2. Symmetrien der Elementarteilchen

2.1 Diskrete Symmetrien

Symmetrien der freien Teilchen (Beispiel: Fermionen) und der elektromagnetischen und starken, nicht der schwachen Wechselwirkung:

1. Parität P (Raumspiegelung):

   $\vec{x} \longrightarrow -\vec{x}$, $\vec{p} \longrightarrow -\vec{p}$.

   $$\psi(t,\vec{x}) \longrightarrow \psi^P(t,-\vec{x}) = \eta_P \gamma^0 \psi(t,\vec{x})$$

   erfüllt die raumgespiegelte Dirac-Gleichung.

2. Zeitinversion T: $t \longrightarrow -t$.

   $$\psi(t,\vec{x}) \longrightarrow \psi^T(-t,\vec{x}) = i\gamma^1\gamma^3\psi^*(t,\vec{x})$$

   erfüllt die zeitgespiegelte Dirac-Gleichung.

3. Ladungskonjugation C:

   Teilchen $\longrightarrow$ Antiteilchen, $Q_f \longrightarrow -Q_f$.

   $$\psi(t,\vec{x}) \longrightarrow \psi^C(t,\vec{x}) = i\eta_C\gamma^2\psi^*(t,\vec{x})$$

   erfüllt die konjugierte Dirac-Gleichung.

$\Longrightarrow$ CPT-Symmetrie,

$\Longrightarrow$ gleiche Lebensdauern und Massen von Teilchen und Antiteilchen.

CPT-Erhaltung gilt allgemein für jede lokale, lorentzinvariante Feldtheorie mit $\mathcal{L}^\dagger = \mathcal{L}$ und Spin-Statistik-Relation (und damit für alle Wechselwirkungen).

(Schwinger 1951, Pauli 1955, Lüders 1957).

Skalare wie $\overline{\psi}\psi$ sind invariant unter Raumspiegelung.

Pseudoskalare wie $\overline{\psi}\gamma^5\psi$ wechseln das Vorzeichen unter Raumspiegelung.

(4-) Vektoren wie $\overline{\psi}\gamma^\mu\psi$ (Strom): Zeitkomponente erhalten, Richtungsumkehr der Raumkomponente bei Raumspiegelung.

(4-) Axialvektoren wie $\overline{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi$: Raumkomponente erhalten, Vorzeichenwechsel der Zeitkomponente bei Raumspiegelung.

Erhaltene Quantenzahlen bei der elektromagnetischen und starken Wechselwirkung:

- Leptonflavour,
- Quarkflavour,

und auch bei der schwachen Wechselwirkung:

- Leptonzahl,
- Leptongenerationenzahl (außer bei Neutrinooszillationen),
- Baryonenzahl (Quarks).

2.2 Symmetrien und Erhaltungssätze

Mit Hilfe des Lagrange-Formalismus kann man leicht die Verbindung zwischen Symmetrien der Feldgleichungen und erhaltenen physikalischen Observablen bzw. Quantenzahlen der Teilchen verifizieren.

Das ist der Inhalt des Noether-Theorems (E. Noether, 1918):

Mit jeder kontinuierlichen Symmetrietransformation (Invarianz bis auf totale Divergenz) der Lagrangefunktion ist ein Erhaltungssatz verbunden.

Beispiele:

2.2.1 Der Energieerhaltungssatz in der klassischen Mechanik

(siehe z.B. Landau, Lifshitz, Band I, Klassische Mechanik)

folgt nach dem Noether-Theorem aus der Homogenität der Zeit, d.h. aus der Kovarianz der Bewegungsgleichungen und der Invarianz der Lagrange-Funktion unter Zeittranslationen:

$$\vec{x} \longrightarrow \vec{x}' = \vec{x} + \delta\vec{x}.$$

Damit ist die Variation der Lagrange-Funktion für ein abgeschlossenes System ohne explizite Zeitabhängigkeit:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i \\ &= \sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right) \end{aligned}$$

unter Benutzung der Euler-Lagrange-Gleichungen.

Damit gilt der Erhaltungssatz

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L\right) = 0$$

für die Gesamtenergie

$$E = H = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = \sum_i p_i \dot{q}_i - L.$$

Da $L(q_i, \dot{q}_i) = T(q_i, \dot{q}_i) - V(q_i)$ für abgeschlossene Systeme und $T \sim \dot{q}_i^2$, gilt

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T$$

und damit

$$E = T + V = H.$$

2.2.2 Erhaltungssätze in der Feldtheorie

1) Phasentransformation der (komplexen) Felder:
U(1)-Eichsymmetrie:

$$\begin{aligned}\phi(x) &\longrightarrow \phi'(x) = e^{iQ\alpha}\phi(x),\\ \phi^*(x) &\longrightarrow \phi^{*\prime}(x) = e^{-iQ\alpha}\phi^*(x).\end{aligned}$$

Führt zu infinitesimalen Variationen der Felder

$$\begin{aligned}\phi(x) &\longrightarrow \phi'(x) = \phi(x) + \delta\phi(x) = \phi(x) + iQ(\delta\alpha)\phi(x),\\ \phi^*(x) &\longrightarrow \phi^{*\prime}(x) = \phi^*(x) + \delta\phi^*(x) = \phi^*(x) - iQ(\delta\alpha)\phi^*(x)\end{aligned}$$

und es gilt $\delta(\partial_\mu\phi) = iQ(\delta\alpha)\partial_\mu\phi$, da $\delta\alpha$ eine nicht ortsabhängige Konstante ist.

Falls die Lagrangedichte $\mathcal{L}(\phi, \phi^*, \partial_\mu\phi, \partial_\mu\phi^*)$ eichinvariant ist, gilt mit den Euler-Lagrange-Gleichungen für beliebige $\delta\alpha$:

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^*}\delta\phi^* + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^*)}\delta(\partial_\mu\phi^*)\\ &= \left[\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right]iQ(\delta\alpha)\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}iQ(\delta\alpha)\partial_\mu\phi + c.c.\\ &= iQ(\delta\alpha)\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\phi\right] - iQ(\delta\alpha)\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^*)}\phi^*\right] \equiv 0,\end{aligned}$$

d.h. es gilt die Kontinuitätsgleichung für die 4-Stromdichte $j^\mu = (\rho, \vec{j})$ der Ladung $Q = \int d^3x\rho$

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{\partial}{\partial t}\rho + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0 \tag{1}$$

mit

$$j^{\mu} \equiv -iQ\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)}\phi - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi^{*})}\phi^{*}\right), \qquad (2)$$

so daß die Ladung Q in einem abgeschlossenen System eine Erhaltungsgröße ist:

$$\frac{d}{dt}Q = 0.$$

Innere (globale) Eichsymmetrien der Teilchenfelder führen zu erhaltenen Ladungen, internen Quantenzahlen.

2) Raum-Zeit-Translation (o.E. infinitesimal):

$$x_\mu \longrightarrow x'_\mu = x_\mu + \delta x_\mu.$$

Falls $\mathcal{L}$ forminvariant unter der Transformation ist, ändert sich $\mathcal{L}$ um

$$\delta\mathcal{L} = \mathcal{L}[x'] - \mathcal{L}[x] = \delta x^\nu \frac{d\mathcal{L}}{dx^\nu} = \delta x^\nu \partial_\nu \mathcal{L} \equiv \delta x_\mu g^{\mu\nu} \partial_\nu \mathcal{L}. \quad (3)$$

Mit

$$\delta\phi = \phi(x') - \phi(x) = \delta x^\mu \partial_\mu \phi(x)\cdot$$

und

$$\delta(\partial_\mu\phi) = \partial_\mu\phi(x') - \partial_\mu\phi(x) = \delta x^\nu \partial_\nu \partial_\mu \phi(x)$$

gilt außerdem bei Abhängigkeit der Lagrangedichte von den Raum-Zeit-Koordinaten nur über die Felder $\phi(x)$:

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi).$$

Mit den Euler-Lagrange-Gleichungen kann man $\partial\mathcal{L}/\partial\phi$ eliminieren, so daß

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \left[\partial_\nu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi)}\right]\delta x^\mu \partial_\mu\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi)}\delta x^\mu \partial_\mu\partial_\nu\phi \quad (4) \\ &= \partial_\nu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi)}\delta x^\mu \partial_\mu\phi\right]. \quad (5) \end{aligned}$$

Nach Gleichsetzen der Ausdrücke (8) und (10) für $\delta\mathcal{L}$ gilt für beliebige δx^μ:

$$\delta x_\mu \partial_\nu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi)}\partial^\mu\phi - g^{\mu\nu}\mathcal{L}\right] = 0, \quad (6)$$

d.h. es gilt die Kontinuitätsgleichung

$$\partial_\mu\Theta^{\mu\nu} = 0 \quad (7)$$

für den Energie-Impuls-Spannungsdichte-Tensor (in eckigen Klammern in Gl.(8)):

$$\Theta^{\mu\nu} \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi)}\partial^\mu\phi - g^{\mu\nu}\mathcal{L}. \quad (8)$$

(Dieser Tensor ist die Quelle für die Gravitation bzw. Raumkrümmung in der ART.)

Es folgt u.a. die Kontinuitätsgleichung für die Energieflußdichte:

$$\partial_\mu \Theta^{\mu 0} \equiv \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{H} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{P}} = 0, \tag{9}$$

wobei

$$\Theta^{00} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} \partial^0 \phi - \mathcal{L} = 2\mathcal{T} - \mathcal{L} = \mathcal{T} + \mathcal{V} = \mathcal{H} \tag{10}$$

die Energiedichte $\mathcal{H}$ und entsprechend $\Theta^{0\nu} \equiv \mathcal{P}^\nu$ die 4-Impulsdichte sind.

Damit gelten nach (12) für die Gesamtenergie (Hamiltonfunktion) $H \equiv \int d^3x \Theta^{00}$ bzw. für den 4-Impuls $P^\nu \equiv \int d^3x \Theta^{0\nu}$ in einem abgeschlossenen System die Erhaltungssätze

$$\frac{d}{dt} H = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt} P^\nu = 0. \tag{11}$$

Auf analoge Weise führt die Rotationssymmetrie des Raums zur Drehimpulserhaltung und erhaltenen internen Spinquantenzahlen ($SO(3)$- bzw. $SU(2)$-Symmetrie des Raums).

Rotationen der Raum-Zeit entsprechen der Lorentz-Invarianz (Relativitätstheorie).

2.3 Symmetrien und Gruppen

2.3.1 Rekapitulation: Symmetrien in der Quantenmechanik

Symmetrietransformationen der Wellenfunktion lassen die Schrödingergleichung

$$i\frac{\partial\psi(\vec{x},t)}{\partial t} = \widehat{H}\psi(\vec{x},t)$$

invariant, d.h. die transformierten Zustände

$$\psi'(\vec{x},t) = \widehat{U}\psi(\vec{x},t)$$

erfüllen die gleiche Schrödingergleichung, wenn der Hamiltonoperator $\widehat{H}$ invariant ist unter den Transformationen:

$$\widehat{U}\widehat{H}\widehat{U}^\dagger \equiv \widehat{H},$$

d.h. Hamiltonoperator und Transformationsoperator $\widehat{U}$ vertauschen:

$$[\widehat{H},\widehat{U}] = 0.$$

Die Transformationsoperatoren auf dem Hilbertraum der Wellenfunktionen sind unitäre Transformationen, $UU^\dagger = U^\dagger U = 1,$ damit die Erhaltung der Wahrscheinlichkeit gewährleistet ist, d.h. der Betrag der Wellenfunktion ändert sich nicht.

Beispiele für Symmetrietransformationen der Wellenfunktion ("Rotationen im Hilbertraum"):

1. Zeittranslationen: $\widehat{U} = e^{-i\widehat{H}t}$

   Infinitesimal:
   $$\psi'(\vec{x},t) = (1 - i\widehat{H}\delta t)\psi(\vec{x},t) = \psi(\vec{x},t) + \frac{\partial\psi(\vec{x},t)}{\partial t}\delta t.$$

2. Räumliche Translationen: $\widehat{U} = e^{-i\widehat{\vec{p}}\cdot\vec{x}}$

   Infinitesimal:
   $$\psi'(\vec{x},t) = (1 - i\widehat{\vec{p}}\cdot\delta\vec{x})\psi(\vec{x},t) = \psi(\vec{x},t) - \delta\vec{x}\cdot\vec{\nabla}\psi(\vec{x},t).$$

3. Rotationen im Raum: $\widehat{U} = e^{-i\widehat{\vec{J}}\cdot\vec{\alpha}}$

   Infinitesimal:
   $$\psi'_\beta(\vec{x},t) = (1 - i\widehat{\vec{J}}_{\beta\gamma}\cdot\delta\vec{\alpha})\psi_\gamma(\vec{x},t).$$

Die infinitesimalen (unitären) Transformationen werden durch die (hermiteschen) Operatoren der konjugierten Observablen (Energie$\leftrightarrow$ Zeit, Impuls$\leftrightarrow$ Ort, Drehimpuls$\leftrightarrow$ Drehwinkel) "erzeugt": Generatoren der Transformationen.

- Die unitären Symmetrietransformationen auf dem Hilbertraum (Phasentransformationen der Wellenfunktion) haben Gruppeneigenschaften mit der Hintereinanderausführung als Gruppenoperation.

  Sie sind spezielle Realisierungen (Darstellungen) der (kontinuierlichen) Symmetriegruppen der Raum- und Zeittranslationen, der räumlichen Rotationen usw.

- Operatoren $\widehat{O}$, die mit dem Hamiltonoperator vertauschen, sind Konstanten der Bewegung und entsprechen erhaltenen Observablen, d.h.

$$i\frac{d\widehat{O}}{dt} = [\widehat{H}, \widehat{O}] = 0.$$

- Observable, die mit dem Hamiltonoperator vertauschen, lassen sich gleichzeitig mit ihm diagonalisieren, d.h. die Eigenzustände von $\widehat{H}$ (stationäre Lösungen der Schrödingergleichung) sind gleichzeitig Eigenzustände von Impuls, Drehimpuls usw. mit festen Eigenwerten.

  Symmetrieoperationen, die mit dem Hamiltonoperator vertauschen, führen zur Entartung der Energieeigenzustände des Hamiltonoperators, d.h. die Eigenzustände zu festen Energieeigenwerten bilden unter den Symmetrietransformationen invariante Unterräume des Hilbertraums (Eigenräume zu den Darstellungen der Symmetrietransformationen mit bestimmter Dimension).

  Die Symmetrieeigenschaften des Hamiltonoperators und Erhaltungssätze erleichtern damit, wie in der klassischen Mechanik, die Lösung der Schrödingergleichung und die Bestimmung der Eigenzustände (orthonormale Basen der Eigenräume).

Beispiel: Drehimpulserhaltung:

- $[\vec{J}, H] = 0$

- $\left.\begin{array}{l} [J_x, J_y] = iJ_z \\ [J_y, J_z] = iJ_x \\ [J_z, J_x] = iJ_y \end{array}\right\} \quad [J_i, J_j] = i \sum_k \varepsilon_{ijk} J_k \quad (i, j, k = x, y, z)$

mit

$$\varepsilon_{i,j,k} = \begin{cases} 0, & \text{2 gleiche Indizes} \\ +1, & \text{Indizes gerade Permutation von } x, y, z \\ \text{-1}, & \text{Indizes ungerade Permutation von } x, y, z. \end{cases}$$

Mit $\vec{J}^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$ gilt:

- $[\vec{J}, \vec{J}^2] = 0,$

d.h. gemeinsame Eigenzustände von J_i und $\vec{J}^2$. Spezielle Wahl: J_z und $\vec{J}^2$ bei Spinquantisierungsrichtung in z-Richtung.

J_x, J_y, J_z sind die Erzeugenden (Generatoren) der Drehgruppe $O(3)$, d.h. der Gruppe aller Drehungen im dreidimensionalen Raum, die aus Drehungen um drei unabhängige Achsen zusammengesetzt werden können (3 Euler-Winkel).

Eine Darstellung (Realisierung) der Drehgruppe $O(3)$ sind reelle orthogonale 3×3-Drehmatrizen, die die Vektoren im Raum drehen, ohne ihren Betrag zu ändern, und durch $9 - 6 = 3$ unabhängige Parameter (z.B. die Euler-Winkel) beschrieben werden.

Die Gruppe $O(3)$ läßt sich auf die Gruppe $SU(2)$ abbilden; beide Gruppen sind verwandt in dem Sinne, daß die kleinen Transformationen und die Generatoren identisch sind.

Die definierende (und fundamentale) Darstellung der $SU(2)$-Gruppe sind die komplexen unitären 2×2-Matrizen mit Determinante $= 1$, die ebenfalls durch $3 = 8 - 5$ unabhängige Parameter beschrieben werden.

Allgemein:

Die Gruppe $SU(N)$ der speziellen unitären Transformationen (Transformationen mit $U^\dagger U = 1$ und Det(U)$= 1$) in N Dimensionen besitzt $2N^2 - N^2 - 1 = N^2 - 1$ Parameter und ebensoviele Generatoren. Die Generatoren sind hermitesch und quantenmechanische Observable (z.B. "Ladungen" zu inneren Symmetrien der Teilchen).

Alternative Variable der Drehimpulsgruppe:

- $J^+ = J_x + iJ_y, \quad J^- = J_x - iJ_y$

mit

- $[J_z, J^+] = J^+, \quad [J_z, J^-] = -J^-$
- $[J+, J^-] = 2J_z$

und damit

- $[\vec{J}^2, J^\pm] = 0.$

Es gilt: $\vec{J}^2 = \frac{1}{2}(J^+J^- + J^-J^+) + J_z^2.$

Eigenzustände der Drehimpulsoperatoren:

Simultan:

$$\begin{aligned}\vec{J}^2|j,m> &= j(j+1)|j,m>,\\ J_z|j,m> &= m|j,m>,\end{aligned}$$

definiert $(2j+1)$-dimensionale Eigenräume des Drehimpulses (und damit Hamiltonoperators) zu den Eigenwerten $j = 0, 1/2, 1, 3/2, ...$ und $m = -j, -j+1, ..., j-1, j$ von $\vec{J}^2$ und J_z (Singuletts, Dubletts, Tripletts usw.).

$J^\pm$ sind Auf- und Absteigeoperatoren in jedem Eigenraum:

$$\begin{aligned}J^+|j,m> &= |j,m+1> \quad (m<j),\\ &= 0 \qquad\qquad\quad\; (m=j),\\ J^-|j,m> &= |j,m-1> \quad (m>-j),\\ &= 0 \qquad\qquad\quad\; (m=-j).\end{aligned}$$

Beispiel:

Spin $\frac{1}{2}$-Zustände mit Eigenwerten $j = 1/2$, $m = \pm 1/2$.

3 unabhängige hermitesche 2×2-Spinmatrizen mit Spur $= 0$ (entspricht Determinante $= 1$ für die von ihnen erzeugten Rotationsmatrizen), die Pauli'schen Spinmatrizen:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{\sigma}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot I.$$

in der Pauli-Darstellung, in der die Eigenwerte (s.o.) zur Eigenvektorbasis

$$\begin{aligned} |\frac{1}{2}, +\frac{1}{2} > &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} > &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

evident sind, d.h. mit $\vec{J} \equiv \frac{1}{2}\vec{\sigma}$ gilt

$$\begin{aligned} \vec{J}^2 \, |\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2} > &= \frac{3}{4} \, |\frac{1}{2}, +\frac{1}{2} >, \\ J_z \, |\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2} > &= \pm\frac{1}{2} \, |\frac{1}{2}, +\frac{1}{2} > . \end{aligned}$$

Die Auf- und Absteigeoperatoren reduzieren sich auf Projektionsoperatoren auf die beiden Zustände Spin up/down:

$$
\begin{aligned}
J^+ = \frac{1}{2}(\sigma_x + i\sigma_y) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
J^- = \frac{1}{2}(\sigma_x - i\sigma_y) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

2.3.2 Gruppentheorie: Grundlagen der Lie-Gruppen

Relevante Symmetriegruppen für innere Symmetrien der Teilchen und Eichsymmetrien:

Unitäre Transformationen (QM) und kontinuierlich erzeugte Transformationen, die sich aus infinitesimal kleinen Transformationen nahe der Einheitstransformation I,

$$g(\delta\alpha) = I + i\delta\alpha^a T^a + \mathcal{O}(\delta\alpha^2),$$

zusammensetzen lassen.

α^a sind die unabhängigen Gruppenparameter ("Winkel") und T^a hermitesche Operatoren, die Erzeugenden oder Generatoren der Gruppe.

Alle Gruppenelemente werden erzeugt in der Form

$$g(\alpha) = e^{i\alpha^a T^a}.$$

Die Transformationen sind unitär, wenn die Generatoren hermitesch sind.

Kontinuierliche Gruppen dieser Art heißen Lie-Gruppen.

Die Generatoren einer Lie-Gruppe spannen einen Vektorraum auf und erfüllen die Vertauschungsrelation

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c$$

mit den Strukturkonstanten f^{abc}, die für die Symmetriegruppe spezifisch sind.

Mit der Vertauschung als zusätzlicher Operation bilden die Generatoren eine sog. Lie-Algebra.

Aufgrund der Vertauschungsrelation und der identischen Beziehung

$$[T^a, [T^b, T^c]] + [T^b, [T^c, T^a]] + [T^c, [T^a, T^b]] \equiv 0$$

gilt für die Strukturkonstanten die Jacobi-Identität:

$$f^{ade} f^{bcd} + f^{bde} f^{cad} + f^{cde} f^{abd} \equiv 0.$$

Nur, wenn für die Vertauschungsrelation der Basiselemente der Algebra, die Jacobi-Identität erfüllt ist, ist die Algebra eine Lie-Algebra.

Die Lie-Algebra definiert die Symmetriegruppe eindeutig für kleine Transformationen nahe der Einheitstransformation. Die kovariante Ableitung und damit die Lagrangefunktion der lokalen Eichfeldtheorien hängt nur von den infinitesimalen Transformationen und damit nur von der Lie-Algebra der Generatoren ab.

Klassifizierung der Lie-Gruppen und Lie-Algebren:

Die kommutative oder Abelsche Lie-Gruppe ist die Gruppe U(1) der unitären 1-dimensionalen Phasentransformationen $\psi \to e^{i\alpha}\psi$.

Allgemeine Lie-Algebren lassen sich als Summe einfacher Lie-Algebren, die nicht weiter in Summanden zerlegt werden können, und kommutativer Lie-Algebren $U(1)$ darstellen.

Die einfachen (und kompakten) Lie-Algebren lassen sich in 4 Klassen einteilen, die durch Transformationsgruppen definiert sind:

1. Spezielle unitäre Transformationen U N-dimensionaler Vektoren: $SU(N)$,

   mit $U^\dagger U = 1$ und $\mathrm{Det}(U) = 1$. Sie erhalten das komplexe Betragsquadrat der Vektoren.

   Die Generatoren $T = T^\dagger$ lasssen sich darstellen als hermitesche $N \times N$-Matrizen mit $\mathrm{Spur}(T) = 0$. Es gibt $N^2 - 1$ unabhängige Matrizen dieser Art und damit Generatoren.

2. Reelle orthogonale Transformationen O N-dimensionaler Vektoren: $SO(N)$,

   mit $O^T O = 1$ und $\mathrm{Det}(O) = 1$. Sie erhalten das reelle Betragsquadrat der Vektoren.

   $SO(N)$ besitzt $N(N-1)/2$ Generatoren.

3. Sog. symplektische Transformationen N-dimensionaler Vektoren: $Sp(N)$.

4. Sog. exzeptionelle Lie-Algebren: G_2, F_4, E_6, E_7 und E_8.

Bisher wurden $SU(N)$, $SO(10)$ sowie E_6 und E_8 als Eichsymmetrien im Standardmodell und seinen Erweiterungen in Betracht gezogen.

2.3.3 Gruppentheorie: Darstellungen von Gruppen

Die Darstellung einer Gruppe G ist definiert als die Abbildung auf eine Gruppe T linearer Transformationen

$$\theta : G \longrightarrow T$$

mit

$$s \in G \longrightarrow D(s) \in T,$$

wobei $D(s)$ eine lineare Transformation auf einem N-dimensionalen Vektorraum V ist, so daß

$$s \cdot t \longrightarrow D(s) \cdot D(t).$$

Es gilt dann $D(e) = I$ und $D(s^{-1}) = D^{-1}(s)$.

Der Vektorraum V ist der Darstellungsraum. Seine Dimension ist die Dimension der Darstellung.

Nach Wahl einer Basis im Darstellungsraum können die linearen Transformationen als $N \times N$-Matrizen dargestellt werden.

Fundamentale Darstellungen sind diejenigen mit der niedrigsten Dimension > 1 (nicht Singulett).

Bei der adjungierten Darstellung einer Lie-Gruppe, wird der Darstellungsraum von den Generatoren der Gruppe aufgespannt.

Bei reduziblen Darstellungen kann der Darstellungsraum in invariante Unterräume zerlegt werden, die (bei unitären Darstellungen) zueinander orthonormale Basen besitzen.

Irreduzible Darstellungen transformieren auf invarianten Darstellungsräumen, die nicht in kleinere invariante Unterräume zerlegt werden können.

Die Suche nach Eigenvektoren und Eigenwerten der Symmetrieoperatoren entspricht der Konstruktion irreduzibler Darstellungen der Symmetriegruppen.

Die Felder der Elementarteilchen müssen nach unitären Darstellungen der Symmetriegruppen der Lagrangefunktion transformieren. Sie gehören Multipletts, den N-dimensionalen Eigenräumen bzw. irreduziblen Darstellungsräumen, der Symmetrietransformationen an.

Für die Lie-Gruppen $SU(N)$ können die Multipletts (irreduzible Darstellungen) aufgrund der Vertauschungsrelationen mit Hilfe der Auf- und Absteigeoperatoren konstruiert werden; siehe Drehimpuls.

Da die Hamiltonfunktion mit dem Masseoperator (kinetische Energie) mit dem Drehimpuls und den Operatoren für andere innere Symmetrien vertauscht, müssen alle Teilchenzustände eines Multipletts einer inneren Symmetrie die gleiche Masse und den gleichen Spin besitzen; andernfalls ist die Symmetrie mehr oder minder gebrochen.

Ausnahme ist die Supersymmetrie, die Bosonen und Fermionen in gemeinsamen Super-Multipletts vereinigt. Die Fermion- und Bosonzustände innerhalb eines Super-Multipletts werden durch die SUSY-Transformationen ineinander übergeführt. Dies ist nur möglich durch eine Erweiterung der Raum-Zeit-Symmetrien in einer neuen Symmetriegruppe.

Beispiele innerer Symmetrien:

1. $U(1)$-Phasentransformationen der Wellenfunktionen (Wahrscheinlichkeitserhaltung und Erhaltung der elektrischen Ladung).

2. Isospinsymmetrie $SU(2)$, analog zur räumlichen Drehimpuls- und Spinsymmetrie.

   Fundamentale Dublettdarstellung:

$$\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \text{ bzw. } \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}.$$

3. Schwache Isopsinsymmetrie $SU(2)_W$, Eichsymmetrie der schwachen Wechselwirkung:

   Fundamentale Dublettdarstellung: Quark- und Lepton-Dubletts.

   Fermionen und Antifermionen befinden sich in der gleichen Darstellung und besitzen daher die gleichen schwachen ladungen.

   Die Eichbosonen (W^+, Z^0, W^-) bilden die adjungierte Darstellung entsprechend den drei Generatoren der $SU(2)$; die Triplett-Darstellung ist analog zur Spin 1-Darstellung.

4. $SU(3)$ flavour-Symmetrie der Quarks: Quarkmodell

Es gibt zwei verschiedene fundamentale Triplett-Darstellungen: (u, d, s) und $(\bar{u}, \bar{d}, \bar{s})$.

Quarks und Antiquarks sind in verschiedenen (zueinander konjugierten) Multipletts.

Die Multipletts der Mesonen und Baryonen werden durch Produkte der fundamentalen Darstellungen und Zerlegen in irreduzible Unterräume (Ausreduzieren) gewonnen, z.B.

$$3 \otimes \bar{3} = 1 \oplus 8,$$

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10.$$

$$\bar{3} \otimes \bar{3} \otimes \bar{3} = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10.$$

Baryonen und Antibaryonen (qqq) befinden sich in unterschiedlichen Multipletts, während Mesonen und Antimesonen $(q\bar{q})$ in den gleichen Multipletts auftreten.

2.4 Eichsymmetrie in der Quantenmechanik

Globale Eichinvarianz:

Für Quantenfelder können die Gesetze der elektromagnetischen Wechselwirkung aus einem Eichprinzip hergeleitet werden (H. Weyl 1921, 1929).

Die Erwartungswerte quantenmechanischer Observabler (einschließlich der Lagrangefunktion!)

$$< \mathcal{O} >= \int \psi^* \mathcal{O} \psi$$

sind invariant unter globalen Phasenrotationen der Wellenfunktion

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = e^{i\alpha}\psi(x).$$

Nur relative Phasen zwischen Zuständen sind meßbar.

Die Invarianz der Lagrangefunktion (Forminvarianz der Wellengleichung) unter Phasenrotationen entspricht einer globalen U(1)-Symmetrie, genannt "Eichsymmetrie", die nach dem Noether'schen Theorem zur Erhaltung der Wahrscheinlichkeit und von Ladungen führt.

U(1) ist die Gruppe der unitären Transformationen mit der niedrigsten Dimension 1; Phasenrotationen sind eine Darstellung (Realisierung) der Gruppe auf dem Raum der komplexen Wellenfunktionen.

Lokales Eichprinzip:

Die quantenmechanischen Erwartungswerte sollen invariant sein unter lokaler Phasenwahl der Wellenfunktionen oder Felder, d.h. unabhängig an verschiedenen Raum-Zeit-Punkten:

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = e^{i\alpha(x)}\psi(x).$$

Ortsabhängige Phasentransformationen (lokale Eichtransforma-

tionen) bedeuten für die Ableitungen der Felder in den Wellengleichungen:

$$\partial_\mu\psi(x) \longrightarrow \partial_\mu\psi'(x) = e^{i\alpha(x)}[\partial_\mu\psi(x) + i(\partial_\mu\alpha(x))\psi(x)].$$

Invarianz der Lagrangedichte und Forminvarianz der Wellengleichungen kann erreicht werden, indem die gewöhnliche Ableitung durch eine eich-kovariante Ableitung ersetzt wird:

$$\partial_\mu \longrightarrow D_\mu \equiv \partial_\mu + iqA_\mu(x),$$

wobei q die elektrische Ladung des Feldes $\psi(x)$ ist und $A_\mu(x)$ das 4-Potential des elektromagnetischen Feldes, das sog. Eichvektorfeld zur Eichgruppe U(1), das unter den Phasenrotationen transformiert wie

$$A_\mu(x) \longrightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{q}\partial_\mu\alpha(x)$$

($\equiv$ Eichtransformation des elektromagnetischen Feldes).

Damit gilt

$$
\begin{aligned}
D_\mu \psi(x) &= \partial_\mu + iqA_\mu \longrightarrow \\
D'_\mu \psi'(x) &= (\partial_\mu + iqA'_\mu(x)) e^{i\alpha(x)} \psi(x) \\
&= e^{i\alpha(x)} [\partial_\mu + i\partial_\mu \alpha(x) + iqA_\mu(x) - i\partial_\mu \alpha(x)] \psi(x) \\
&= e^{i\alpha(x)} [\partial_\mu + iqA_\mu(x)] \psi(x) \equiv e^{i\alpha(x)} D_\mu \psi(x)
\end{aligned}
$$

und $\psi^* D_\mu \psi$ ist invariant unter lokalen Phasentransformationen.

Dies wurde durch die Einführung einer Wechselwirkung für das Feld ψ, der elektromagnetischen Wechselwirkung für die U(1)-Phasentransformationen, erreicht.

Die globale U(1)-Symmetrie der Feldgleichungen für $\psi(x)$ führt zur Erhaltung der elektrischen Ladung, der Quellen des Eichfeldes, auch bei Wechselwirkung mit dem elektromagnetischen Feld. Die Eichfeldgleichungen mit der zugehörigen Eichinvarianz enthalten automatisch Ladungserhaltung.

Die Wechselwirkung (Kopplungsterme zwischen Materiefeld $\psi(x)$ und Eichwechselwirkungsfeld $A_\mu(x)$) ist (eindeutig) festgelegt durch die Forderung der lokalen Phaseninvarianz, das lokale Eichprinzip, d.h. durch die kovariante Ableitung

$$D_\mu \psi(x) = \partial_\mu \psi(x) + iqA_\mu(x)\psi(x)$$

(minimale eichinvariante Kopplung).

Die Ersetzung

$$i\partial_\mu \longrightarrow iD_\mu = i\partial_\mu - qA_\mu$$

entspricht ($p_\mu \longrightarrow i\partial_\mu$) der Ersetzung

$$P_\mu \longrightarrow P_\mu - qA_\mu$$

für den kanonischen Impuls bei Einführung der Wechselwirkung mit dem elektromagnetischen Feld in der klassischen Mechanik.

Beispiel 1:

Elektromagnetische Wechselwirkung zwischen Fermionen (Elektronen) und dem Photonfeld (QED):

Die Lagrangedichte für das freie Dirac-Feld

$$\mathcal{L}_{\text{frei}} = \overline{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi$$

wird ersetzt durch die lokal eichinvariante Form mit minimaler Kopplung

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \overline{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi \\
&= \overline{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - qA_\mu \overline{\psi}\gamma^\mu\psi \\
&= \mathcal{L}_{\text{frei}} - j^\mu A_\mu
\end{aligned}$$

mit dem (erhaltenen) elektromagnetischen Strom $j^\mu = q\overline{\psi}\gamma^\mu\psi$.

Zusammen mit der Lagrangedichte für das freie elektromagnetische Feld ist die Lagrangedichte der Quantenelektrodynamik:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{QED} &= \mathcal{L}_{\text{frei}}^{\text{Photon}} + \mathcal{L}_{\text{frei}}^{\text{Fermion}} + \mathcal{L}_{\text{WW}} \\
&= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \overline{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - j^\mu A_\mu \\
&= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \overline{\psi}i\gamma^\mu \partial_\mu\psi - m\overline{\psi}\psi - j^\mu A_\mu \\
&= \mathcal{L}_{\text{kin}}^{\text{Photon}} + \mathcal{L}_{\text{kin}}^{\text{Fermion}} + \mathcal{L}_{\text{Masse}}^{\text{Fermion}} + \mathcal{L}_{\text{WW}} = T - V.
\end{aligned}$$

Die Beiträge zur gesamten Lagrangedichte sind additiv und erfüllen die U(1)-Eichinvarinz.

Beispiel 2:

Elektromagnetische Wechselwirkung zwischen geladenen Spin-0-Bosonen und dem Photonfeld:

Die Lagrangedichte für das freie Klein-Gordon-Feld

$$\mathcal{L}_{\text{frei}} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$$

wird ersetzt durch die lokal eichinvariante Form mit minimaler Kopplung

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + D_\mu \phi^* D^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi \\
&= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi \\
&\quad + iq[\phi^* \partial^\mu \phi - (\partial^\mu \phi^*)\phi] A_\mu + q^2 A_\mu A^\mu \phi^* \phi \\
&= \mathcal{L}_{\text{frei}} - j^\mu A_\mu + q^2 A_\mu A^\mu \phi^* \phi \\
&= \mathcal{L}_{\text{kin}}^{\text{Photon}} + \mathcal{L}_{\text{kin}}^{\text{Boson}} + \mathcal{L}_{\text{Masse}}^{\text{Boson}} + \mathcal{L}_{\text{WW}}.
\end{aligned}$$

Dabei ist $j^\mu = iq[\phi^* \partial^\mu \phi - (\partial^\mu \phi^*)\phi]$ der erhaltene elektromagnetische Strom für die freien Bosonen.

Nach dem Noether-Theorem hat der erhaltene Strom für die an das Photonfeld koppelnden Bosonen eine andere Form. Der Wechselwirkungsterm erhält einen zusätzlichen Beitrag in der Form einer Kontaktwechselwirkung zwischen Photonen und Materie-Bosonen (eich- und lorentzinvariant).

2.5 Nicht-Abelsche Eichsymmetrien

Erweiterung der Isospinsymmetrie $SU(2)$ zu einer lokalen Eichsymmetrie
(Yang, Mills 1954):

Freie Lagrangefunktion für Nukleonen (Proton, Neutron):

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi} I (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi.$$

Proton und Neutron bilden dabei ein Isotopenspindublett (2-dimensionale Darstellung der Isospingruppe).

$$\psi = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}.$$

Beide Fermionfelder $p(x)$ und $n(x)$ sind jeweils 4-Spinoren.

Die freie Lagrangefunktion ohne Wechselwirkung ist diagonal im 2-dimensionalen Isospinraum (2-dim. Einheitsmatrix I) und invariant unter globalen Isospinrotationen

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = e^{i\vec{\alpha}\cdot\vec{I}}\psi(x) = e^{i\vec{\alpha}\cdot\vec{\tau}/2}\psi(x),$$

wobei $\vec{\tau}$ der 3-Isovektor der Pauli'schen 2×2 Spinmatrizen ist (die drei Generatoren der Isospingruppe $SU(2)$, $\vec{I} = \vec{\tau}/2$, in der fundamentalen 2-dimensionalen Darstellung; Bezeichnung $\vec{\tau}$ statt $\vec{\sigma}$ für den Isospin).

Wie bei der $U(1)$-Symmetrie der elektromagnetischen Wechselwirkung:

Übergang zu einer lokalen $SU(2)$-Eichsymmetrie, d.h. Forderung nach Invarianz der Lagrangefunktion und Feldgleichungen unter lokalen Eichtransformationen

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = e^{i\vec{\alpha}(x)\cdot\vec{\tau}/2}\psi(x) \equiv G(x)\psi(x).$$

Damit transformiert der 4-Gradient des Feldes wie

$$\partial_\mu\psi(x) \longrightarrow G(x)(\partial_\mu\psi'(x)) + (\partial_\mu G(x))\psi(x).$$

$\Longrightarrow$ Einführen einer kovarianten Ableitung (kovariant unter den lokalen Eichtransformationen $G(x)$):

$$D_\mu(x) = I\partial_\mu + igB_\mu(x)$$

mit der 2×2-Einheitsmatrix I auf dem Isospinraum und einer Kopplungskonstanten g, die die Stärke der Eichwechselwirkung angibt.

Das Eichvektorfeld $B_\mu(x)$ ist eine 2×2-Matrix auf dem Isospinraum, definiert durch ($a = 1, 2, 3$):

$$\begin{aligned} B^\mu(x) &= \frac{1}{2}\vec{\tau} \cdot \vec{b}^\mu(x) = \frac{1}{2}\tau_a b_a^\mu(x) \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} b_3^\mu(x) & b_1^\mu(x) - ib_2^\mu(x) \\ b_1^\mu(x) + ib_2^\mu(x) & -b_3^\mu(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit dem Isovektor $\vec{b}_\mu = (b_1^\mu, b_2^\mu, b_3^\mu)$ der drei Eichvektorfelder $b_i(x)$, die den drei Generatoren (Ladungsoperatoren) der $SU(2)$-Eichsymmetrie $\vec{I} = \vec{\tau}/2$ entsprechen.

Um die lokale nicht-Abelsche $SU(2)$-Eichsymmetrie zu erhalten, müssen also 3 neue Eichvektorpotentiale eingeführt werden, die 3 Eichbosonfeldern entsprechen, die die Eichwechselwirkungen vermitteln.

(Dies erinnert an die 3 Austauschteilchen $W^\pm$ und Z^0 der schwachen Wechselwirkung, die ebenfalls globale $SU(2)$-Symmetrie besitzt, aber an Quark- und Leptonfelder koppelt.)

Die kovariante Ableitung soll unter lokalen Eichtransformationen ebenso transformieren wie die Felder, um die lokale Eichinvarianz der Lagrangefunktion zu gewährleisten, d.h.

$$D_\mu\psi \longrightarrow D'_\mu\psi' = G(x)(D_\mu\psi).$$

Diese Forderung definiert das Transformationsverhalten der Eichvektorfelder:

$$\begin{aligned} D'_\mu \psi' &= (\partial_\mu + igB'_\mu)\psi' \\ &= G(\partial_\mu \psi) + (\partial_\mu G)\psi + igB'_\mu(G\psi) \\ &\equiv G(\partial_\mu + igB_\mu)\psi \\ &= G(\partial_\mu \psi) + igG(B_\mu \psi) \end{aligned}$$

und damit

$$igB'_\mu(G\psi) = igG(B_\mu\psi) - (\partial_\mu G)\psi$$

für beliebige Werte des Nukleonfelds ψ, d.h. nach Multiplizieren mit G^{-1}:

$$\begin{aligned} B'_\mu &= GB_\mu G^{-1} + \frac{i}{g}(\partial_\mu G)G^{-1} \\ &= G\left[B_\mu + \frac{i}{g}G^{-1}(\partial_\mu G)\right]G^{-1}. \end{aligned}$$

Dies ist die nicht-Abelsche Verallgemeinerung der $U(1)$-Eichtransformation des elektromagnetischen Potentials (Isoskalar), die analog lautet:

$$\begin{aligned} A'_\mu &= G_{EM}A_\mu G_{EM}^{-1} + \frac{i}{q}(\partial_\mu G_{EM})G_{EM}^{-1} \\ &\equiv A_\mu - \partial_\mu \alpha(x) \end{aligned}$$

mit der lokalen $U(1)$-Eichtransformation

$$G_{EM}(x) = e^{iq\alpha(x)}.$$