2.1.4 Symmetrien und Erhaltungssätze

Mit Hilfe des Lagrange-Formalismus kann man leicht die Verbindung zwischen Symmetrien der Feldgleichungen und erhaltenen physikalischen Observablen bzw. Quantenzahlen der Teilchen verifizieren.

Das ist der Inhalt des Noether-Theorems (E. Noether, 1918):

Mit jeder kontinuierlichen Symmetrietransformation (Invarianz bis auf totale Divergenz) der Lagrangefunktion ist ein Erhaltungssatz verbunden.

Beispiele:

1) Phasentransformation der (komplexen) Felder:
U(1)-Eichsymmetrie:

$$\begin{aligned} \phi(x) &\longrightarrow \phi'(x) = e^{iQ\alpha}\phi(x), \\ \phi^*(x) &\longrightarrow \phi^{*\prime}(x) = e^{-iQ\alpha}\phi^*(x). \end{aligned}$$

Führt zu infinitesimalen Variationen der Felder

$$\begin{aligned} \phi(x) &\longrightarrow \phi'(x) = \phi(x) + \delta\phi(x) = \phi(x) + iQ(\delta\alpha)\phi(x), \\ \phi^*(x) &\longrightarrow \phi^{*\prime}(x) = \phi^*(x) + \delta\phi^*(x) = \phi^*(x) - iQ(\delta\alpha)\phi^*(x) \end{aligned}$$

und es gilt $\delta(\partial_\mu\phi) = iQ(\delta\alpha)\partial_\mu\phi$, da $\delta\alpha$ eine nicht ortsabhängige Konstante ist.

Falls die Lagrangedichte $\mathcal{L}(\phi, \phi^*, \partial\phi, \partial\phi^*)$ eichinvariant ist, gilt mit den Euler-Lagrange-Gleichungen für beliebige $\delta\alpha$:

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^*}\delta\phi^* + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^*)}\delta(\partial_\mu\phi^*) \\
&= \left[\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right] iQ(\delta\alpha)\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} iQ(\delta\alpha)\partial_\mu\phi + c.c. \\
&= iQ(\delta\alpha)\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\phi\right] - iQ(\delta\alpha)\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^*)}\phi^*\right] \equiv 0,
\end{aligned}$$

d.h. es gilt die Kontinuitätsgleichung für die 4-Stromdichte $j^\mu = (\rho, \vec{j})$ der Ladung $Q = \int d^3x\rho$

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{\partial}{\partial t}\rho + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0 \tag{6}$$

mit

$$j^\mu \equiv -iQ\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\phi - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^*)}\phi^*\right), \tag{7}$$

so daß die Ladung Q in einem abgeschlossenen System eine Erhaltungsgröße ist:

$$\frac{d}{dt}Q = 0.$$

Innere (globale) Eichsymmetrien der Teilchenfelder führen zu erhaltenen Ladungen, internen Quantenzahlen.