2. Symmetrien der Elementarteilchen

2.1 Grundlagen der relativistischen Feldtheorie

2.1.1 Notation und Konventionen

1. Wirkungsquantum $\hbar = 1$, Lichtgeschwindigkeit $c = 1$.

2. 4-Vektoren:

   Raum-Zeit-Koordinaten:

   Kontravariante Koordinaten:

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z).$$

   Kovariante Koordinaten:

$$\begin{aligned} x_\mu &= (x_0, x_1, x_2, x_3) = (t, -x, -y, -z), \\ x_\mu &= g_{\mu\nu} x^\nu \equiv \sum_\nu g_{\mu\nu} x^\nu . \end{aligned}$$

   mit dem metrischen Tensor der Minkowsky-Raum-Zeit:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \equiv g^{\mu\nu},$$

$$g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = 4; \quad g_{\mu\alpha}g^{\alpha\nu} = g^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}$$

und Summation über wiederholte Indizes.

3. Skalarprodukt (invariant):

$$x^2 \equiv x^\mu x_\mu = t^2 - \vec{x}^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2.$$

4. Energie-Impuls-Vektor:

$$\begin{aligned} p^\mu &= (E, \vec{p}) = (E, p_x, p_y, p_z), \\ p_\mu &= (E, -\vec{p}) = (E, -p_x, -p_y, -p_z), \end{aligned}$$

$$p^2 \equiv p^\mu p_\mu = E^2 - \vec{p}^2 = m^2.$$

5. Differentialoperatoren:

$$\begin{aligned} \partial_\mu &\equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right), \\ \partial^\mu &\equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla}\right). \end{aligned}$$

6. Quantenmechanische Operatoren:

4-Impuls: $\widehat{p}^\mu = i\partial^\mu = i\frac{\partial}{\partial x_\mu} = (i\frac{\partial}{\partial t}, -i\vec{\nabla})$,

$$\widehat{p}^\mu \widehat{p}_\mu = -\partial^\mu \partial_\mu = -\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2\right) = -\Box$$

mit dem d'Alembert-Operator $\Box = \partial^\mu \partial_\mu$.

2.1.2 Klassische Feldtheorie und Quantenfeldtheorie

Klass. Mechanik Hamilton'sche Bewegungs-gleichungen	$\longrightarrow$	Klass. QM Schrödinger-gleichung (Einteilchen-zustände)	$\longrightarrow$	Vielteilchensysteme: 2. Quantisierung (Vielteilchen-grundzustand + Anregungen)

$\downarrow$ Lorentzinvarianz

Relativist. Mechanik	$\longrightarrow$	Relativist. Wellen-gleichungen ($\rightarrow$ Antiteilchen)	$\longrightarrow$	Vielteilchensysteme: Feldquantisierung (Vakuum-grundzustand + Teilchen-anregungen)

Die Maxwell-Gleichungen sind das erste Bespiel einer relativistischen Feldtheorie.

Die Lorentz-Symmetrie wurde anhand der Maxwell-Gleichungen entdeckt. Sie vereinheitlicht Raum und Zeit sowie Elektrizität und Magnetismus.

Die erste Quantenfeldtheorie war die QED mit elektromagnetisch gekoppelten Quantenfeldern für elektrisch geladene Materie und elektromagnetisches Feld (Photonen). Sie ist das Muster für alle anderen Wechselwirkungen des Standardmodells.

2.1.3 Lagrange-Formalismus in der Feldtheorie

Nach dem Hamiltonschen Prinzip der kleinsten Wirkung in der klassischen Mechanik (siehe Goldstein: Klassische Mechanik) erhält man die Bewegungsgleichungen durch Variation des Wirkungsintegrals

$$S \equiv \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_i, \dot{q}_i), \tag{1}$$

mit der Lagrangefunktion $L(q_i, \dot{q}_i) = T - V$ als Funktion der verallgemeinerten Koordinaten $q_i(t)$ und ihrer Ableitungen $\dot{q}_i$ $(i = 1, \ldots n)$, aus der Bedingung

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_i, \dot{q}_i) = 0, \tag{2}$$

wobei die Koordinaten an den Endpunkten t_1 und t_2 festgehalten werden.

Die Bewegungsgleichungen liefern die Trajektorien $q_i(t)$, für die die Wirkung S minimal (stationär) wird.

(NB: Die quantenmechanische Beschreibung des Systems läßt sich nach Feynman (1948) über eine mit $\sim e^{-S}$ gewichtete Summe über alle möglichen Trajektorien formulieren.)

Die Bewegungsgleichungen sind die Euler-Lagrange-Gleichungen:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \tag{3}$$

Kurze Herleitung:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i(t)}\delta q(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(t)}\delta \dot{q}_i(t)\right].$$

Partielle Integration des 2. Terms mit $\delta \dot{q}_i(t) = \frac{d}{dt}\delta q_i(t)$ ergibt

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} dt\, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \frac{d}{dt}\delta q_i &= \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i \\ &= -\int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i,\end{aligned}$$

die 2. Zeile wegen der Randbedingung $\delta q_i(t_1) = 0 = \delta q_i(t_2)$,

und damit

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i(t)} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q.$$

$\delta S = 0$ gilt, falls die Euler-Lagrange-Gleichungen erfüllt sind.

Ergänzung:

Im Lagrange-Formalismus der klassischen Mechanik sind die zu den verallgemeinerten Koordinaten kanonisch konjugierten verallgemeinerten Impulse definiert durch

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}.$$

Verallgemeinerte Kräfte sind gegeben durch

$$F_i \equiv \frac{\partial L}{\partial q_i}.$$

Damit sind die Euler-Lagrange-Gleichungen (3):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} p_i - F_i = 0,$$

d.h. die Gleichungen beschreiben das Newtonsche Gesetz

$$F_i = \dot{p}_i.$$

Die Hamiltonfunktion ist definiert durch:

$$H(q_i, p_i) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L.$$

Der Energieerhaltungssatz in der klassischen Mechanik
(siehe Landau, Lifshitz, Band I, Klassische Mechanik)

folgt nach dem Noether-Theorem aus der Homogenität der Zeit, d.h. aus der Kovarianz der Bewegungsgleichungen und der Invarianz der Lagrange-Funktion unter Zeittranslationen:

$$\vec{x} \longrightarrow \vec{x}' = \vec{x} + \delta\vec{x}.$$

Damit ist die Variation der Lagrange-Funktion für ein abgeschlossenes System ohne explizite Zeitabhängigkeit:

$$\begin{aligned}
\frac{dL}{dt} &= \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i \\
&= \sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right)
\end{aligned}$$

unter Benutzung der Euler-Lagrange-Gleichungen.

Damit gilt der Erhaltungssatz

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L\right) = 0$$

für die Gesamtenergie

$$E = H = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = \sum_i p_i \dot{q}_i - L.$$

Da $L(q_i, \dot{q}_i) = T(q_i, \dot{q}_i) - V(q_i)$ für abgeschlossene Systeme und $T \sim \dot{q}_i^2$, gilt

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - 2T$$

und damit

$$E = T + V = H.$$

Anwendung des Lagrange-Formalismus in der Feldtheorie

(siehe Landau, Lifshitz: Band II, Klassische Feldtheorie):

Die Feldgleichungen ergeben sich durch Variation der klassichen Wirkung

$$S \equiv \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \tag{4}$$

mit der Lagrangedichte $\mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x))$ als Funktion des Feldes $\phi(x)$ (Kontinuum unendlich vieler Variabler) und seines 4-Gradienten $\partial_\mu \phi(x)$, die die Rolle der Lagrangefunktion

$$L = \int d^3x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = T - V$$

übernimmt.

Das Hamilton-Prinzip, $\delta S = 0$ mit $\delta\phi(t_1, \vec{x}) = 0 = \delta\phi(t_2, \vec{x})$, ist erfüllt, wenn die Euler-Langrage-Bewegungsgleichungen

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi(x))} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi(x)} = 0 \tag{5}$$

erfüllt sind.

Die Feldgleichungen sind relativistisch kovariant, wenn die Lagrangedichte lorentzinvariant, also ein Lorentzskalar ist. Wegen der Randbedingung ändern sie sich nicht, wenn eine totale Divergenz $\partial_\mu A$ zur Lagrangedichte addiert wird.

Die Symmetrien der Feldgleichungen ergeben sich aus den Symmetrien der Lagrangedichte.

Die Quantenzahlen der Elementarteichen und ihre Wechselwirkungen sind durch Symmetrien der Lagrangedichte bestimmt.

2.1.4 Symmetrien und Erhaltungssätze

Mit Hilfe des Lagrange-Formalismus kann man leicht die Verbindung zwischen Symmetrien der Feldgleichungen und erhaltenen physikalischen Observablen bzw. Quantenzahlen der Teilchen verifizieren.

Das ist der Inhalt des Noether-Theorems (E. Noether, 1918):

Mit jeder kontinuierlichen Symmetrietransformation (Invarianz bis auf totale Divergenz) der Lagrangefunktion ist ein Erhaltungssatz verbunden.

Beispiele:

1) Phasentransformation der (komplexen) Felder:
U(1)-Eichsymmetrie:

$$\begin{aligned} \phi(x) \quad &\longrightarrow \quad \phi'(x) = e^{iQ\alpha}\phi(x), \\ \phi^*(x) \quad &\longrightarrow \quad \phi^{*\prime}(x) = e^{-iQ\alpha}\phi^*(x). \end{aligned}$$

Führt zu infinitesimalen Variationen der Felder

$$\begin{aligned} \phi(x) \quad &\longrightarrow \quad \phi'(x) = \phi(x) + \delta\phi(x) = \phi(x) + iQ(\delta\alpha)\phi(x), \\ \phi^*(x) \quad &\longrightarrow \quad \phi^{*\prime}(x) = \phi^*(x) + \delta\phi^*(x) = \phi^*(x) - iQ(\delta\alpha)\phi^*(x) \end{aligned}$$

und es gilt $\delta(\partial_\mu\phi) = iQ(\delta\alpha)\partial_\mu\phi$, da $\delta\alpha$ eine nicht ortsabhängige Konstante ist.

Falls die Lagrangedichte $\mathcal{L}(\phi, \phi^*, \partial\phi, \partial\phi^*)$ eichinvariant ist, gilt mit den Euler-Lagrange-Gleichungen für beliebige $\delta\alpha$:

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^*}\delta\phi^* + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^*)}\delta(\partial_\mu\phi^*) \\
&= \left[\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right] iQ(\delta\alpha)\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} iQ(\delta\alpha)\partial_\mu\phi + c.c. \\
&= iQ(\delta\alpha)\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\phi\right] - iQ(\delta\alpha)\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^*)}\phi^*\right] \equiv 0,
\end{aligned}$$

d.h. es gilt die Kontinuitätsgleichung für die 4-Stromdichte $j^\mu = (\rho, \vec{j})$ der Ladung $Q = \int d^3x\rho$

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{\partial}{\partial t}\rho + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0 \qquad (6)$$

mit

$$j^\mu \equiv -iQ\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\phi - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^*)}\phi^*\right), \qquad (7)$$

so daß die Ladung Q in einem abgeschlossenen System eine Erhaltungsgröße ist:

$$\frac{d}{dt}Q = 0.$$

Innere (globale) Eichsymmetrien der Teilchenfelder führen zu erhaltenen Ladungen, internen Quantenzahlen.

2) Raum-Zeit-Translation (o.E. infinitesimal):

$$x_\mu \longrightarrow x'_\mu = x_\mu + \delta x_\mu.$$

Falls $\mathcal{L}$ forminvariant unter der Transformation ist, ändert sich $\mathcal{L}$ um

$$\delta\mathcal{L} = \mathcal{L}[x'] - \mathcal{L}[x] = \delta x^\nu \frac{d\mathcal{L}}{dx^\nu} = \delta x^\nu \partial_\nu \mathcal{L} \equiv \delta x_\mu g^{\mu\nu} \partial_\nu \mathcal{L}. \quad (8)$$

Mit

$$\delta\Phi = \phi(x') - \phi(x) = \delta x^\mu \partial_\mu \phi(x)\cdot$$

und

$$\delta(\partial_\mu\phi) = \partial_\mu\phi(x') - \partial_\mu\phi(x) = \delta x^\nu \partial_\nu \partial_\mu \phi(x)$$

gilt außerdem bei Abhängigkeit der Lagrangedichte von den Raum-Zeit-Koordinaten nur über die Felder $\phi(x)$:

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi).$$

Mit den Euler-Lagrange-Gleichungen kann man $\partial\mathcal{L}/\partial\phi$ eliminieren, so daß

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L} &= \left[\partial_\nu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi)}\right]\delta x^\mu \delta_\mu\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta x^\mu \partial_\mu\partial_\nu\phi && (9)\\
&= \partial_\nu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi)}\delta x^\mu \partial_\mu\phi. && (10)
\end{aligned}$$

Nach Gleichsetzen der Ausdrücke (8) und (10) für $\delta\mathcal{L}$ gilt für beliebige δx^μ:

$$\delta x^\mu \partial_\nu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi)}\partial^\mu\phi - g^{\mu\nu}\mathcal{L}\right] = 0, \tag{11}$$

d.h. es gilt die Kontinuitätsgleichung

$$\partial_\mu\Theta^{\mu\nu} = 0 \tag{12}$$

für den Energie-Impuls-Spannungsdichte-Tensor (in eckigen Klammern in Gl.(8)):

$$\Theta^{\mu\nu} \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi)}\partial^\mu\phi - g^{\mu\nu}\mathcal{L}. \tag{13}$$

(Dieser Tensor ist die Quelle für die Gravitation bzw. Raumkrümmung in der ART.)

Es folgt u.a. die Kontinuitätsgleichung für die Energieflußdichte:

$$\partial_\mu \Theta^{\mu 0} \equiv \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{H} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{P}} = 0, \tag{14}$$

wobei

$$\Theta^{00} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} \partial^0 \phi - \mathcal{L} = 2\mathcal{T} - \mathcal{L} = \mathcal{T} + \mathcal{V} = \mathcal{H} \tag{15}$$

die Energiedichte $\mathcal{H}$ und entsprechend $\Theta^{0\nu} \equiv \mathcal{P}^\nu$ die 4-Impulsdichte sind.

Damit gelten nach (12) für die Gesamtenergie (Hamiltonfunktion) $H \equiv \int d^3x \Theta^{00}$ bzw. für den 4-Impuls $P^\nu \equiv \int d^3x \Theta^{0\nu}$ in einem abgeschlossenen System die Erhaltungssätze

$$\frac{d}{dt} H = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt} P^\nu = 0. \tag{16}$$

Auf analoge Weise führt die Rotationssymmetrie des Raums zur Drehimpulserhaltung und erhaltenen internen Spinquantenzahlen ($SO(3)$- bzw. $SU(2)$-Symmetrie des Raums).

Rotationen der Raum-Zeit entsprechen der Lorentz-Invarianz (Relativitätstheorie).

Ergänzung:

Aufgrund der Isotropie der Raum-Zeit, d.h. Invarianz unter Rotationen im Raum und Lorentztransformationen, ist der 4-dimensionale Drehimpulstensor

$$M^{\mu\nu} \equiv \oint (x^\mu \Theta^{\nu\sigma} - x^\nu \Theta^{\mu\sigma}) s S_\sigma$$

erhalten. Für den Drehimpulsdichtetensor $\mathcal{M}^{\mu\nu\sigma}$ gilt die Kontinuitätsgleichung

$$\partial_\sigma \mathcal{M}^{\mu\nu\sigma} = 0.$$

Mit dieser Definition des Drehimpulstensors in Relation zum 4-Impuls bzw. Energie-Impuls-Tensor ist der Energie-Impuls-Tensor eindeutig festgelegt und symmetrisch:

$$\Theta^{\mu\nu} = \Theta^{\nu\mu}.$$

Der Energie-Impulsdichte-Tensor hat die allgemeine Form:

$$\Theta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \mathcal{H} & \mathcal{P}_x & \mathcal{P}_y & \mathcal{P}_z \\ \mathcal{P}_x & \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \mathcal{P}_y & \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \mathcal{P}_z & \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}.$$

σ_{ik} ist der Spannungtensor. In homogenen Medien ist er diagonal.

Relationen in den Kontinuitätsgleichungen:

Energiedichte (Skalar) $\leftrightarrow$ Energiestromdichte = Impulsdichte (4-Vektor)

Impulsdichte (4-Vektor) $\leftrightarrow$ Impulsstromdichte = Spannungsdichte (2-dim. Tensor).