## 3.6 Störungsrechnung und Feynman-Graphen

Zur Berechnung von Übergangsamplituden $\langle f|\psi(t)\rangle$ für Zerfallswahrscheinlichkeiten und Wirkungsquerschnitte.

**Einfachste Methode (nach Feynman):**

Iterative Lösung der klassischen Feldgleichungen, mit Wechselwirkungsterm als Störung zu den freien Feldgleichungen, unter Benutzung der Methode der Greenschen Funktion.

### 3.6.1 Bekanntes Beispiel: Elektrostatik:

Poisson-Gleichung für skalares elektrostatisches Potential $\phi(\vec{x})$:

$$\vec{\nabla}^2\Phi(\vec{x}) = -\rho(\vec{x}).$$

Lösung für Punktladung am Ort $\vec{x}'$: $\rho(\vec{x}) = q\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}')$:

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|} \quad (\mathrm{Coulomb-Potential}).$$

Für eine allgemeine Ladungsverteilung $\rho(\vec{x}')$ ist die Lösung offensichtlich:

$$\Phi(\vec{x}) = \int \frac{\rho(\vec{x}'}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|}d^3x' =: \int G(\vec{x}-\vec{x}')\rho(\vec{x}')d^3x'$$

mit der sog. Greenschen Funktion

$$G(\vec{x},\vec{x}') = G(\vec{x}-\vec{x}') = \frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

die eine Lösung der Poisson-Gleichung ist für eine Einheitspunktladung am Ort $\vec{x}'$ (Definition):

$$\vec{\nabla}_x^2 G(\vec{x},\vec{x}') = -\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}').$$

# 3.6.2 Anwendung auf Eichfeldtheorien

## Elektromagnetische WW von Fermionen (QED):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{QED}_{\text{Fermion}} &= \overline{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi \\ &= \overline{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - eQ\overline{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \\ &= \overline{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - ej^\mu A_\mu.\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Feldgleichung nach dem Lagrange-Formalismus:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\overline{\psi}} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\overline{\psi})}\right) = 0$$

ist die Dirac-Gleichung

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) = eQ\gamma^\mu A_\mu(x)\psi(x)$$

mit elektromagnetischem Kopplungsterm:

inhomogene Differentialgleichung, die i.a. nicht analytisch lösbar ist, d.h. iterative Lösung mit inhomogenem Wechselwirkungsterm als Störung.

Ansatz für Greensche Funktion:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)K(x - x') = \delta^{(4)}(x - x').$$

Mit der Lösung $\psi^{(0)}(x)$ der homogenen freien Dirac-Gleichung, $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi^{(0)}(x) = 0$

ist damit die allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl.:

$$\underline{\psi(x)} = \psi^{(0)}(x) + \int d^4x' K(x - x')\gamma^\mu A_\mu(x')\underline{\psi(x')}.$$

Die Integralgleichung kann iterativ gelöst werden:

0. Näherung: $\psi^{(0)}(x) \longrightarrow$ einsetzen in RS;

1. Näherung:

$$\psi^{(1)}(x) = \psi^{(0)}(x) + eQ \int d^4x\prime K(x - x')\gamma^\mu A_\mu(x')\underline{\psi^{(0)}(x')};$$

2. Näherung:

$$\psi^{(2)}(x) = \psi^{(0)}(x) + eQ \int d^4x\prime K(x - x')\gamma^\mu A_\mu(x')\psi^{(0)}(x')$$

$$+e^2Q^2 \int\int d^4x''d^4x' \quad K(x - x'') \quad \gamma^\mu A_\mu(x'')$$

$$K(x'' - x') \quad \gamma^\mu A_\mu(x')\psi^{(0)}(x').$$

Störungsentwicklung nach Potenzen des WW-Terms $\sim e$.

Fouriertransformation der Greenschen Funktion,

$$K(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p \widehat{K}(p) e^{-p(x-x')},$$

ergibt bei Einsetzen in die Dirac-Gleichung:

$$\begin{aligned}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)K(x-x') &= \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p(\not{p}-m)\widehat{K}(p)e^{-p(x-x')} \\ \equiv \delta^{(4)}(x-x')\cdot 1 &= \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p e^{-ip(x-x')}\cdot 1,\end{aligned}$$

d.h. $(\not{p}-m)\widehat{K}(p) = 1$, mit $\not{p} := \gamma^\mu p_\mu = \gamma^0 p_0 - \vec{\gamma}\cdot\vec{p}$ etc.

$$\Longrightarrow (\not{p}+m)(\not{p}-m)\widehat{K}(p) = (p^2-m^2)\widehat{K}(p) \equiv (\not{p}+m)\cdot 1$$

$\Longrightarrow$ "Fermion-Propagator":

$$\boxed{\widehat{K}(p) = \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\not{p}+m}{p^2-m^2+i\varepsilon}}$$

mit Integrationsregel für das Fourierintegral der räumlichen Greenschen Funktion in der komplexen Ebene:

Konvergente Lösungen für Wellen mit positiver Energie (Teilchen), die sich in positiver Zeitrichtung ($t > t'$) ausbreiten und für Wellen mit negativer Energie (Antiteilchen), die sich in negativer Zeitrichtung ausbreiten ($t < t'$). $\longrightarrow$ Feynman-Bild.

Photon-Propagator:

$$\widehat{D}^{\mu\nu}(q) = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{-g^{\mu\nu}}{q^2 + i\varepsilon}$$

Propagator für massive Eichbosonen $W_\mu^\pm$, $Z_\mu^0$

$$\widehat{D}^{\mu\nu}(q) = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{-[g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu / M^2]}{q^2 - M^2 + i\varepsilon}$$

Propagator für skalare Spin-0 Bosonen (Higgs-Boson)

$$\widehat{G}(q) = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{q^2 - m^2 + i\varepsilon}$$

## 3.6.3 Berechnung der Übergangsmatrixelemente

mit der Streumatrix $S$,

$$\psi_s(x) = S \cdot \psi_i(x),$$

ist das Streumatrixelement

$$\begin{aligned}
\langle \psi_f | \psi_s \rangle &= \langle \psi_f | S | \psi_i \rangle =: S_{fi} \equiv \mathcal{M}_{fi} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i) \\
&= \int d^3x \psi_f^\dagger(x) S \psi_i(x) = \int d^3x \psi_f^\dagger(x) \psi_s(x) \\
&= S_{fi}^{(0)} + S_{fi}^{(1)} + S_{fi}^{(2)} + \ldots
\end{aligned}$$

wobei für die gestreute Welle $\psi_s(x)$ die obige Störungsentwicklung durchgeführt wird (einsetzen!).

Im Anfangs ($i$)- und Endzustand ($f$) befinden sich wechselwirkungsfreie Zustände (ebene Wellen).

## 3.6.4 Fermion-Fermion-Streuung:

Das Übergangsmatrixelement $\mathcal{M}_{fi}$ für elektromagnetische Fermion (Elektron e)-Fermion (f)-Streuung unter Austausch eines Photons ist demnach:

$$\mathcal{M}_{fi} = -ie^2 Q_e Q_f \overline{u}_e(p_3)\gamma_\mu u_e(p_1)\frac{1}{q^2}\overline{u}_f(p_4)\gamma^\mu u_f(p_2)$$

in 1. Ordnung der Störungsrechnung, 2. Ordnung in $eQ$ bzw. 1. Ordnung in der Feinstrukturkonstanten $\alpha \equiv e^2/4\pi \approx 1/137$

$(\sigma(e^- f \to e^- f) \sim |\mathcal{M}_{fi}|^2 \sim e^4 Q_e^2 Q_f^2 \sim \alpha^2)$

und mit $q^2 = (p_3 - p_1)^2 \approx -2p_1 p_3 = -4E_1 E_3 \sin^2(\theta/2)$ bei Vernachlässigung der Fermion-Massen; $\theta =$ Streuwinkel.

## Anleitung zum selbst Nachrechnen:

Einlaufende Fermionen (1: Elektron $e^-$, 2: Fermion $f$):

$\psi_{i1}(x) = u(p_1)e^{-ip_1x}\ (Q)$, $\psi_{i2}(x) = u(p_2)e^{-ip_2x}\ (Q_f)$.

Auslaufende Fermionen (1: Elektron $e^-$, 2: Fermion $f$):

$\overline{\psi}_{f1}(x) = \overline{u}(p_3)e^{ip_3x}\ (Q)$, $\overline{\psi}_{f2}(x) = \overline{u}(p_4)e^{ip_4x}\ (Q_f)$.

Lösung der elektromagnetischen Wellengleichung mit Qellen:

$$A_\mu(x) = -e\int d^4x' D_{\mu\nu}(x-x')j^\nu_{\text{el.magn.}}(x').$$

Der elektromagnetische Strom der Photonen emittierenden Fermionen $f$ (Quelle des auf die Elektronen wirkenden el.magn. Feldes) ist in niedrigster Ordnung (freie Fermionen):

$j^\mu_{el.magn.}(x) = Q_f\overline{\psi}_{f2}(x)\gamma^\mu\psi_{i2}(x) = Q_f\overline{u}(p_4)\gamma^\mu u(p_2)e^{i(p_4-p_2)x}$.

Mit dem Photonpropagator erhält man:

$$\begin{aligned}
&. \quad A_\mu(x) = \\
&= -eQ_f\int d^4x'\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{-g_{\mu\nu}}{q^2+i\varepsilon}e^{i(p_4-p_2+q)x'}e^{-iqx}\overline{u}(p_4)\gamma^\nu u(p_2) \\
&= -eQ_f\int d^4q\delta^{(4)}(p_4-p_2+q)\frac{-g_{\mu\nu}}{q^2+i\varepsilon}e^{-iqx}\overline{u}(p_4)\gamma^\nu u(p_2)
\end{aligned}$$

Elektromagnetische Fermion-Fermion-WW mit Photonaustausch in niedrigster Störungsordnung:

Einsetzen der Näherung für das Photon-Feld in

$$
\begin{aligned}
S_{fi}^{(1)} &= -ieQ \int d^4x' \overline{\psi}_{f1}(x') \gamma^\mu \psi_{i1}(x') A_\mu(x') \\
&= ie^2 Q Q_f \int d^4x' \overline{u}(p_3) \gamma^\mu u(p_1) e^{ip(3-p_1-q)x} \\
&\cdot \left( \int d^4q \delta^{(4)}(p_4 - p_2 + q) \frac{-g_{\mu\nu}}{q^2 + i\varepsilon} \right) \overline{u}(p_4) \gamma^\nu u(p_2) \\
&= ie^2 Q Q_f (2\pi)^4 \int d^4q \overline{u}(p_3) \gamma^\mu u(p_1) \delta^{(4)}(p_4 - p_2 + q) \\
&\cdot \frac{-g_{\mu\nu}}{q^2 + i\varepsilon} \overline{u}(p_4) \gamma^\nu u(p_2) \underbrace{\int \frac{d^4x'}{(2\pi)^4} e^{ip(3-p_1-q)x}}_{= \delta^{(4)}(p_3 - p_1 - q)} \\
&\cdot \\
S_{fi}^{(1)} &= ie^2 Q Q_f (2\pi)^4 \int d^4q \delta^{(4)}(p_4 - p_2 + q) \delta^{(4)}(p_3 - p_1 - q) \\
&\cdot \overline{u}(p_3) \gamma^\mu u(p_1) \frac{-g_{\mu\nu}}{q^2 + i\varepsilon} \overline{u}(p_4) \gamma^\nu u(p_2) \\
&= -ie^2 Q Q_f (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_4 - p_2 + p_3 - p_1) \\
&\cdot \overline{u}(p_3) \gamma^\mu u(p_1) \frac{1}{q^2} \overline{u}(p_4) \gamma_\mu u(p_2) \\
&= \mathcal{M} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_4 - p_2 + p_3 - p_1)
\end{aligned}
$$

mit dem Impulsübertrag $q^2 = (p_3 - p_1)^2$ (Impulserhaltung).

### 3.6.5 Elektron-Positron-Vernichtung:

Nach den Feynman-Regeln ist das QED-Übergangsmatrixelement für die Elektron-Positron-Vernichtung unter Erzeugung eines Fermion-Antifermion-Paars (Erzeugung neuer Materie an $e^+e^-$-Speicherringen):

$$\mathcal{M} = -ie^2 Q_e Q_f \overline{v}_e(p_2)\gamma_\mu u_e(p_1)\frac{1}{q^2}\overline{u}_f(p_3)\gamma^\mu v_f(p_4)$$

mit $q^2 = (p_1 + p_2)^2 =: s = E^2_{CMS}$ (Schwerpunktsenergie).

Im Schwerpunktsystem gilt: $\sqrt{s} = 2E_e$.

## 3.6.6 Formelsammlung: Wirkungsquerschnitte und Zerfallswahrscheinlichkeiten

Übergangswahrscheinlichkeit pro Raum- und Zeiteinheit ("Goldene Regel"):

$$dw = |S_{fi}|^2 \rho(E_f) dE_f/(V_0 \cdot T).$$

Dabei ist bei Begrenzung der WW auf $V_0$, $T$:

$$|S_{fi}|^2 = |M_{fi}|^2 \cdot V_0 \cdot T \cdot (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i)$$

und $\rho(E_f)$ die Zustandsdichte im Endzustand.

Differentieller Wirkungsquerschnitt für die 2-Körper-Reaktion $a+b \to c+d$ (mit $p_1+p_2 = p_3+p_4$, $s := (p_1+p_2)^2 = E^2_{CMS}$):

$$d\sigma = dw/j_{\text{ein}}$$

mit der einlaufenden Teilchenstromdichte (Lorentz-invariant):

$$\begin{aligned} j_{\text{ein}} &= |\vec{v}_{ab}| \frac{2E_1}{V} \frac{2E_2}{V} = \frac{4}{V^2} [(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{4}{V^2} E_{CMS} |\vec{p}_a^{\,CMS}|. \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \boxed{d\sigma = \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{j_{\text{ein}}} d\text{Lips}}$$

mit dem Lorentz-invarianten Phasenraumelement (Zustandsdichte im Endzustand):

$$d\text{Lips} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_3 + p_4 - p_1 - p_2) \frac{V}{2E_3} \frac{d^3p_3}{(2\pi)^3} \frac{V}{2E_4} \frac{d^3p_4}{(2\pi)^3}.$$

Zerfallsbreite für $n$-Körperzerfall $a \to 1, ..., n$:

$$\boxed{d\Gamma = \frac{|\mathcal{M}|^2}{2E_a} d\text{Lips}}$$

mit

$$d\text{Lips} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i) \prod_{j=1}^{n} \frac{V}{2E_j} \frac{d^3p_j}{(2\pi)^3}.$$

$\Gamma = \int d\Gamma = \frac{1}{\tau}$.

Das Normierungsvolumen $V$ kürzt sich!

# 3.7 Wechselwirkungsprozesse im Standardmodell

## 3.7.1 Feynman-Regeln:

Regeln zur Berechnung der Streumatrixelemente $\mathcal{M}$ in der Stöhrungstheorie, die sich durch die sog. Feynman-Diagramme veranschaulichen lassen.

Faktoren im Streumatrixelement $\mathcal{M}$ für beliebige Streuprozesse bzw. Teichenzerfälle: mit Integration über die 4-Impulse der virtuellen Teilchen ($p^2 \neq m^2$) im Zwischenzustand:

QED:

| | |
|---|---|
| Ein- (auslaufendes) Fermion: | $u_s(p)$ $(\overline{u}_s(p))$ |
| Ein- (auslaufendes) Anti-Fermion: | $v_s(p)$ $(\overline{v}_s(p))$ |
| Ein- (auslaufendes) reelles Photon: | $\varepsilon_\mu(k;\lambda)$ $(\varepsilon^*_\mu(k;\lambda))$ |
| Virtuelles (intermediäres) Photon: | $-i\dfrac{g_{\mu\nu}}{q^2+i\varepsilon}$ |
| Virtuelles Fermion (Propagator): | $i\dfrac{\not{p}+m}{p^2-m^2+i\varepsilon}$ |

Fermion-Photon-Vertex: $-ieQ_f\gamma^\mu(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_f-p_i-q)$

QCD:

Quark-Gluon-Vertex: $-i\frac{g_s}{2}\lambda^a_{\alpha\beta}\gamma^\mu(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_f-p_i-q)$

## Elektroschwache Wechselwirkung:

Ein- (auslaufendes) $Z^0$-, $W^\pm$-Boson: $\varepsilon_\mu(k;\lambda)$ $(\varepsilon^*_\mu(k;\lambda))$

Virtuelles $Z^0$-, $W^\pm$-Boson: $$-i\frac{g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu/M^2}{q^2 - M^2 + i\varepsilon}$$

Virtuelles Higgs–Boson: $$\frac{i}{q^2 - M_H^2 + i\varepsilon}$$

Fermion-Higgs-Boson-Vertex:

$$-i\frac{m_f}{v}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_f - p_i - q)$$

Fermion-$W^\pm$-Vertex:

$$-i\frac{g}{2\sqrt{2}}\gamma^\mu(1-\gamma_5)(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_f - p_i - q)$$

Fermion-$Z^0$-Vertex:

$$-i\frac{g}{2\cos\theta_W}\gamma^\mu[c_L^f(1-\gamma_5) + c_R^f(1+\gamma_5)](2\pi)^4\delta^{(4)}(p_f - p_i - q)$$

## Schwache NC-Kopplungskonstanten:

$$\text{Links}: \ \mathrm{c_L^f} = \mathrm{I_f^3} - \mathrm{Q_f}\sin^2\theta_\mathrm{W}; \quad \text{rechts}: \mathrm{c_R^f} = -\mathrm{Q_f}\sin^2\theta_\mathrm{W};$$

$$\text{Vektor}: \ \mathrm{v_f} = \mathrm{c_L^f} + \mathrm{c_R^f} = \mathrm{I_f^3} - 2\mathrm{Q_f}\sin^2\theta_\mathrm{W};$$

$$\text{Axialvektor}: \ \mathrm{a_f} = \mathrm{c_L^f} - \mathrm{c_R^f} = \mathrm{I_f^3}.$$

$$\overline{u}\gamma^\mu c_L^f(1-\gamma_5) + c_R^f(1+\gamma_5)u = \overline{u}\gamma^\mu(v_f - a_f\gamma_5)u.$$

Weitere fundamentale Wechselwirkungen im Standardmodell (unerläßlich für die Konsistenz der Feldtheorie: endliche Wirkungsquerschnitte, die experimentell überprüft werden können):

### 3.7.2 Selbstwechselwirkung der Eichbosonen

Freie nicht-Abelsche $SU(2) \times U(1)$-Eichfelder:

$$\vec{W}_\mu, B_\mu \longrightarrow W^\pm_\mu, Z^0_\mu, A_\mu$$

mit der Lagrangedichte $(i = 1, ..., 3)$

$$\mathcal{L}^{\text{frei}}_{SU(2)} = -\frac{1}{4} F^i_{\mu\nu} F^{i\mu\nu}$$

mit

$$F^i_{\mu\nu} = \partial_\nu W^i_\mu - \partial_\mu W^i_\nu + g\varepsilon^{ijk} W^j_\mu W^k_\nu$$

oder kurz:

$$\vec{F}_{\mu\nu} = \partial_\nu \vec{W}_\mu - \partial_\mu \vec{W}_\nu + g\vec{W}_\mu \times \vec{W}_\nu.$$

Die zugehörige Bewegungsgleichung nach dem Lagrange-Formalismus ist:

$$\partial_\mu \partial^\mu \vec{W}_\nu - \partial_\nu (\partial^\mu \vec{W}_\mu) = \vec{J}_\nu,$$

eine Wellengleichung für jede Komponente (ohne Lorentz-Eichung) mit neuem Selbstwechselwirkungsquellterm

$$\begin{aligned}\vec{J}_\nu &= -g\vec{W}^\mu \times \vec{F}_{\mu\nu} \\ &= -g\left[\vec{W}^\mu \times \partial_\mu \vec{W}_\nu - \vec{W}^\mu \times \partial_\nu \vec{W}_\mu\right] + g^2 \vec{W}^\mu \times \left(\vec{W}_\mu \times \vec{W}_\nu\right),\end{aligned}$$

d.h. $\mathcal{L}_{\text{Selbst}-\text{WW}} = \vec{J}_\mu \vec{W}^\mu$.

$\Longrightarrow$ 3- und 4-Eichbosonkopplung ($\sim g$ bzw. $\sim g^2$).

Ebenso die Selbstwechselwirkung der Gluonen (QCD), die für das Confinement der Quarks in den Hadronen verantwortlich ist:

### 3.7.3 Higgs-Eichboson-Wechselwirkung

$$\mathcal{L}_{WW} = \frac{g^2}{8} \cdot (H^2 + 2vH)\left[2W_\mu^+ W^{\mu-} + \frac{1}{\cos^2\theta_W} Z_\mu^0 Z^{\mu 0}\right]$$

### 3.7.4 Selbstwechselwirkung des Higgs-Bosons

$$\mathcal{L}_{WW} = -\lambda v H^3 - \frac{\lambda}{4} H^4$$