2.3 Symmetrien und Gruppen

2.3.1 Rekapitulation: Symmetrien in der Quantenmechanik

Symmetrietransformationen der Wellenfunktion lassen die Schrödingergleichung

$$i\frac{\partial\psi(\vec{x},t)}{\partial t} = \widehat{H}\psi(\vec{x},t)$$

invariant, d.h. die transformierten Zustände

$$\psi'(\vec{x},t) = \widehat{U}\psi(\vec{x},t)$$

erfüllen die gleiche Schrödingergleichung, wenn der Hamiltonoperator $\widehat{H}$ invariant ist unter den Transformationen:

$$\widehat{U}\widehat{H}\widehat{U}^\dagger \equiv \widehat{H},$$

d.h. Hamiltonoperator und Transformationsoperator $\widehat{U}$ vertauschen:

$$[\widehat{H},\widehat{U}] = 0.$$

Die Transformationsoperatoren auf dem Hilbertraum der Wellenfunktionen sind unitäre Transformationen, $UU^\dagger = U^\dagger U = 1$, damit die Erhaltung der Wahrscheinlichkeit gewährleistet ist, d.h. der Betrag der Wellenfunktion ändert sich nicht.

Beispiele für Symmetrietransformationen der Wellenfunktion ("Rotationen im Hilbertraum"):

1. Zeittranslationen: $\widehat{U} = e^{-i\widehat{H}t}$

   Infinitesimal:
   $$\psi'(\vec{x},t) = (1 - i\widehat{H}\delta t)\psi(\vec{x},t) = \psi(\vec{x},t) + \frac{\partial\psi(\vec{x},t)}{\partial t}\delta t.$$

2. Räumliche Translationen: $\widehat{U} = e^{-i\widehat{\vec{p}}\cdot\vec{x}}$

   Infinitesimal:
   $$\psi'(\vec{x},t) = (1 - i\widehat{\vec{p}}\cdot\delta\vec{x})\psi(\vec{x},t) = \psi(\vec{x},t) - \delta\vec{x}\cdot\vec{\nabla}\psi(\vec{x},t).$$

3. Rotationen im Raum: $\widehat{U} = e^{-i\widehat{\vec{J}}\cdot\vec{\alpha}}$

   Infinitesimal:
   $$\psi'_\beta(\vec{x},t) = (1 - i\widehat{\vec{J}}_{\beta\gamma}\cdot\delta\vec{\alpha})\psi_\gamma(\vec{x},t).$$

Die infinitesimalen (unitären) Transformationen werden durch die (hermiteschen) Operatoren der konjugierten Observablen (Energie$\leftrightarrow$ Zeit, Impuls$\leftrightarrow$ Ort, Drehimpuls$\leftrightarrow$ Drehwinkel) "erzeugt": Generatoren der Transformationen.

- Die unitären Symmetrietransformationen auf dem Hilbertraum (Phasentransformationen der Wellenfunktion) haben Gruppeneigenschaften mit der Hintereinanderausführung als Gruppenoperation.

  Sie sind spezielle Realisierungen (Darstellungen) der (kontinuierlichen) Symmetriegruppen der Raum- und Zeittranslationen, der räumlichen Rotationen usw.

- Operatoren $\widehat{O}$, die mit dem Hamiltonoperator vertauschen, sind Konstanten der Bewegung und entsprechen erhaltenen Observablen, d.h.

$$i\frac{d\widehat{O}}{dt} = [\widehat{H}, \widehat{O}] = 0.$$

- Observable, die mit dem Hamiltonoperator vertauschen, lassen sich gleichzeitig mit ihm diagonalisieren, d.h. die Eigenzustände von $\widehat{H}$ (stationäre Lösungen der Schrödingergleichung) sind gleichzeitig Eigenzustände von Impuls, Drehimpuls usw. mit festen Eigenwerten.

  Symmetrieoperationen, die mit dem Hamiltonoperator vertauschen, führen zur Entartung der Energieeigenzustände des Hamiltonoperators, d.h. die Eigenzustände zu festen Energieeigenwerten bilden unter den Symmetrietransformationen invariante Unterräume des Hilbertraums (Eigenräume zu den Darstellungen der Symmetrietransformationen mit bestimmter Dimension).

  Die Symmetrieeigenschaften des Hamiltonoperators und Erhaltungssätze erleichtern damit, wie in der klassischen Mechanik, die Lösung der Schrödingergleichung und die Bestimmung der Eigenzustände (orthonormale Basen der Eigenräume).

Beispiel: Drehimpulserhaltung:

- $[\vec{J}, H] = 0$

- $\left.\begin{array}{l} [J_x, J_y] = iJ_z \\ [J_y, J_z] = iJ_x \\ [J_z, J_x] = iJ_y \end{array}\right\} \quad [J_i, J_j] = i\sum_k \varepsilon_{ijk} J_k \quad (i,j,k = x,y,z)$

mit

$$\varepsilon_{i,j,k} = \begin{cases} 0, & \text{2 gleiche Indizes} \\ +1, & \text{Indizes gerade Permutation von } x,y,z \\ \text{-1}, & \text{Indizes ungerade Permutation von } x,y,z. \end{cases}$$

Mit $\vec{J}^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$ gilt:

- $[\vec{J}, \vec{J}^2] = 0,$

d.h. gemeinsame Eigenzustände von J_i und $\vec{J}^2$. Spezielle Wahl: J_z und $\vec{J}^2$ bei Spinquantisierungsrichtung in z-Richtung.

J_x, J_y, J_z sind die Erzeugenden (Generatoren) der Drehgruppe $O(3)$, d.h. der Gruppe aller Drehungen im dreidimensionalen Raum, die aus Drehungen um drei unabhängige Achsen zusammengesetzt werden können (3 Euler-Winkel).

Eine Darstellung (Realisierung) der Drehgruppe $O(3)$ sind reelle orthogonale 3×3-Drehmatrizen, die auf die Vektoren im Raum drehen, ohne ihren Betrag zu ändern, und durch $9 - 6 = 3$ unabhängige Parameter (z.B. die Euler-Winkel) beschrieben werden.

Die Gruppe $O(3)$ läßt sich auf die Gruppe $SU(2)$ abbilden; beide Gruppen sind verwandt in dem Sinne, daß die kleinen Transformationen und die Generatoren identisch sind.

Die definierende (und fundamentale) Darstellung der $SU(2)$-Gruppe sind die komplexen unitären 2×2-Matrizen mit Determinante $= 1$, die ebenfalls durch $3 = 8 - 5$ unabhängige Parameter beschrieben werden.

Allgemein:

Die Gruppe $SU(N)$ der speziellen unitären Transformationen (Transformationen mit $U^\dagger U = 1$ und Det(U)$= 1$) in N Dimensionen besitzt $2N^2 - N^2 - 1 = N^2 - 1$ Parameter und ebensoviele Generatoren. Die Generatoren sind hermitesch und quantenmechanische Observable (z.B. "Ladungen" zu inneren Symmetrien der Teilchen).

Alternative Variable:

- $J^+ = J_x + iJ_y, \quad J^- = J_x - iJ_y$

mit

- $[J_z, J^+] = J^+, \quad [J_z, J^-] = -J^-$
- $[J+, J^-] = 2J_z$

und damit

- $[\vec{J}^2, J^\pm] = 0.$

Es gilt: $\vec{J}^2 = \frac{1}{2}(J^+J^- + J^-J^+) + J_z^2.$

Eigenzustände der Drehimpulsoperatoren:

Simultan:

$$
\begin{aligned}
\vec{J}^2|j,m> &= j(j+1)|j,m>, \\
J_z|j,m> &= m|j,m>,
\end{aligned}
$$

definiert $(2j+1)$-dimensionale Eigenräume des Drehimpulses (und damit Hamiltonoperators) zu den Eigenwerten $j = 0, 1/2, 1, 3/2, \ldots$ und $m = -j, -j+1, \ldots, j-1, j$ von $\vec{J}^2$ und J_z (Singuletts, Dubletts, Tripletts usw.).

$J^{\pm}$ sind Auf- und Absteigeoperatoren in jedem Eigenraum:

$$
\begin{aligned}
J^+|j,m> &= |j,m+1> \quad (m<j), \\
&= 0 \quad (m=j), \\
J^-|j,m> &= |j,m-1> \quad (m>-j), \\
&= 0 \quad (m=-j).
\end{aligned}
$$

Beispiel:

Spin $\frac{1}{2}$-Zustände mit Eigenwerten $j = 1/2$, $m = \pm 1/2$.

3 unabhängige hermitesche 2×2-Spinmatrizen mit Spur $= 0$ (entspricht Determinante $= 1$ für die von ihnen erzeugten Rotationsmatrizen), die Pauli'schen Spinmatrizen:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{\sigma}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot I.$$

in der Pauli-Darstellung, in der die Eigenwerte (s.o.) zur Eigenvektorbasis

$$\begin{aligned} |\frac{1}{2}, +\frac{1}{2} > &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} > &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

evident sind, d.h. mit $\vec{J} \equiv \frac{1}{2}\vec{\sigma}$ gilt

$$\begin{aligned} \vec{J}^2 \, |\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2} > &= \frac{3}{4} \, |\frac{1}{2}, +\frac{1}{2} >, \\ J_z \, |\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2} > &= \pm\frac{1}{2} \, |\frac{1}{2}, +\frac{1}{2} > . \end{aligned}$$

Die Auf- und Absteigeoperatoren reduzieren sich auf Projektionsoperatoren auf die beiden Zustände Spin up/down:

$$
\begin{aligned}
J^{+} = \frac{1}{2}(\sigma_x + i\sigma_y) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
J^{-} = \frac{1}{2}(\sigma_x - i\sigma_y) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

2.3.2 Gruppentheorie: Grundlagen der Lie-Gruppen

Relevante Symmetriegruppen für innere Symmetrien der Teilchen und Eichsymmetrien:

Unitäre Transformationen (QM) und kontinuierlich erzeugte Transformationen, die sich aus infinitesimal kleinen Transformationen nahe der Einheitstransformation I,

$$g(\delta\alpha) = I + i\delta\alpha^a T^a + \mathcal{O}(\delta\alpha^2),$$

zusammensetzen lassen.

α^a sind die unabhängigen Gruppenparameter ("Winkel") und T^a hermitesche Operatoren, die Erzeugenden oder Generatoren der Gruppe.

Alle Gruppenelemente werden erzeugt in der Form

$$g(\alpha) = e^{i\alpha^a T^a}.$$

Die Transformationen sind unitär, wenn die Generatoren hermitesch sind.

Kontinuierliche Gruppen dieser Art heißen Lie-Gruppen.

Die Generatoren einer Lie-Gruppe spannen einen Vektorraum auf und erfüllen die Vertauschungsrelation

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c$$

mit den Strukturkonstanten f^{abc}, die für die Symmetriegruppe spezifisch sind.

Mit der Vertauschung als zusätzlicher Operation bilden die Generatoren eine sog. Lie-Algebra.

Aufgrund der Vertauschunsgrelation und der identischen Beziehung

$$[T^a, [T^b, T^c]] + [T^b, [T^c, T^a]] + [T^c, [T^a, T^b]] \equiv 0$$

gilt für die Strukturkonstanten die Jacobi-Identität:

$$f^{ade} f^{bcd} + f^{bde} f^{cad} + f^{cde} f^{abd} \equiv 0.$$

Nur, wenn für die Vertauschungsrelation der Basiselemente der Algebra, die Jacobi-Identität erfüllt ist, ist die Algebra eine Lie-Algebra.

Die Lie-Algebra definiert die Symmetriegruppe eindeutig für kleine Transformationen nahe der Einheitstransformation. Die kovariante Ableitung und damit die Lagrangefunktion der lokalen Eichfeldtheorien hängt nur von den infinitesimalen Transformationen und damit nur von der Lie-Algebra der Generatoren ab.

Klassifizierung der Lie-Gruppen und Lie-Algebren:

Lie-Algebren mit endlicher Zahl von Generatoren heißen kompakt, da die Elemente der zugehörigen Lie-Gruppe eine kompakte Mannigfaltigkeit mit Dimension $=$ Zahl der Generatoren bilden.

Z.B. $U(1)$ einen 1-dimensionalen Kreis in der komplexen Ebene, $SU(2)$ eine 3-dimensionale Kugeloberfläche.

Die kommutative oder Abelsche Lie-Gruppe ist die Gruppe U(1) der unitären 1-dimensionalen Phasentransformationen
$\psi \rightarrow e^{i\alpha}\psi$.

Allgemeine Lie-Algebren lassen sich als Summe einfacher Lie-Algebren und kommutativer Lie-Algebren zu $U(1)$ darstellen, die nicht weiter in Summanden zerlegt werden können.

Die einfachen, kompakten Lie-Algebren lassen sich in 4 Klassen einteilen, die durch Transformationsgruppen definiert sind:

1. Spezielle unitäre Transformationen U N-dimensionaler Vektoren: $SU(N)$,

   mit $U^\dagger U = 1$ und $\text{Det}(U) = 1$. Sie erhalten das komplexe Betragsquadrat der Vektoren.

   Die Generatoren $T = T^\dagger$ lasssen sich darstellen als hermitesche $N \times N$-Matrizen mit $\text{Spur}(T) = 0$. Es gibt $N^2 - 1$ unabhängige Matrizen dieser Art und damit Generatoren.

2. Reelle orthogonale Transformationen O N-dimensionaler Vektoren: $SO(N)$,

   mit $O^T O = 1$ und Det$(O) = 1$. Sie erhalten das reelle Betragsquadrat der Vektoren.

   $SO(N)$ besitzt $N(N-1)/2$ Generatoren.

3. Symplektische Transformationen N-dimensionaler Vektoren: $Sp(N)$.

4. Exzeptionelle Lie-Algebren: G_2, F_4, E_6, E_7 und E_8.

Bisher wurden $SU(N)$ und E_6 und E_8 als Symmetrien für Eichwechselwirkungen im Standardmodell und seine Erweiterungen in Betracht gezogen.

2.3.3 Gruppentheorie: Darstellungen von Gruppen

Die Darstellung einer Gruppe G ist definiert als die Abbildung auf eine Gruppe T linearer Transformationen

$$\theta : G \longrightarrow T$$

mit

$$s \in G \longrightarrow D(s) \in T,$$

wobei $D(s)$ eine lineare Transformation auf einem N-dimensionalen Vektorraum V ist, so daß

$$s \cdot t \longrightarrow D(s) \cdot D(t).$$

Es gilt dann $D(e) = I$ und $D(s^{-1}) = D^{-1}(s)$.

Der Vektorraum V ist der Darstellungsraum. Seine Dimension ist die Dimension der Darstellung.

Nach Wahl einer Basis im Darstellungsraum können die linearen Transformationen als $N \times N$-Matrizen dargestellt werden.

Fundamentale Darstellungen sind diejenigen mit der niedrigsten Dimension > 1 (nicht Singulett).

Bei der adjungierten Darstellung einer Lie-Gruppe, wird der Darstellungsraum von den Generatoren der Gruppe aufgespannt.

Bei reduziblen Darstellungen kann der Darstellungsraum in invariante Unterräume zerlegt werden, die (bei unitären Darstellungen) zueinander orthonormale Basen besitzen.

Irreduzible Darstellungen transformieren auf invarianten Darstellungsräumen, die nicht in kleinere invariante Unterräume zerlegt werden können.

Die Suche nach Eigenvektoren und Eigenwerten der Symmetrieoperatoren entspricht der Konstruktion irreduzibler Darstellungen der Symmetriegruppen.

Die Felder der Elementarteilchen müssen nach unitären Darstellungen der Symmetriegruppen der Lagrangefunktion transformieren. Sie gehören Multipletts, den N-dimensionalen Eigenräumen bzw. irreduziblen Darstellungsräumen, der Symmetrietransformationen an.

Für die Lie-Gruppen $SU(N)$ können die Multipletts (irreduzible Darstellungen) aufgrund der Vertauschungsrelationen mit Hilfe der Auf- und Absteigeoperatoren konstruiert werden; siehe Drehimpuls.

Da die Hamiltonfunktion mit dem Masseoperator (kinetische Energie) mit dem Drehimpuls und den Operatoren für andere innere Symmetrien vertauscht, müssen alle Teilchenzustände eines Multipletts einer inneren Symmetrie die gleiche Masse und den gleichen Spin besitzen; andernfalls ist die Symmetrie mehr oder minder gebrochen.

Ausnahme ist die Supersymmetrie, die Bosonen und Fermionen in gemeinsamen Super-Multipletts vereinigt. Die Fermion- und Bosonzustände innerhalb eines Super-Multipletts werden durch die SUSY-Transformationen ineinander übergeführt. Dies ist nur möglich durch eine Erweiterung der Raum-Zeit-Symmetrien in einer neune Symmetriegruppe.

Beispiele innerer Symmetrien:

1. $U(1)$-Phasentransformationen der Wellenfunktionen (Wahrscheinlichkeitserhaltung und Erhaltung der elektrischen Ladung).

2. Isospinsymmetrie $SU(2)$, analog zur räumlichen Drehimpuls- und Spinsymmetrie.

   Fundamentale Dublettdarstellung:

$$\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \text{ bzw. } \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}.$$

3. Schwache Isopsinsymmetrie $SU(2)_W$, Eichsymmetrie der schwachen Wechselwirkung:

   Fundamentale Dublettdarstellung: Quark- und Lepton-Dubletts.

   Fermionen und Antifermionen befinden sich in der gleichen Darstellung und besitzen daher die gleichen schwachen ladungen.

   Die Eichbosonen (W^+, Z^0, W^-) bilden die adjungierte Darstellung entsprechend den drei Generatoren der $SU(2)$; die Triplett-Darstellung sit analog zur Spin 1-Darstellung.

4. $SU(3)$ flavour-Symmetrie der Quarks: Quarkmodell

   Es gibt zwei verschiedene fundamentale Triplett-Darstellungen: (u, d, s) und $(\bar{u}, \bar{d}, \bar{s})$.

Quarks und Antiquarks sind in verschiedenen (zueinander konjugierten) Multipletts.

Die Multipletts der Mesonen und Baryonen werden durch Produkte der fundamentalen Darstellungen und Zerlegen in irreduzible Unterräume (Ausreduzieren) gewonnen, z.B.

$$3 \otimes \bar{3} = 1 \oplus 8,$$

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10.$$

$$\bar{3} \otimes \bar{3} \otimes \bar{3} = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10.$$

Baryonen und Antibaryonen (qqq) befinden sich in unterschiedlichen Multipletts, während Mesonen und Antimesonen $(q\bar{q})$ in den gleichen Multipletts auftreten.

5. $SU(3)_C$ Farbsymmetrie der Quarks: QCD

Die $SU(3)$-Gruppe besitzt $N^2 - 1 = 9 - 1 = 8$ Generatoren. Die adjungierte Oktett-Darstellung enthält die 8 Gluonen.

Die beiden fundamentalen Triplett-Darstellungen enthalten die drei Farbzustände der Quarks und die drei Antifarbzustände der Antiquarks ($\Psi_q = \psi_q \cdot \chi_C$):

$$\chi_C = \begin{pmatrix} q_\mathrm{r} \\ q_\mathrm{g} \\ q_\mathrm{b} \end{pmatrix} ; \chi_r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \chi_g = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \chi_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Die farbneutralen Mesonen und Baryonen treten in $SU(3)$ colour-Singuletts auf:

$$\pi^+ = \frac{1}{\sqrt{3}}(u_r \bar{d}_{\bar{r}} + u_g \bar{d}_{\bar{g}} + u_b \bar{d}_{\bar{b}}).$$

(Farbsingulettzustand 1_C aus der Darstellung $3_C \otimes \overline{3}_C = 1_C + 8_C$) oder

$$\chi_C(\Delta^{++}) = \frac{1}{\sqrt{6}} \varepsilon_{ijk} u_i \, u_j \, u_k$$

für die Resonanz $\Delta^{++} = (u \uparrow u \uparrow u \uparrow)$ mit $J^P = \frac{3}{2}^+$ und $L = 0$

(Farbsingulettzustand 1_C aus der Darstellung $3_C \otimes 3_C \otimes 3_C = 1_C + 8_C + 8_C + 10_C$).

Die Generatoren der $SU(3)$-Gruppe haben in der fundamentalen 3-dimensionalen Darstellung die Form (Gell-Mann-Matrizen):

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \ \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (g \longleftrightarrow r)$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \ \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (r \longleftrightarrow b)$$

$$\lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \ \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad (b \longleftrightarrow g)$$

$$\lambda_3 = \begin{array}{c c} \begin{array}{ccc} r & g & b \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \bar{r} \\ \bar{g} \\ \bar{b} \end{array} \end{array} \quad (\text{koppelt} \ \ r\bar{r}, -g\bar{g})$$

$$\lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{array}{c c} \begin{array}{ccc} r & g & b \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \bar{r} \\ \bar{g} \\ \bar{b} \end{array} \end{array} \quad (\text{koppelt} \ \ r\bar{r}, g\bar{g}, -2b\bar{b}).$$

Es lassen sich folgende 3 Schiebeoperatoren für die Erzeugung der Multipletts (analog zu $SU(2)$) definieren, deren Wirkung in den fundamentalen Tripletts in der obigen Darstellung der λ-matrizen offensichtlich ist:

$$I_C^{\pm} = \frac{1}{2}(\lambda_1 \pm i\lambda_2); \quad (\text{Transformation} \ \ g \longleftrightarrow r),$$

$$V_C^{\pm} = \frac{1}{2}(\lambda_4 \mp i\lambda_5); \quad (\text{Transformation} \ \ r \longleftrightarrow b),$$

$$U_C^{\pm} = \frac{1}{2}(\lambda_6 \pm i\lambda_7); \quad (\text{Transformation} \ \ b \longleftrightarrow g).$$