Ergänzung:
Im Lagrange-Formalismus der klassischen Mechanik sind die zu den verallgemeinerten Koordinaten kanonisch konjugierten verallgemeinerten Impulse definiert durch

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}.$$

Verallgemeinerte Kräfte sind gegeben durch

$$F_i \equiv \frac{\partial L}{\partial q_i}.$$

Damit sind die Euler-Lagrange-Gleichungen (3):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} p_i - F_i = 0,$$

d.h. die Gleichungen beschreiben das Newtonsche Gesetz

$$F_i = \dot{p}_i.$$

Die Hamiltonfunktion ist definiert durch:

$$H(q_i, p_i) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L.$$

Der Energieerhaltungssatz in der klassischen Mechanik

(siehe Landau, Lifshitz, Band I, Klassische Mechanik)

folgt nach dem Noether-Theorem aus der Homogenität der Zeit, d.h. aus der Kovarianz der Bewegungsgleichungen und der Invarianz der Lagrange-Funktion unter Zeittranslationen:

$$\vec{x} \longrightarrow \vec{x}' = \vec{x} + \delta\vec{x}.$$

Damit ist die Variation der Lagrange-Funktion für ein abgeschlossenes System ohne explizite Zeitabhängigkeit:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i$$

$$= \sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right)$$

unter Benutzung der Euler-Lagrange-Gleichungen.

Damit gilt der Erhaltungssatz

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L\right) = 0$$

für die Gesamtenergie

$$E = H = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = \sum_i p_i \dot{q}_i - L.$$

Da $L(q_i, \dot{q}_i) = T(q_i, \dot{q}_i) - V(q_i)$ für abgeschlossene Systeme und $T \sim \dot{q}_i^2$, gilt

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - 2T$$

und damit

$$E = T + V = H.$$

Ergänzung:

Aufgrund der Isotropie der Raum-Zeit, d.h. Invarianz unter Rotationen im Raum und Lorentztransformationen, ist der 4-dimensionale Drehimpulstensor

$$M^{\mu\nu} \equiv \oint (x^\mu \Theta^{\nu\sigma} - x^\nu \Theta^{\mu\sigma}) s S_\sigma$$

erhalten. Für den Drehimpulsdichtetensor $\mathcal{M}^{\mu\nu\sigma}$ gilt die Kontinuitätsgleichung

$$\partial_\sigma \mathcal{M}^{\mu\nu\sigma} = 0.$$

Mit dieser Definition des Drehimpulstensors in Relation zum 4-Impuls bzw. Energie-Impuls-Tensor ist der Energie-Impuls-Tensor eindeutig festgelegt und symmetrisch:

$$\Theta^{\mu\nu} = \Theta^{\nu\mu}.$$

Der Energie-Impulsdichte-Tensor hat die allgemeine Form:

$$\Theta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \mathcal{H} & \mathcal{P}_x & \mathcal{P}_y & \mathcal{P}_z \\ \mathcal{P}_x & \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \mathcal{P}_y & \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \mathcal{P}_z & \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}.$$

σ_{ik} ist der Spannungtensor. In homogenen Medien ist er diagonal.

Relationen in den Kontinuitätsgleichungen:

Energiedichte (Skalar) $\leftrightarrow$ Energiestromdichte = Impulsdichte (4-Vektor)

Impulsdichte (4-Vektor) $\leftrightarrow$ Impulsstromdichte = Spannungsdichte (2-dim. Tensor).