2.1.5.3 Dirac-Gleichung

(Dirac 1928)

für relativistische Spin $\frac{1}{2}$-Fermionen (Leptonen und Quarks): $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$.

Quantisierung:

$$E \longrightarrow i\frac{\partial}{\partial t}; \quad \vec{p} \longrightarrow -i\vec{\nabla}.$$

$\Longrightarrow$ Ansatz fúr die Wellengleichung nur mit 1. Ableitung nach der Zeit (wie Schrödingergleichung nach den Interpretationsproblemen mit der Klein-Gordon-Gleichung) und damit auch nach dem Ort (wegen relativistischer Kovarianz):

$$\begin{aligned} i\frac{\partial\psi}{\partial t} \equiv \widehat{H}\psi &= (\vec{\alpha}\cdot\widehat{\vec{p}} + \beta m)\psi \\ &\equiv (-i\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} + \beta m)\psi \end{aligned}$$

mit Parametern $\vec{\alpha}$, β, die so gewählt werden müssen, daß weiterhin (für jede Komponente des Feldes ψ) die Klein-Gordon-Gleichung erfüllt, d.h. nach 2. Ableitung des Ansatzes nach der Zeit und Einsetzen des Ansatzes für die 1. Ableitung:

$$-\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \equiv \widehat{H}\psi = (\vec{p}^2 + m^2)\psi \equiv (-\vec{\nabla}^2 + m^2)\psi$$

Dies ist nur erfüllbar, wenn $\alpha_{1,2,3} = \alpha^\dagger_{1,2,3}$ und $\beta = \beta^\dagger$ hermitesche Matrizen sind mit den Eigenschaften:

1. $\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = \alpha_3^2 = \beta^2 = 1 \implies$ Eigenwerte $= \pm 1$

2. Antivertauschungsrelationen:

$$\alpha_j \alpha_k + \alpha_k \alpha_j = 0 \quad (j \neq k),$$

$$\alpha_j \beta + \beta \alpha_j = 0 \quad \implies \mathrm{Spur}(\alpha_{1,2,3}) = \mathrm{Spur}(\beta) = 0.$$

Damit muß die Dimension der Matrizen gerade sein und mindestens $n = 4$, da es für $n = 2$ neben der Einheitsmatrix I nur 3 linear unabhängige Matrizen gibt, die Pauli'schen Spinmatrizen:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Für $n = 4$ gibt es 16 linear unabhängige Matrizen.

Die folgenden Kombinationen von Matrizen sind am günstigsten für eine raum-zeitlich symmetrische Formulierung der Dirac-Wellengleichung: die Dirac'schen γ-Matrizen:

$$\gamma^0 = \beta, \gamma^1 = \beta\alpha_1, \gamma^2 = \beta\alpha_2, \gamma^3 = \beta\alpha_3,$$

die formal einen 4-Vektor bilden,

$$\gamma^\mu = (\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3), \ \gamma_\mu = g_{\mu\nu}\gamma^\mu = (\gamma^0, -\gamma^1, -\gamma^2, -\gamma^3),$$

bei Lorentztransformationen aber invariant bleiben.

Damit ist die relativistisch kovariante Dirac-Gleichung:

$$\boxed{(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) = 0}$$

d.h.

$$\left[i(\gamma^0\frac{\partial}{\partial t} + \vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla}) - m\cdot I\right]\psi = 0.$$

Die Fermionfelder sind 4-komponentig: 4-Spinoren.

Die γ-Matrizen haben die folgenden Eigenschaften:

- $\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}\cdot I.$
- $\gamma^\mu\gamma_\mu = g_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu = 4\cdot I.$
- $\gamma^{0\dagger} = \gamma^0,\ \gamma^{j\dagger} = -\gamma^j.$

Eine gebräuchliche Darstellung der γ-Matrizen ist (Pauli-Dirac-Darstellung: γ^0 diagonal):

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},\ \gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ -\sigma_j & 0 \end{pmatrix}.$$

Der adjungierte Spinor, definiert durch

$$\overline{\psi} := \psi^\dagger \gamma^0,$$

erfüllt die adjungierte Dirac-Gleichung:

$$\overline{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) = 0.$$

Das Produkt $\overline{\psi}\psi$ ist im Gegensatz zu $\psi^\dagger\psi$ lorentzinvariant (Lorentz-Skalar).

Die lorentzinvariante Lagrangedichte für freie Dirac-Teilchen ist damit:

$$\boxed{\mathcal{L} = \overline{\psi}(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x)}$$

Variation $\delta\overline{\psi}$ liefert als Feldgleichung die Dirac-Gleichung.

Variation $\delta\psi$ liefert als Feldgleichung die adjungierte Dirac-Gleichung.

Lösungen der freien Dirac-Gleichung sind ebene Wellen mit 4 internen Spinorfreiheitsgraden,

zu zwei (positiven und negativen Energieeigenwerten $E = \pm\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ und zu zwei Spineinstellungen $s = 1, 2$ (up/down bzgl. der z-Richtung),

die ein Orthonormalsystem bilden:

$$\psi^+(x) = u_s(p)e^{-ip_\mu x^\mu}; \quad \psi^-(x) = v_s(p)e^{+ip_\mu x^\mu}$$

mit den Spinorkomponenten

$$u_1(p) = \sqrt{\tfrac{E+m}{V}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x+ip_y}{E+m} \end{pmatrix}; \; u_2(p) = \sqrt{\tfrac{E+m}{V}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x-ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix};$$

$$v_1(p) = \sqrt{\tfrac{|E|+m}{V}} \begin{pmatrix} \frac{p_x-ip_y}{|E|+m} \\ \frac{-p_z}{|E|+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; v_2(p) = \sqrt{\tfrac{|E|+m}{V}} \begin{pmatrix} \frac{p_z}{|E|+m} \\ \frac{p_x+ip_y}{|E|+m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dabei ist $p_\mu x^\mu = Et - \vec{p} \cdot \vec{x}$ und $u_s^\dagger u_s = v_s^\dagger v_s = 2E/V$.

Interpretation der Zustände:

1) Feynman-Stückelberg-Bild:

- $u_s(p)$ $(E > 0)$: in pos. Zeitrichtung einlaufendes Fermion;
- $\overline{u}_s(p)$ $(E > 0)$: in pos. Zeitrichtung auslaufendes Fermion;
- $v_s(p)$ $(E < 0)$: in neg. Zeitrichtung einlaufendes Anti-Fermion;
- $\overline{v}_s(p)$ $(E < 0)$: in neg. Zeitrichtung auslaufendes Anti-Fermion.

2) QFT-Bild:

Freie Feldoperatoren:

- $\widehat{\psi}_f(x)$: vernichtet Fermionen ($u_s(p)$),
  erzeugt Antifermionen ($v_s(p)$).

- $\widehat{\overline{\psi}}_f(x)$: vernichtet Antifermionen ($\overline{u}_s(p)$),
  erzeugt Fermionen ($\overline{u}_s(p)$).

Bei Wahl der Spinrichtung entlang der Impulsrichtung (Spin-Quantisierungsachse) können folgende Spinzustände definiert werden:

Linkshändige Fermionen $\psi_L = P_L\psi$: Spin und Impuls antiparallel.

Rechtshändige Fermionen $\psi_R = P_R\psi$: Spin und Impuls parallel.

Die Projektionsoperatoren $P_L = P_L^2$ und $P_R = P_R^2$, mit $P_L P_R = P_R P_L = 0$ und $P_R + P_L = 1$, sind gegeben durch:

$$P_L = \frac{1-\gamma_5}{2} = P_L^\dagger, \quad P_R = \frac{1+\gamma_5}{2} = P_R^\dagger.$$

Dabei ist der Chiralitätsoperator γ_5 ist gegeben durch

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \gamma_5^\dagger$$

mit den Eigenzuständen (Chiralitätsspinorzustände):

$$\gamma_5 \psi_R = \psi_R, \quad \gamma_5 \psi_L = -\psi_L,$$

wobei

$$\begin{aligned} \overline{\psi}_L &= (P_L \psi)^\dagger \gamma^0 = \overline{\psi} P_R, \\ \overline{\psi}_R &= (P_R \psi)^\dagger \gamma^0 = \overline{\psi} P_L. \end{aligned}$$

Die Helizität $h = \frac{\vec{s} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|}$ hängt vom Bezugsystem, außer für masselose Teilchen.

Es gilt:

- $\gamma_5^2 = I$.
- $\gamma^\mu \gamma_5 + \gamma_5 \gamma^\mu = 0$.
- $\gamma_5 P_R = -P_R$, $\gamma_5 P_L = -P_L$.
- $\gamma^\mu P_L = P_R \gamma^\mu$, $\gamma^\mu P_R = P_L \gamma^\mu$.

In der Pauli-Dirac-Darstellung (γ^0 diagonal) hat γ_5 die Form

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Weyl-Darstellung ist dadurch definiert, daß γ_5 diagonal ist mit den den Chiralitäten der Spinorzustände als Eigenwerten:

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}.$$

γ^0 hat in dieser Darstellung die Form

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{pmatrix},$$

während die anderen γ-Matrizen $\gamma_{1,2,3}$ ihre Form behalten.

Die globale $U(1)$-Symmetrie der Lagrangedichte $\mathcal{L}(\psi, \partial_m u\psi)$ unter Phasentransformationen der Felder,

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = \psi(x) + i\delta\alpha\psi(x),$$

führt zum lokalen Erhaltungssatz

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

mit der 4-Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\begin{aligned} j^\mu = (\rho, \vec{j}) &= -i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\psi \\ &= \overline{\psi}\gamma^\mu\psi. \end{aligned}$$

Damit ist die Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho = \overline{\psi}\gamma^0\psi = \psi^\dagger\psi.$

Diskrete Symmetrien der Dirac-Gleichung:

1. Parität P (Raumspiegelung):

   $\vec{x} \longrightarrow -\vec{x}$, $\vec{p} \longrightarrow -\vec{p}$.

$$\psi(t,\vec{x}) \longrightarrow \psi^P(t,-\vec{x}) = \eta_P \gamma^0 \psi(t,\vec{x})$$

   erfüllt die raumgespiegelte Dirac-Gleichung.

2. Zeitinversion T: $t \longrightarrow -t$.

$$\psi(t,\vec{x}) \longrightarrow \psi^T(-t,\vec{x}) = i\gamma^1\gamma^3\psi^*(t,\vec{x})$$

   erfüllt die zeitgespiegelte Dirac-Gleichung.

3. Ladungskonjugation C:

   Teilchen $\longrightarrow$ Antiteilchen, $Q_f \longrightarrow -Q_f$.

$$\psi(t,\vec{x}) \longrightarrow \psi^C(t,\vec{x}) = i\eta_C\gamma^2\psi^*(t,\vec{x})$$

   erfüllt die konjugierte Dirac-Gleichung.

$\Longrightarrow$ CPT-Symmetrie,

$\Longrightarrow$ gleiche Lebensdauern und Massen von Teilchen und Antiteilchen.

CPT-Erhaltung gilt allgemein für jede lokale, lorentzinvariante Feldtheorie mit $\mathcal{L}^\dagger = \mathcal{L}$ und Spin-Statistik-Relation

(Schwinger 1951, Pauli 1955, Lüders 1957).

Skalare wie $\overline{\psi}\psi$ sind invariant unter Raumspiegelung.

Pseudoskalare wie $\overline{\psi}\gamma^5\psi$ wechseln das Vorzeichen unter Raumspiegelung.

(4-) Vektoren wie $\overline{\psi}\gamma^\mu\psi$ (Strom): Zeitkomponente erhalten, Richtungsumkehr der Raumkomponente bei Raumspiegelung.

(4-) Axialvektoren wie $\overline{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi$: Raumkomponente erhalten, Vorzeichenwechsel der Zeitkomponente bei Raumspiegelung.