1.3 Grundlagen der relativistischen Feldtheorie

1.3.1 Notation und Konventionen

1. Wirkungsquantum $\hbar = 1$, Lichtgeschwindigkeit $c = 1$.

2. 4-Vektoren:

   Raum-Zeit-Koordinaten:

   Kontravariante Koordinaten:

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z).$$

   Kovariante Koordinaten:

$$\begin{aligned} x_\mu &= (x_0, x_1, x_2, x_3) = (t, -x, -y, -z), \\ x_\mu &= g_{\mu\nu} x^\nu \equiv \sum_\nu g_{\mu\nu} x^\nu. \end{aligned}$$

   mit dem metrischen Tensor der Minkowsky-Raum-Zeit:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \equiv g^{\mu\nu},$$

$$g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 4; \quad g_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu} = g^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}$$

und Summation über wiederholte Indizes.

3. **Skalarprodukt (invariant):**

$$x^2 \equiv x^{\mu} x_{\mu} = t^2 - \vec{x}^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2.$$

4. **Energie-Impuls-Vektor:**

$$\begin{aligned} p^{\mu} &= (E, \vec{p}) = (E, p_x, p_y, p_z), \\ p_{\mu} &= (E, -\vec{p}) = (E, -p_x, -p_y, -p_z), \end{aligned}$$

$$p^2 \equiv p^{\mu} p_{\mu} = E^2 - \vec{p}^2 = m^2.$$

5. **Differentialoperatoren:**

$$\begin{aligned} \partial_{\mu} &\equiv \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right), \\ \partial^{\mu} &\equiv \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right). \end{aligned}$$

6. Quantenmechanische Operatoren:

4-Impuls: $\widehat{p}^{\mu} = i\partial^{\mu} = i\frac{\partial}{\partial x_{\mu}} = (i\frac{\partial}{\partial t}, -i\vec{\nabla})$,

$$\widehat{p}^{\mu}\widehat{p}_{\mu} = -\partial^{\mu}\partial_{\mu} = -\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2\right) = -\Box$$

mit dem d'Alembert-Operator $\Box = \partial^{\mu}\partial_{\mu}$.

1.3.2 Klassische Feldtheorie und Quantenfeldtheorie

Klass. Mechanik Hamilton'sche Bewegungsgleichungen	$\longrightarrow$	Klass. QM Schrödingergleichung (Einteilchenzustände)	$\longrightarrow$	Vielteilchensysteme: 2. Quantisierung (Vielteilchengrundzustand + Anregungen)
		$\downarrow$ Lorentzinvarianz		
Relativistische Mechanik	$\longrightarrow$	Relativistische Wellengleichungen ($\rightarrow$ Antiteilchen)	$\longrightarrow$	Vielteilchensysteme: Feldquantisierung (Vakuumgrundzustand + Teilchenanregungen)

Die Maxwell-Gleichungen sind das erste Bespiel einer relativistischen Feldtheorie.

Die Lorentz-Symmetrie wurde anhand der Maxwell-Gleichungen entdeckt. Sie vereinheitlicht Raum und Zeit sowie Elektrizität und Magnetismus.

Die erste Quantenfeldtheorie war die QED mit elektromagnetisch gekoppelten Quantenfeldern für elektrisch geladene Materie und elektromagnetisches Feld (Photonen). Sie ist das Muster für alle anderen Wechselwirkungen des Standardmodells.

1.3.3 Lagrange-Formalismus in der Feldtheorie

1.3.3.1 Lagrange-Formalismus in der klass. Mechanik

Nach dem Hamiltonschen Prinzip der kleinsten Wirkung in der klassischen Mechanik (siehe z.B. Goldstein: Klassische Mechanik) erhält man die Bewegungsgleichungen durch Variation des Wirkungsintegrals

$$S \equiv \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_i, \dot{q}_i), \tag{1}$$

mit der Lagrangefunktion $L(q_i, \dot{q}_i) = T - V$ als Funktion der verallgemeinerten Koordinaten $q_i(t)$ und ihrer Ableitungen $\dot{q}_i$ $(i = 1, \ldots n)$, aus der Bedingung

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_i, \dot{q}_i) = 0, \tag{2}$$

wobei die Koordinaten an den Endpunkten t_1 und t_2 festgehalten werden.

Die Bewegungsgleichungen liefern die Trajektorien $q_i(t)$, für die die Wirkung S minimal (stationär) wird.

Die Bewegungsgleichungen sind die Euler-Lagrange-Gleichungen:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \qquad (3)$$

Kurze Herleitung:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i(t)}\delta q(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(t)}\delta \dot{q}_i(t)\right].$$

Partielle Integration des 2. Terms mit $\delta \dot{q}_i(t) = \frac{d}{dt}\delta q_i(t)$ ergibt

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} dt \, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \frac{d}{dt}\delta q_i &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i \\ &= -\int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i,\end{aligned}$$

die 2. Zeile wegen der Randbedingung $\delta q_i(t_1) = 0 = \delta q_i(t_2)$,

und damit

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i(t)} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q.$$

<u>$\delta S = 0$ gilt, falls die Euler-Lagrange-Gleichungen erfüllt sind.</u>

Ergänzung:
Im Lagrange-Formalismus der klassischen Mechanik sind die zu den verallgemeinerten Koordinaten kanonisch konjugierten verallgemeinerten Impulse definiert durch

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}.$$

Verallgemeinerte Kräfte sind gegeben durch

$$F_i \equiv \frac{\partial L}{\partial q_i}.$$

Damit sind die Euler-Lagrange-Gleichungen:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} p_i - F_i = 0,$$

d.h. die Gleichungen beschreiben das Newtonsche Gesetz

$$F_i = \dot{p}_i.$$

Die Hamiltonfunktion ist definiert durch:

$$H(q_i, p_i) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L.$$

1.3.3.2 Anwendung des Lagrange-Formalismus in der Feldtheorie

(siehe z.B. Landau, Lifshitz: Band II, Klassische Feldtheorie)

Die Feldgleichungen ergeben sich durch Variation der klassichen Wirkung

$$S \equiv \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \tag{4}$$

mit der Lagrangedichte $\mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x))$ als Funktion des Feldes $\phi(x)$ (Kontinuum unendlich vieler Variabler) und seines 4-Gradienten $\partial_\mu \phi(x)$, die die Rolle der Lagrangefunktion

$$L = \int d^3x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = T - V$$

übernimmt.

Das Hamilton-Prinzip, $\delta S = 0$ mit $\delta\phi(t_1, \vec{x}) = 0 = \delta\phi(t_2, \vec{x})$, ist erfüllt, wenn die Euler-Langrage-Bewegungsgleichungen

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi(x))} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi(x)} = 0 \tag{5}$$

erfüllt sind.

Die Feldgleichungen sind relativistisch kovariant, wenn die Lagrangedichte lorentzinvariant, also ein Lorentzskalar ist. Wegen der Randbedingung ändern sie sich nicht, wenn eine totale Divergenz $\partial_\mu A$ zur Lagrangedichte addiert wird.

Die Symmetrien der Feldgleichungen ergeben sich aus den Symmetrien der Lagrangedichte.

Die Quantenzahlen der Elementarteilchen und ihre Wechselwirkungen sind durch Symmetrien der Lagrangedichte bestimmt.