falschem $CP = +1$ im Endzustand).

$\Longrightarrow$ Verletzung der CP- und damit der Zeitumkehrsymmetrie in K^0-Zerfällen.

$\Longrightarrow$ Masseneigenzustände $K_{S,L}^0$ sind orthogonale Mischung der CP-Eigenzustände $=: K_{1,2}^0$ ($CP = \pm 1$), mit kleiner Beimischung des "falschen" CP-Zustands $\sim \varepsilon$:

$$\begin{aligned} K_S^0 &= \frac{K_1^0 - \varepsilon K_2^0}{\sqrt{1+|\varepsilon|^2}} \approx K_1^0; \\ K_L^0 &= \frac{K_2^0 + \varepsilon K_1^0}{\sqrt{1+|\varepsilon|^2}} \approx K_2^0. \end{aligned}$$

Tritt auf, falls die Massenmatrix komplex ist mit $M_{12}^* \neq M_{12}$: sog. "indirekte" CP-Verletzung bei der $K^0 - \overline{K}^0$-Mischung.

Im Standardmodell verursacht durch den komplexen Phasenfaktor der CKM-Matrix.

Alternativ: neue superschwache Wechselwirkung (Wolfenstein, 1964)?

Messung: $|\varepsilon| = (2.271 \pm 0.017) \cdot 10^{-3}$ (kleiner Effekt!).

“Direkte” CP-Verletzung im Zerfall des CP-Eigenzustands K_2^0 $(CP = -1)$:

Im Standardmodell durch komplexe Phase der CKM-Matrix bei Interferenz des Zerfallsprozesses niedrigster Ordnung zu $K_2^0 \to \pi^+\pi^-$ oder $\pi^0\pi^0$ mit Beiträgen höherer Ordnung, die zum gleichen Endzustand führen (sog. “Pinguin”-Diagramme):

Der Anteil direkter CP-Verletzung wird im Standardmodell durch den Parameter ε' beschrieben.

$\varepsilon' \neq 0$ schließt superschwache WW als Quelle der CP-Verletzung aus.

Nachweis 1999 bei CERN (NA48 Experiment) und FNAL (KTeV Experiment):

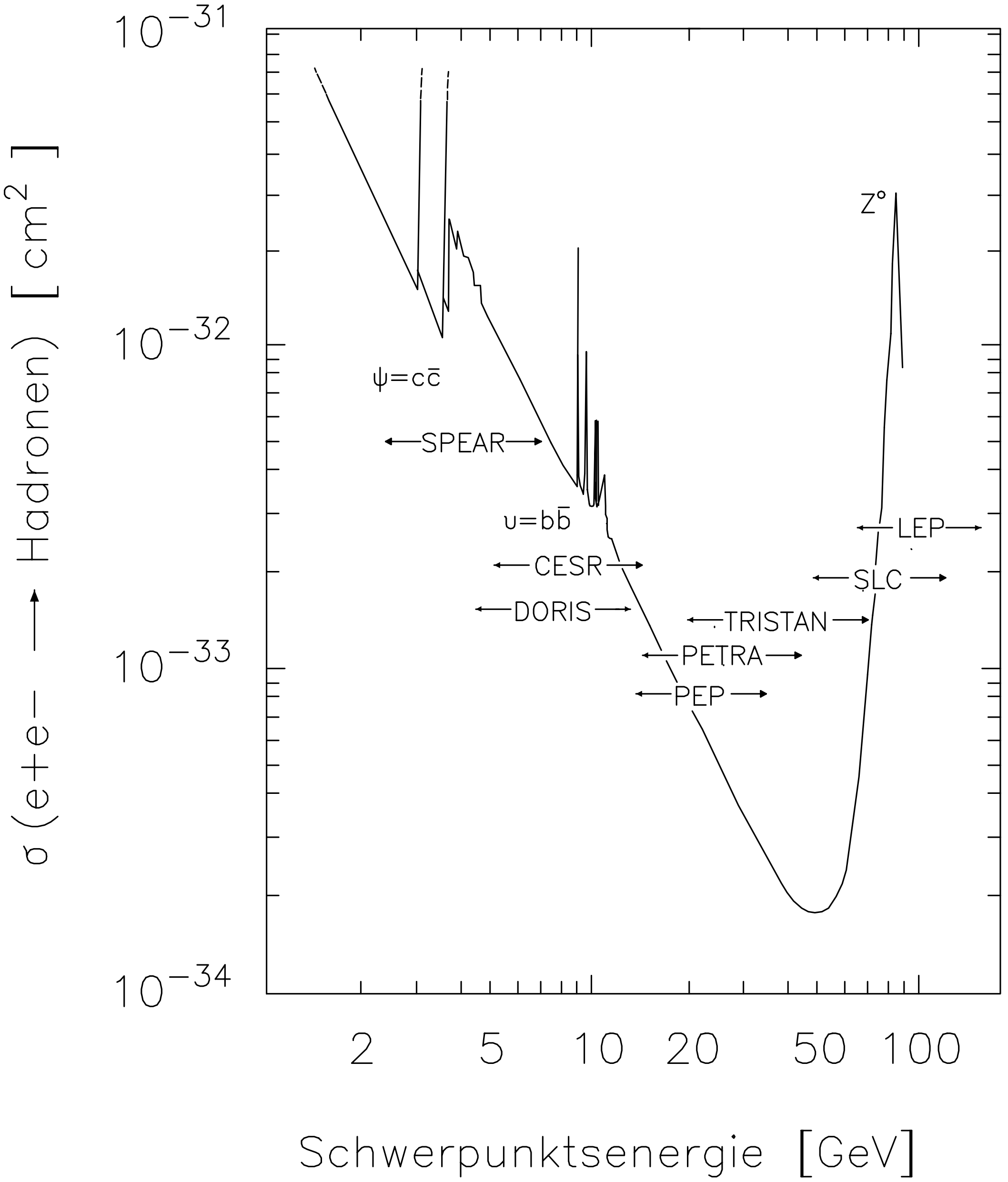
$\left|\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right| = (2.1 \pm 0.5) \cdot 10^{-3}$ (sehr kleiner Effekt!).

Das Standardmodell sagt direkte und indirekte CP-Verletzung nach den gleichen Mechanismen auch bei B^0-Mesonen vorraus.

$\longrightarrow$ Test bei sog. B-Meson-Fabriken seit 1999.

4.3.4.2 CP-Verletzung in B^0-Zerfällen

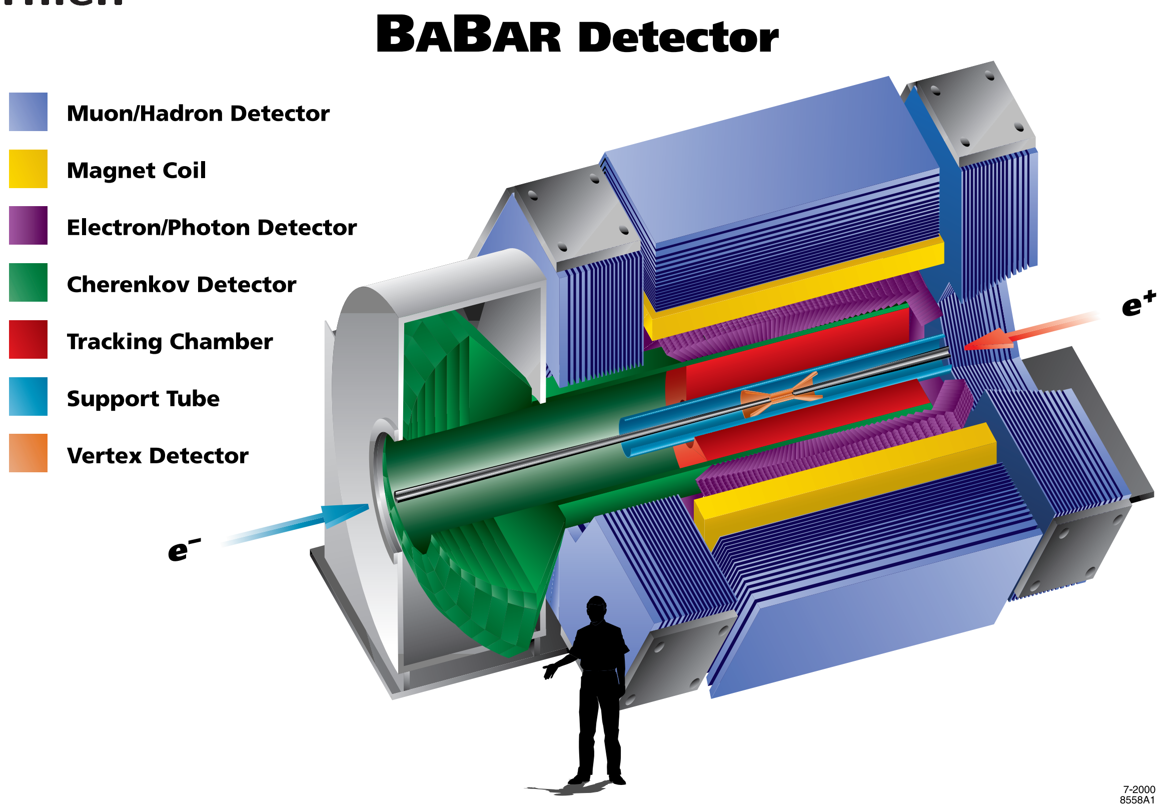
B-Meson-Produktion



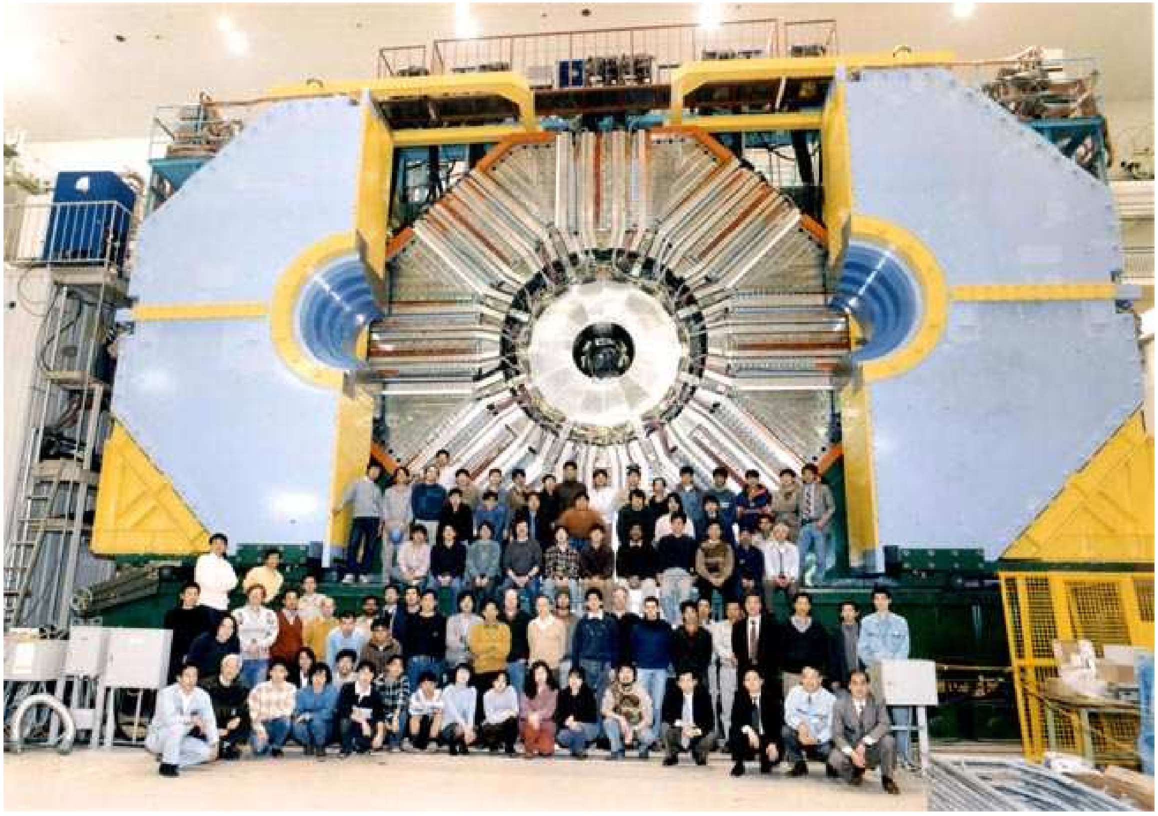
Exp.	$\sigma(b\overline{b})$	N$_{B\overline{B}}$	Reaktion
LEP	7 nb	10^6/Exp.	$e^+e^- \xrightarrow{91\ \mathrm{GeV}} Z^0 \xrightarrow{4.5\%} b\overline{b} \to B\overline{B}' + X$
CLEO	1 nb	$1.0 \cdot 10^7$	$e^+e^- \xrightarrow{10.6\ \mathrm{GeV}} \Upsilon(4S) \xrightarrow{100\%} B_d^0\overline{B_d^0}, B^+B^-$
BaBar	1 nb	$1.5 \cdot 10^7$	$e^+e^- \xrightarrow{10.6\ \mathrm{GeV}} \Upsilon(4S) \xrightarrow{100\%} B_d^0\overline{B_d^0}, B^+B^-$
BELLE	1 nb	$0.6 \cdot 10^7$	$e^+e^- \xrightarrow{10.6\ \mathrm{GeV}} \Upsilon(4S) \xrightarrow{100\%} B_d^0\overline{B_d^0}, B^+B^-$
CDF	0.1 mb		$p\overline{p} \xrightarrow{1.8\ \mathrm{TeV}} b\overline{b} + X$

B-Meson-Fabriken

BaBar-Detektor am PEP II-Speicherring am SLAC, Kalifornien



BELLE-Detektor am KEK-B-Speicherring am KEK-Beschleunigerzentrum, Japan



Die Orthogonalitätsbedingungen für die Spaltenvektoren der unitären CKM-Matrix,

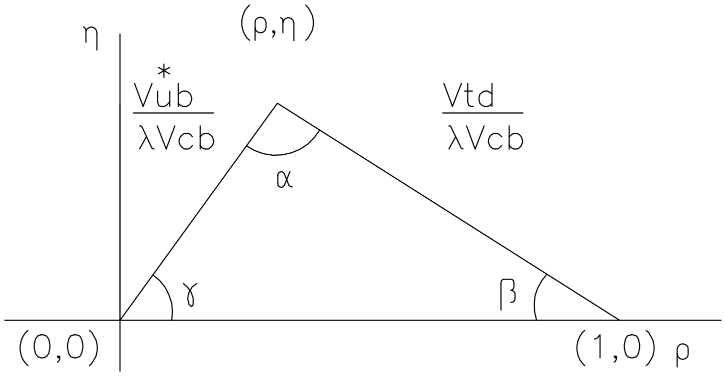
$$\begin{aligned} V_{ud}^*V_{us} + V_{cd}^*V_{cs} + V_{td}^*V_{ts} &= 0, \\ V_{us}^*V_{ub} + V_{cs}^*V_{cb} + V_{ts}^*V_{tb} &= 0, \\ V_{ub}^*V_{ud} + V_{cb}^*V_{cd} + V_{tb}^*V_{td} &= 0, \end{aligned}$$

beschreiben Dreiecke in der komplexen $\rho-\eta-$Ebene.

Die Dreiecke haben eine nichtverschwindende Fläche, wenn die Phase $\delta \neq 0$ bzw. $V_{ub} \neq 0$, d.h. CP-Verletzung.
Am nützlichsten für den Test der Unitarität der CKM-Matrix ist das durch die letzte Gleichung,

$$\frac{V_{ub}^*}{\lambda V_{cb}} + \frac{V_{td}}{\lambda V_{cb}} = 1,$$

definierte Dreieck, das CP-Verletzung in B-Meson-Zerfällen (mit bottom-Quarks) beschreibt (sog. Unitaritätsdreieck):



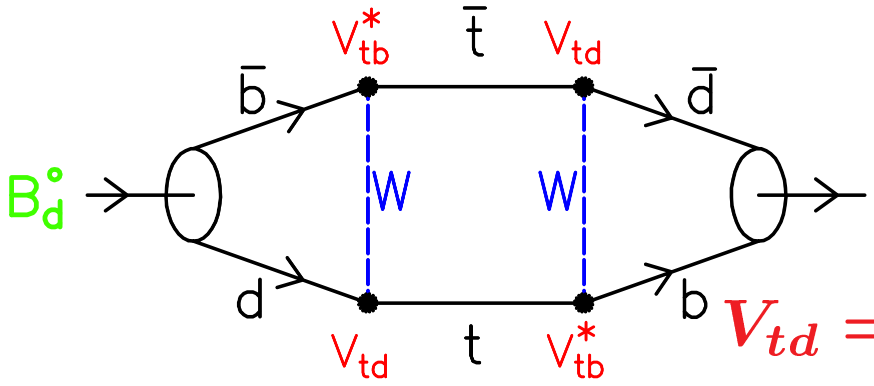
Es gilt: $V_{td} = |V_{td}|e^{-i\beta}$, $V_{ub} = |V_{ub}|e^{-i\gamma}$.

$B^0\overline{B}^0$-Mischungsrate groß , V_{ub}/V_{cb} groß
$\Longleftrightarrow$ große Fläche des Unitaritätsdreiecks
$\Longleftrightarrow$ starke CP-Verletzung in B-Mesonzerfällen.

CP-Verletzung bei $B_d^0\overline{B_d^0}$ -Mischung

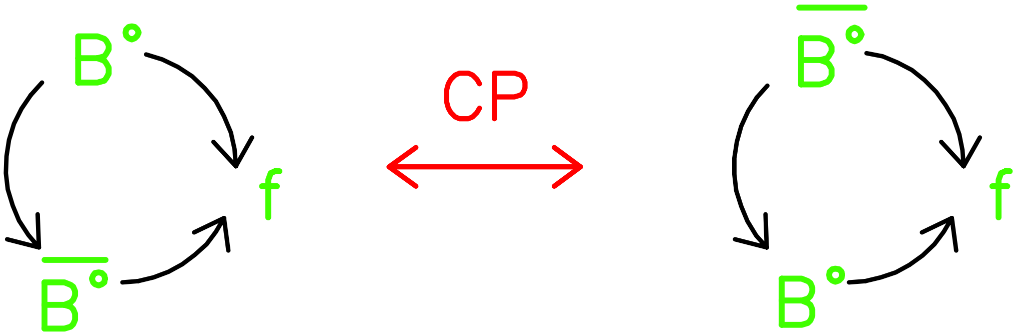
(wie bei $K^0\overline{K^0}$ -Mischung, 1964)

$$\boxed{\begin{aligned} B_1^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}[B^0 + e^{-2i\beta}\overline{B^0}] \\ B_2^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}[B^0 - e^{-2i\beta}\overline{B^0}] \end{aligned}}$$



$$V_{td} = |V_{td}|e^{-i\beta}$$

Wichtiger Spezialfall: B_d^0 -Zerfälle in CP-Eigenzustände f:



$$\Gamma(B^0 \to \overline{B^0} \to f) = \frac{A_f^2}{2\tau}e^{-t/\tau}(1 - \sin 2(\beta + \phi_f)\sin \Delta m\ t)$$

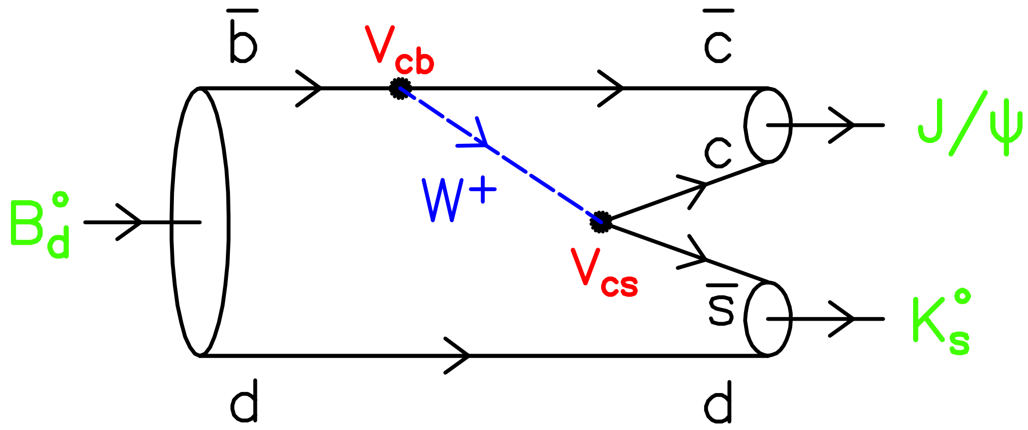
$$\neq \overline{\Gamma}(\overline{B^0} \to B^0 \to f) = \frac{A_f^2}{2\tau}e^{-t/\tau}(1 + \sin 2(\beta + \phi_f)\sin \Delta m\ t)$$

$\Longrightarrow$ **CP-verletzende Asymmetrie:**

$$\boxed{a_{CP}(t) = \frac{\overline{\Gamma}-\Gamma}{\overline{\Gamma}+\Gamma} = \sin 2(\beta + \phi_f)\sin \Delta m\ t}$$

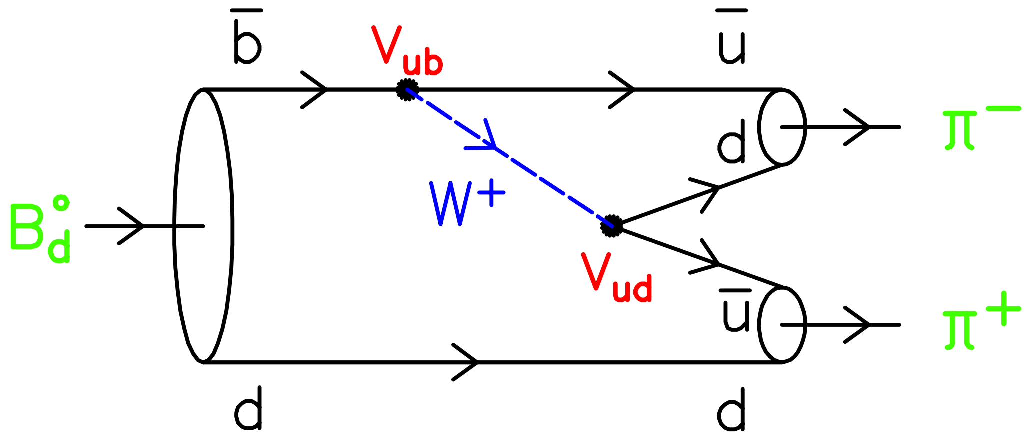
B_d^0–Zerfälle in CP-Eigenzustände

$B_d^0 \to J/\psi K_s^0$: $\phi_f = 0$



$$\boxed{a_{CP}(t) = \sin 2\beta \sin \Delta m\, t}$$

$B_d^0 \to \pi^+\pi^-$: $\phi_f = \gamma$, $V_{ub} = |V_{ub}|e^{-i\gamma}$



$$\boxed{\begin{aligned} a_{CP}(t) &= \sin 2(\beta + \gamma) \sin \Delta m\, t \\ &= \sin 2\alpha \quad \sin \Delta m\, t \end{aligned}}$$

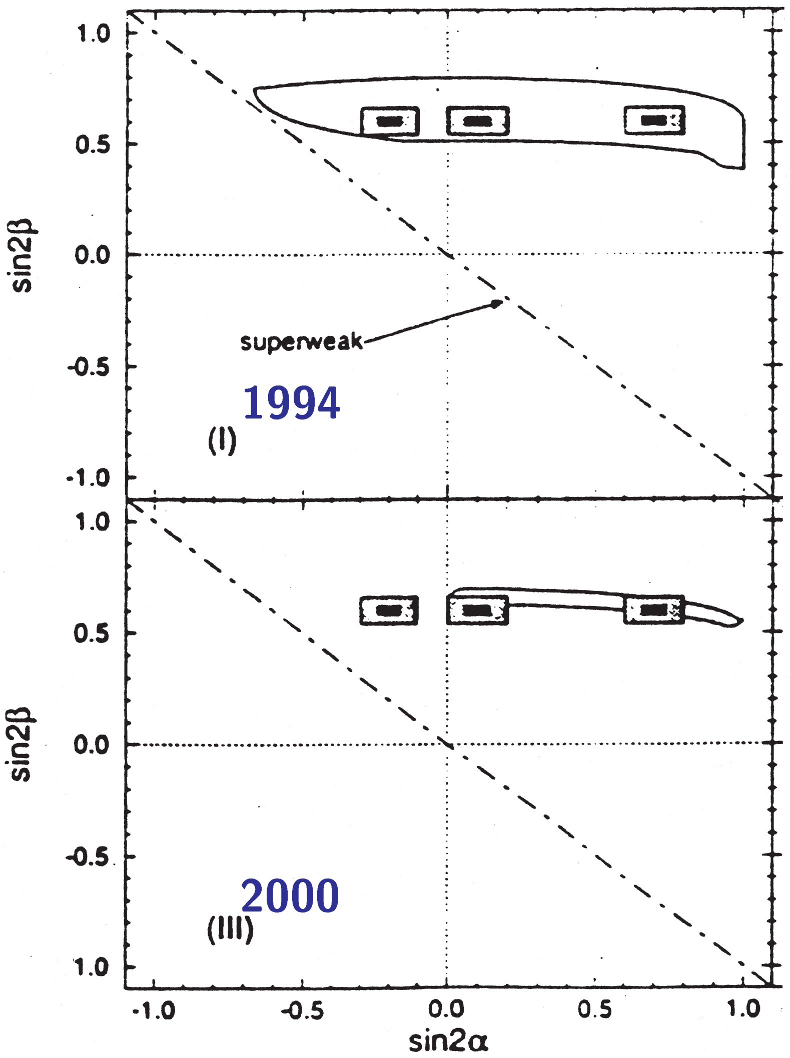
$\Longrightarrow$ **Direkte Messung der Winkel des Unitaritätsdreiecks.**

$\Longrightarrow$ **Test der Unitarität:** $\alpha + \beta + \gamma = 180°?$

B-Meson-Fabriken

Experiment		$N(B\overline{B})^\dagger$	$\Delta \sin 2\beta$	$\Delta \sin 2\alpha$	Δm_s^{max}
BaBar	e^+e^-	$3 \cdot 10^7$	0.10	0.20	
BELLE	e^+e^-	$1 \cdot 10^8$	0.08	0.15	
HERA-B	pN	$3.7 \cdot 10^8$	0.13		15 ps^{-1}
CDF/D0	$p\overline{p}$	$2 \cdot 10^{11}$	0.08	0.08	25 ps^{-1}
BTeV	$p\overline{p}$	$2 \cdot 10^{11}$	0.02	0.08	40 ps^{-1}
LHC-b	pp	$7.5 \cdot 10^{11}$	0.02	0.05	50 ps^{-1}
ATLAS/CMS	pp	$5 \cdot 10^{12}$	0.02	0.05	32 ps^{-1}

† pro Jahr



Messungen von $\sin 2\beta$:

CDF 1999:
$0.79^{+0.41}_{-0.44}$

ALEPH 2000:
$0.84^{+0.84}_{-1.05}$

BaBar 2000:
0.12 ± 0.38

BELLE 2000:
0.45 ± 0.44

Mittel: 0.49 ± 0.23

Indirekt: 0.75 ± 0.06