2.1.5 Feldgleichungen für freie Teilchen

Relativistische Wellengleichungen für die fundamentalen Teilchen des Standardmodells.

2.1.5.1 Rekapitulation: Schrödingergleichung

für nicht-relativistische freie Punktteilchen ohne Spin:
$E = \frac{\vec{p}^2}{2m} = T$.

Quantisierung:

$$E \longrightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}; \quad \vec{p} \longrightarrow -i\hbar\vec{\nabla}.$$

$\Longrightarrow$ Wellengleichung:

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\vec{x},t)}{\partial t} = \widehat{H}\psi(\vec{x},t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2\psi(\vec{x},t)$$

mit den ebenen Wellenlösungen

$$\psi(\vec{x},t) = \frac{1}{\sqrt{V}}e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$$

zu den Energie- und Impulseigenwerten $E = \hbar\omega$, $\vec{p} = \hbar\vec{k}$.

Mit den Definitionen

$$\begin{aligned}
\rho &= \psi^*\psi = |\psi|^2 \ (= \frac{1}{\sqrt{V}}), \\
\vec{j} &= -\frac{i\hbar}{2m}(\psi^*(\nabla\psi) - (\vec{\nabla}\psi^*)\psi) \ (= \frac{\hbar\vec{k}}{mV} = \rho\frac{\vec{p}}{m} = \rho\vec{v})
\end{aligned}$$

für die Wahrscheinlichkeitsdichte und die Wahrscheinlichkeitsstromdichte (in Klammern für ebene Wellen) gilt die lokale Erhaltung der Wahrscheinlichkeit (Kontinuitätsgleichung):

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$$

und damit

$$\frac{d}{dt}\int d^3x\rho = 0.$$

2.1.5.2 Klein-Gordon-Gleichung

(Gordon, Klein 1926; Pauli, Weisskopf 1934)

für relativistische skalare (Spin 0-) Bosonen (z.B. $\pi^\pm$, $K^0/\bar{K}^0$, Higgsfeld): $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$.

Quantisierung ($\hbar = 1$):

$$p^\mu = (E, \vec{p}) \longrightarrow i\partial^\mu = (i\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla}).$$

$\Longrightarrow$ Wellengleichung:

$$-\frac{\partial^2\phi(x)}{\partial t^2} = (-\vec{\nabla}^2 + m^2)\phi(x),$$

$$\Longrightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 + m^2\right)\phi(x) \equiv (\Box + m^2)\phi(x).$$

Die gleiche Gleichung gilt für das komplex konjugierte Feld (Antiteilchen):

$$(\Box + m^2)\phi^*(x).$$

Die Feldgleichungen lassen sich aus der Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = [(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi)^* - m^2\phi\phi^*] = \mathcal{L}(\phi, \phi^*; \partial^\mu\phi, \partial^\mu\phi^*)$$

nach dem Variationsformalismus von Euler und Lagrange herleiten durch Variation der Felder:

$\delta\phi^*(x)$ ergibt Feldgleichung für $\phi(x)$.

$\delta\phi(x)$ ergibt Feldgleichung für $\phi^*(x)$.

Freie Lösungen sind ebene Wellen:

$$\phi^{\pm}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} \mp \omega t)}$$

zu den Energieeigenwerten $E = \pm\omega$ mit $\omega = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$.

Die globale $U(1)$-Eichsymmetrie der Lagrangedichte unter Phasentransformationen der Felder (siehe Beispiel) führt zu dem lokalen Erhaltungssatz (Kontinuitätsgleichung)

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$$

für die 4-Wahrscheinlichkeitsstromdichte $j^\mu = (\rho, \vec{j})$:

$$\begin{aligned} j^\mu &= -i\frac{1}{2m} \cdot \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\phi - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^*)}\phi^* \right) \\ &= -\frac{i}{2m}[(\partial^\mu\phi)^*\phi - (\partial^\mu\phi)\phi^*] \end{aligned}$$

mit $\rho = \pm\frac{1}{V} \cdot \frac{\omega}{m}$ und $\vec{j} = \frac{1}{V} \cdot \frac{\vec{k}}{m}$ für ebene Wellenlösungen (relativistische Verallgemeinerung der Wahrscheinlichkeitserhaltung in der klassichen Quantenmechanik).

Die Wahrscheinlichkeitsdichte ρ für Lösungen mit negativen Energieeigenwerten ist ebenfalls negativ.

Im Rahmen der Quantenfeldtheorie können die ebene Wellen mit negativer Energie als Wellenfunktionen für die Antiteilchen interpretiert werden (s.u.).

Die relativistische Invarianz erlaubt keine konsistente quantenmechanische Interpretation der Einteilchenwellengleichung. Eine Vielteichenquantentheorie ist erforderlich. Die (klassiche) Lagrangedichte ist dennoch für die Untersuchung der Symmetrien und Wechselwirkungen und die meisten Berechnungen ausreichend.

Grenzfall:

Reelle skalare Felder beschreiben Spin 0-Teilchen, die mit ihren Antiteilchen identisch sind (z.B. π^0, Higgsboson).

Die Wellengleichung

$$(\Box + m^2)\phi(x) = 0$$

entspricht der Lagrangedichte

$$\mathcal{L}(\phi, \partial^\mu \phi) = \frac{1}{2}[(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^2].$$