2.4 Nicht-Abelsche Eichsymmetrien

Erweiterung der Isospinsymmetrie $SU(2)$ zu einer lokalen Eichsymmetrie
(Yang, Mills 1954):

Freie Lagrangefunktion für Nukleonen (Proton, Neutron):

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi} I (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi.$$

Proton und Neutron bilden dabei ein Isotopenspindublett (2-dimensionale Darstellung der Isospingruppe).

$$\psi = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}.$$

Beide Fermionfelder $p(x)$ und $n(x)$ sind jeweils 4-Spinoren.

Die freie Lagrangefunktion ohne Wechselwirkung ist diagonal im 2-dimensionalen Isospinraum (2-dim. Einheitsmatrix I) und invariant unter globalen Isospinrotationen

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = e^{i\vec{\alpha}\cdot\vec{I}}\psi(x) = e^{i\vec{\alpha}\cdot\vec{\tau}/2}\psi(x),$$

wobei $\vec{\tau}$ der 3-Isovektor der Pauli'schen 2×2 Spinmatrizen ist (die drei Generatoren der Isospingruppe $SU(2)$, $\vec{I} = \vec{\tau}/2$, in der fundamentalen 2-dimensionalen Darstellung; Bezeichnung $\vec{\tau}$ statt $\vec{\sigma}$ für den Isospin).

Wie bei der $U(1)$-Symmetrie der elektromagnetischen Wechselwirkung:

Übergang zu einer lokalen $SU(2)$-Eichsymmetrie, d.h. Forderung nach Invarianz der Lagrangefunktion und Feldgleichungen unter lokalen Eichtransformationen

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = e^{i\vec{\alpha}(x)\cdot\vec{\tau}/2}\psi(x) \equiv G(x)\psi(x).$$

Damit transformiert der 4-Gradient des Feldes wie

$$\partial_\mu\psi(x) \longrightarrow G(x)(\partial_\mu\psi'(x)) + (\partial_\mu G(x))\psi(x).$$

$\Longrightarrow$ Einführen einer kovarianten Ableitung (kovariant unter den lokalen Eichtransformationen $G(x)$):

$$D_\mu(x) = I\partial_\mu + igB_\mu(x)$$

mit der 2×2-Einheitsmatrix I auf dem Isospinraum und einer Kopplungskonstanten g, die die Stärke der Eichwechselwirkung angibt.

Das Eichvektorfeld $B_\mu(x)$ ist eine 2×2-Matrix auf dem Isospinraum, definiert durch ($a = 1, 2, 3$):

$$
\begin{aligned}
B^\mu(x) &= \frac{1}{2}\vec{\tau} \cdot \vec{b}^\mu(x) = \frac{1}{2}\tau_a b_a^\mu(x) \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} b_3^\mu(x) & b_1^\mu(x) - i b_2^\mu(x) \\ b_1^\mu(x) + i b_2^\mu(x) & -b_3^\mu(x) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

mit dem Isovektor $\vec{b}_\mu = (b_1^\mu, b_2^\mu, b_3^\mu)$ der drei Eichvektorfelder $b_i(x)$, die den drei Generatoren (Ladungsoperatoren) der $SU(2)$-Eichsymmetrie $\vec{I} = \vec{\tau}/2$ entsprechen.

Um die lokale nicht-Abelsche $SU(2)$-Eichsymmetrie zu erhalten, müssen also 3 neue Eichvektorpotentiale eingeführt werden, die 3 Eichbosonfeldern entsprechen, die die Eichwechselwirkungen vermitteln.

(Dies erinnert an die 3 Austauschteilchen $W^\pm$ und Z^0 der schwachen Wechselwirkung, die ebenfalls globale $SU(2)$-Symmetrie besitzt, aber an Quark- und Leptonfelder koppelt.)

Die kovariante Ableitung soll unter lokalen Eichtransformationen ebenso transformieren wie die Felder, um die lokale Eichinvarianz der Lagrangefunktion zu gewährleisten, d.h.

$$D_\mu \psi \longrightarrow D'_\mu \psi' = G(x)(D_\mu \psi).$$

Diese Forderung definiert das Transformationsverhalten der Eichvektorfelder:

$$
\begin{aligned}
D'_\mu \psi' &= (\partial_\mu + igB'_\mu)\psi' \\
&= G(\partial_\mu \psi) + (\partial G)\psi + igB'_\mu (G\psi) \\
&\equiv G(\partial_\mu + igB_\mu)\psi \\
&= G(\partial_\mu \psi) + igG(B_\mu \psi)
\end{aligned}
$$

und damit

$$
igB'_\mu (G\psi) = igG(B_\mu \psi) - (\partial_\mu G)\psi
$$

für beliebige Werte des Nukleonfelds ψ, d.h. nach Multiplizieren mit G^{-1}:

$$
\begin{aligned}
B'_\mu &= GB_\mu G^{-1} + \frac{i}{g}(\partial_\mu G)G^{-1} \\
&= G\left[B_\mu + \frac{i}{g}G^{-1}(\partial_\mu G)\right]G^{-1}.
\end{aligned}
$$

Dies ist die nicht-Abelsche Verallgemeinerung der $U(1)$-Eichtransformation des elektromagnetischen Potentials (Isoskalar), die analog lautet:

$$
\begin{aligned}
A'_\mu &= G_{EM} A_\mu G_{EM}^{-1} + \frac{i}{q}(\partial_\mu G_{EM})G_{EM}^{-1} \\
&\equiv A_\mu - \partial_\mu \alpha(x)
\end{aligned}
$$

mit der lokalen $U(1)$-Eichtransformation

$$
G_{EM}(x) = e^{iq\alpha(x)}.
$$