2.1.5.4 Das elektromagnetische Feld

Maxwell-Gleichungen $(c = 1)$:

(Maxwell 1864)

(i) $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0; \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t};$ (Randbedingungen)

(ii) $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0; \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t};$ (freies Feld)

(ii′) $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho; \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}.$ (mit Quellen)

mit der elektrischen Ladungsdichte $\rho(x)$ und der elektrischen Stromdichte $\vec{j}(x)$, für die ein Erhaltungssatz (Kontinuitätsgleichgung) gilt:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0,$$

der unmittelbar aus (ii′) durch Berechnung des Gradienten folgt.

Die Gleichungen (i) für die elektromagnetischen Felder $\vec{E}(x)$ und $\vec{B}(x)$ sind automatisch erfüllt, wenn diese durch ein skalares Potential $\Phi(x)$ und ein Vektorpotential $\vec{A}(x)$ ausgedrückt werden:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}; \qquad \vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

Eichinvarianz der Lösungen der Maxwell-Gleichungen

unter den Transformationen

$$\Phi(x) \longrightarrow \Phi(x) - \frac{\partial \chi(x)}{\partial t}; \qquad \vec{A}(x) \longrightarrow \vec{A}(x) + \vec{\nabla} \cdot \chi(x)$$

mit einem beliebigen skalaren Feld $\chi(x)$.

Die Maxwell-Gleichungen sind Lorentz-kovariant. Die Lichtgeschwindigkeit ist in allen bewegten Bezugssystemen die gleiche (Entdeckung der Speziellen Relativitätstheorie 1905).

Relativistisch kovariante Schreibweise:

Mit dem 4-Potential $A^\mu = (\Phi, \vec{A})$ und dem antisymmetrischen Feldtensor, definiert durch dessen 4-Rotation

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu = -F^{\nu\mu}$$

mit

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ -E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix},$$

erhalten die Maxwell-Gleichungen die Form:

(i) $\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} = 0;$

(ii) $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0;$

(ii′) $\partial_\mu F^{\mu\nu} = -j^\nu.$

Aus (ii′) und der Definition des Feldtensors (aufgrund von (i)) folgt durch Anwendung der 4-Divergenz unmittelbar die kovariante Form der Kontinuitätsgleichung zur Ladungserhaltung:

$$\partial_\nu j^\nu = -\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$$

mit der elektrischen 4-Stromdichte $j^\mu(x) = (\rho(x), \vec{j}(x))$.

Die Erhaltung der elektrischen Ladung ist damit mit der Eichsymmetrie der elektromagnetischen Feldgleichungen verbunden.

Die Lösungen der Maxwellgleichungen für die Felder sind invariant unter der Eichtransformation des 4-Potentials:

$$A^\mu(x) \longrightarrow A^\mu(x) - \partial^\mu \chi(x).$$

Potentialschreibweise der Maxwell-Gleichungen

durch Einsetzen der Definition des Feldtensors:

$$\begin{array}{rrcl} (\mathrm{ii}') & -\partial_\mu F^{\mu\nu} & = & \partial_\mu F^{\nu\mu} \equiv \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) \\ & & = & \partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\ & & = & \Box A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) = j^\nu; \\ (\mathrm{ii}) & & & \Box A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) = 0. \end{array}$$

Ohne Quellen (im Vakuum) erhält man durch geeignete Wahl der Eichung (Lorentz-Eichung)

$$A^\mu \longrightarrow A^\mu - \partial^\mu \chi,$$

so daß

$$\partial_\mu A^\mu \equiv 0,$$

d.h. Wahl des Feldes $\chi(x)$ so daß

$$\partial_\mu \partial^\mu \chi \equiv \Box \chi = 0,$$

die bekannte Wellengleichung für das elektromagnetische Potential:

$$\Box A^\nu = 0.$$

Jede Komponente von $A^\nu(x)$ erfüllt daher die Klein-Gordon-Gleichung für ein masseloses Teilchen.

Lösungen der freien elektromagnetischen Wellengleichung

sind ein- bzw. auslaufende ebene Wellen

$$
\begin{aligned}
A^{\mu+}(x) &= \frac{1}{\sqrt{V}}\varepsilon_\mu(k,\lambda)e^{-ik_\mu x^\mu}, \\
A^{\mu-}(x) &= \frac{1}{\sqrt{V}}\varepsilon^*_\mu(k,\lambda)e^{ik_\mu x^\mu}
\end{aligned}
$$

mit dem Wellenvektor $k^\mu = p^\mu/\hbar$ mit $k_\mu k^\mu = k^2 = m_\gamma^2 \equiv 0$ und 2 transversalen Polarisationsfreiheitsgraden:

$$
\varepsilon_\mu(\lambda = \pm 1) = (\varepsilon^0, \vec{\varepsilon}) = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, \pm i, 0)
$$

(zirkulare Polarisation mit Helizitäten $\lambda = \frac{\vec{k}\cdot\vec{s}}{|\vec{k}||\vec{s}|} = \pm 1$, $\vec{k}||\hat{z}$).
Aus der Bedingung $\partial_\nu A^\nu = 0$ für die Lorentz-Eichung folgt die Randbedingung $k_\mu \varepsilon^\mu = 0$.

Die Funktion $\chi(x)$ der Lorentz-Eichung kann so gewählt werden, daß auch $\vec{k}\cdot\vec{\varepsilon} = 0$,

d.h. es gibt aufgrund der Eichinvarianz keine longitudinale Polarisation ($\lambda = 0$) der elektromagnetischen Wellen bzw. der masselosen Photonen, sie läßt sich durch Eichtransformation eliminieren.

Die Maxwell-Gleichungen beschreiben also ein Photonfeld mit Spin 1 und Masse 0, das nur zwei Helizitätszustände parallel und antiparallel zum Wellenvektor besitzt.

Die Masselosigkeit des Photons und das Verschwinden des transversalen Helizitätsfreiheitsgrads des 4-Vektorfelds des Photons sind beides miteinander verknüpfte Konsequenzen der Eichfreiheit.

Die elektrisch neutralen Photonen sind mit ihren Antiteilchen identisch.

Der Feldoperator $\widehat{A}^\mu(x)$ des elektromagnetischen Feldes erzeugt und vernichtet Photonzustände, entsprechend den ein- und auslaufenden Photonen im Feynman-Stückelberg-Bild.

Das gleiche gilt für reelle, massive Bosonfelder mit Spin 0 (Higgs-Boson).

Lagrangedichte für das elektromagnetische Feld

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{4}(\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu)(\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu)\end{aligned}$$

ergibt nach den Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\nu} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}\right) = 0$$

die Feldgleichungen im Vakuum und

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - j^\nu A_\nu$$

die Feldgleichungen mit Quellen, wie leicht zu verifizieren ist.

2.1.5.5 Massive Vektorfelder

Durch Einführung eines lorentzinvarianten Masseterms in der Lagrangedichte analog zur Klein-Gordon-Gliechung,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} M^2 A^\nu A_\nu$$

erhält man die Wellengleichung (Proca-Gleichung) für Spin-1 Bosonen mit Masse M (z.B. $W^\pm$, Z^0):

$$\begin{aligned} \partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + M^2 A^\nu &= 0, \\ \Box A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) + M^2 A^\nu &= 0. \end{aligned}$$

Die 4-Divergenz des ersten Terms der Gleichung verschwindet, so daß für massive Vektorfelder immer gilt $\partial_\mu A^\mu \equiv 0$, d.h. die Eichfreiheit ist durch Fixierung der Eichung verloren. Damit gilt für jede Komponente des Feldes $A^\nu(x)$ die Klein-Gordon-Gleichung mit Masse:

$$[\Box + M^2] A^\nu = 0$$

mit der Nebenbedingung $\partial_\mu A^\mu = 0$. Der Massenterm in $\mathcal{L}$ ist offensichtlich nicht invariant unter der Eichtransformation des 4-Potentials.

Um die Eichinvarianz auch für massive Vektorbosonen zu retten, wird der Higgs-Mechanismus mit spontaner Brechung der Eichsymmetrie benötigt.

Die ebenen Wellenlösungen für freie massive Vektorbosonen besitzen im Gegensatz zum Photon 3 Polarisationfreiheitsgrade mit zusätzlicher longitudinaler Polarisation bzw. transversaler Helizität $\lambda = 0$:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_\mu(k; \lambda = \pm 1) &= \mp \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, \pm i, 0); \\
\varepsilon_\mu(k; \lambda = 0) &= \mp \frac{1}{M}(k, 0, 0, E).
\end{aligned}$$

mit $k_\mu = (E, 0, 0, k)$, $k_\mu k^\mu = E^2 - k^2 = M^2$

und $k_\mu \varepsilon^\mu = 0$.

Rekapitulation: Elektromagnetische Wechselwirkung in der klassischen Mechanik:

Die potentielle Energie eines Punktteilchens mit Ladung q im elektromagnetischen Feld ist abhängig von dessen Geschwindigkeit $\vec{v} = \dot{\vec{x}}$:

$$V = e\Phi(x) - qA(\vec{x}) \cdot \vec{v} = qu^\mu A_\mu$$

mit der 4-Geschwindigkeit $u^\mu = (c, \vec{v})$ und $c = 1$.

Damit ist die klassische Lagrangefunktion

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 - q\Phi + q\vec{A}\vec{v}.$$

Die zugehörige generalisierte geschwindigkeitsabhängige Kraft ist die Lorentzkraft

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= -\frac{\partial V}{\partial \vec{x}} + \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \vec{v}} \\
&= -q\vec{\nabla}\Phi - q\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + q\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \\
&= -q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}.
\end{aligned}$$

Der verallgemeinerte kanonische Impuls ist

$$\vec{P} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = m\vec{v} + q\vec{A} = \vec{p} + q\vec{A}.$$

Die Hamiltonfunktion ist

$$
\begin{aligned}
H = E &= \vec{P} \cdot \vec{v} - L \\
&= m\vec{v}^2 + q\vec{A}\vec{v} - \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + q\Phi - q\vec{A}\vec{v} \\
&= \frac{\vec{p}^2}{2m} + q\Phi = \frac{(\vec{P} - q\vec{A})^2}{2m} + q\Phi.
\end{aligned}
$$

Analoges gilt für relativistische Teilchen.

2.2 Eichinvarianz in der Quantenmechanik

Globale Eichinvarianz:

Für Quantenfelder können die Gesetze der elektromagnetischen Wechselwirkung aus einem Eichprinzip hergeleitet werden (H. Weyl 1921, 1929).

Die Erwartungswerte quantenmechanischer Observabler (einschließlich der Lagrangefunktion!)

$$< \mathcal{O} >= \int \psi^* \mathcal{O} \psi$$

sind invariant unter globalen Phasenrotationen der Wellenfunktion

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = e^{i\alpha}\psi(x).$$

Nur relative Phasen zwischen Zuständen sind meßbar.

Die Invarianz der Lagrangefunktion (Forminvarianz der Wellengleichung) unter Phasenrotationen entspricht einer globalen U(1)-Symmetrie, genannt "Eichsymmetrie", die nach dem Noether'schen Theorem zur Erhaltung der Wahrscheinlichkeit und von Ladungen führt.

U(1) ist die Gruppe der unitären Transformationen mit der niedrigsten Dimension 1; Phasenrotationen sind eine Darstellung (Realisierung) der Gruppe auf dem Raum der komplexen Wellenfunktionen.

Lokales Eichprinzip:

Die quantenmechanischen Erwartungswerte sollen invariant sein unter lokaler Phasenwahl der Wellenfunktionen oder Felder, d.h. unabhängig an verschiedenen Raum-Zeit-Punkten:

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = e^{i\alpha(x)}\psi(x).$$

Ortsabhängige Phasentransformationen (lokale Eichtransformationen bedeuten für die Ableitungen der Felder in den Wellengleichungen:

$$\partial_\mu\psi(x) \longrightarrow \partial\psi'(x) = e^{i\alpha(x)}[\partial\psi(x) + i(\partial_\mu\alpha(x))\psi(x).$$

Invarianz der Lagrangedichte und Forminvarianz der Wellengleichungen kann erreicht werden, indem die gewöhnliche Ableitung durch eine eich-kovariante Ableitung ersetzt wird:

$$\partial_\mu \longrightarrow D_\mu \equiv \partial_\mu + iqA_\mu(x),$$

wobei q die elektrische Ladung des Feldes $\psi(x)$ ist und $A_\mu(x)$ das 4-Potential des elektromagnetischen Feldes, das sog. Eichvektorfeld zur Eichgruppe U(1), das unter den Phasenrotationen transformiert wie

$$A_\mu(x) \longrightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x)$$

($\equiv$ Eichtransformation des elektromagnetischen Feldes).

Damit gilt

$$
\begin{array}{lcl}
D_\mu\psi(x) & \longrightarrow & \\
D'_\mu\psi'(x) & = & (\partial_\mu + iqA'_\mu(x))e^{i\alpha(x)}\psi(x) \\
& = & e^{i\alpha(x)}[\partial_\mu + i\partial_\mu\alpha(x) + iqA_\mu(x) - i\partial_\mu\alpha(x)]\psi(x) \\
& = & e^{i\alpha(x)}[\partial_\mu + iqA_\mu(x)]\psi(x) \equiv e^{i\alpha(x)}D_\mu\psi(x)
\end{array}
$$

und $\psi^* D_\mu \psi$ ist invariant unter lokalen Phasentransformationen.

Dies wurde durch die Einführung einer Wechselwirkung für das Feld ψ, der elektromagnetischen Wechselwirkung für die U(1)-Phasentransformationen, erreicht.

Die globale U(1)-Symmetrie der Feldgleichungen für $\psi(x)$ führt zur Erhaltung der elektrischen Ladung, der Quellen des Eichfeldes, auch bei Wechselwirkung mit dem elektromagnetischen Feld. Die Eichfeldgleichungen mit der zugehörigen Eichinvarianz enthalten automatisch Ladungserhaltung.

Die Wechselwirkung (Kopplungsterme zwischen Materiefeld $\psi(x)$ und Eichwechselwirkungsfeld $A_\mu(x)$ ist (eindeutig) festgelegt durch die Forderung der lokalen Phaseninvarianz, das lokale Eichprinzip, d.h. durch die kovariante Ableitung

$$D_\mu\psi(x) = \partial_\mu\psi(x) + iqA_\mu(x)\psi(x)$$

(minimale eichinvariante Kopplung).

Die Ersetzung

$$i\partial_\mu \longrightarrow iD_\mu = i\partial_\mu - qA_\mu$$

entspricht ($p_\mu \longrightarrow i\partial_\mu$) der Ersetzung

$$P_\mu \longrightarrow P_\mu - qA_\mu$$

für den kanonischen Impuls bei Einführung der Wechselwirkung mit dem elektromagnetischen Feld in der klassischen Mechanik.

Beispiel 1:

Elektromagnetische Wechselwirkung zwischen Fermionen (Elektronen) und dem Photonfeld (QED):

Die Lagrangedichte für das freie Dirac-Feld

$$\mathcal{L}_{\text{frei}} = \overline{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi$$

wird ersetzt durch die lokal eichinvariante Form mit minimaler Kopplung

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \overline{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi \\
&= \overline{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - qA_\mu \overline{\psi}\gamma^\mu \psi \\
&= \mathcal{L}_{\text{frei}} - j^\mu A_\mu
\end{aligned}$$

mit dem (erhaltenen) elektromagnetischen Strom $j^\mu = q\overline{\psi}\gamma^\mu\psi$.

Zusammen mit der Lagrangedichte für das freie elektromagnetische Feld ist die Lagrangedichte der Quantenelektrodynamik:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{QED} &= \mathcal{L}^{\text{Photon}}_{\text{frei}} + \mathcal{L}^{\text{Fermion}}_{\text{frei}} + \mathcal{L}_{\text{WW}} \\
&= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \overline{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - j^\mu A_\mu \\
&= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \overline{\psi}i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\overline{\psi}\psi - j^\mu A_\mu \\
&= \mathcal{L}^{\text{Photon}}_{\text{kin}} + \mathcal{L}^{\text{Fermion}}_{\text{kin}} + \mathcal{L}^{\text{Fermion}}_{\text{Masse}} + \mathcal{L}_{\text{WW}} = T - V.
\end{aligned}$$

Die Beiträge zur gesamten Lagrangedichte sind additiv und erfüllen die U(1)-Eichinvarinz.

Beispiel 2:

Elektromagnetische Wechselwirkung zwischen geladenen Spin-0-Bosonen und dem Photonfeld:

Die Lagrangedichte für das freie Klein-Gordon-Feld

$$\mathcal{L}_{\text{frei}} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$$

wird ersetzt durch die lokal eichinvariante Form mit minimaler Kopplung

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + D_\mu \phi^* D^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi \\
&= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi \\
&\quad + iq[\phi^* \partial^\mu \phi - (\partial^\mu \phi^*)\phi] A_\mu + q^2 A_\mu A^\mu \phi^* \phi \\
&= \mathcal{L}_{\text{frei}} - j^\mu A_\mu + q^2 A_\mu A^\mu \phi^* \phi \\
&= \mathcal{L}_{\text{kin}}^{\text{Photon}} + \mathcal{L}_{\text{kin}}^{\text{Boson}} + \mathcal{L}_{\text{Masse}}^{\text{Boson}} + \mathcal{L}_{\text{WW}}.
\end{aligned}$$

Dabei ist $j^\mu = iq[\phi^* \partial^\mu \phi - (\partial^\mu \phi^*)\phi]$ der erhaltene elektromagnetische Strom für die freien Bosonen.

Nach dem Noether-Theorem hat der erhaltene Strom für die an das Photonfeld koppelnden Bosonen eine andere Form. Der Wechselwirkungsterm erhält einen zusätzlichen Beitrag in der Form einer Kontaktwechselwirkung zwischen Photonen und Materie-Bosonen (eich- und lorentzinvariant).