2 Prinzipien des Standardmodells der Teilchenphysik

2.1 Grundlagen der relativistischen Feldtheorie

2.1.1 Notation und Konventionen

1. Wirkungsquantum $\hbar = 1$, Lichtgeschwindigkeit $c = 1$.

2. 4-Vektoren:

   Raum-Zeit-Koordinaten:

   Kontravariante Koordinaten:

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z).$$

   Kovariante Koordinaten:

$$\begin{aligned} x_\mu &= (x_0, x_1, x_2, x_3) = (t, -x, -y, -z), \\ x_\mu &= g_{\mu\nu} x^\nu \equiv \sum_\nu g_{\mu\nu} x^\nu . \end{aligned}$$

   mit dem metrischen Tensor der Minkowsky-Raum-Zeit:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \equiv g^{\mu\nu},$$

$$g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = 4; \quad g_{\mu\alpha}g^{\alpha\nu} = g^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}$$

und Summation über wiederholte Indizes.

3. Skalarprodukt (invariant):

$$x^2 \equiv x^{\mu}x_{\mu} = t^2 - \vec{x}^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2.$$

4. Energie-Impuls-Vektor:

$$\begin{aligned} p^{\mu} &= (E, \vec{p}) = (E, p_x, p_y, p_z), \\ p_{\mu} &= (E, -\vec{p}) = (E, -p_x, -p_y, -p_z), \end{aligned}$$

$$p^2 \equiv p^{\mu}p_{\mu} = E^2 - \vec{p}^2 = m^2.$$

5. Differentialoperatoren:

$$\begin{aligned} \partial_{\mu} &\equiv \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right), \\ \partial^{\mu} &\equiv \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla}\right). \end{aligned}$$

6. Quantenmechanische Operatoren:

4-Impuls: $\widehat{p}^\mu = i\partial^\mu = i\frac{\partial}{\partial x_\mu} = (i\frac{\partial}{\partial t}, -i\vec{\nabla})$,

$$\widehat{p}^\mu \widehat{p}_\mu = -\partial^\mu \partial_\mu = -\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2\right) = -\Box$$

mit dem d'Alembert-Operator $\Box = \partial^\mu \partial_\mu$.

2.1.2 (Quanten-) Feldtheorie

Klass. Mechanik Hamilton'sche Bewegungs-gleichungen	$\longrightarrow$	Klass. QM Schrödinger-gleichung (Einteilchen-zustände)	$\longrightarrow$	Vielteilchensysteme: 2. Quantisierung (Vielteilchen-grundzustand + Anregungen)
		$\downarrow$ Lorentzinvarianz		
Relativistische Mechanik	$\longrightarrow$	Relativistische Wellen-gleichungen ($\rightarrow$ Antiteilchen)	$\longrightarrow$	Vielteilchensysteme: Feldquantisierung (Vakuum-grundzustand + Teilchen-anregungen)

Die Maxwell-Gleichungen sind das erste Bespiel einer relativistischen Feldtheorie.

Die Lorentz-Symmetrie wurde anhand der Maxwell-Gleichungen entdeckt. Sie vereinheitlicht Raum und Zeit sowie Elektrizität und Magnetismus.

Die erste Quantenfeldtheorie war die QED mit elektromagnetisch gekoppelten Quantenfeldern für elektrisch geladene Materie und elektromagnetisches Feld (Photonen). Sie ist das Muster für alle anderen Wechselwirkungen des Standardmodells.

2.1.3 Symmetrien und Gruppen

2.1.3.1 Rekapitulation: Symmetrien in der Quantenmechanik

Symmetrietransformationen der Wellenfunktion lassen die Schrödingergleichung

$$i\frac{\partial\psi(\vec{x},t)}{\partial t} = \widehat{H}\psi(\vec{x},t)$$

invariant, d.h. die transformierten Zustände

$$\psi'(\vec{x},t) = \widehat{U}\psi(\vec{x},t)$$

erfüllen die gleiche Schrödingergleichung, wenn der Hamiltonoperator $\widehat{H}$ invariant ist unter den Transformationen:

$$\widehat{U}\widehat{H}\widehat{U}^\dagger \equiv \widehat{H},$$

d.h. Hamiltonoperator und Transformationsoperator $\widehat{U}$ vertauschen:

$$[\widehat{H},\widehat{U}] = 0.$$

Die Transformationsoperatoren auf dem Hilbertraum der Wellenfunktionen sind unitäre Transformationen, $UU^\dagger = U^\dagger U = 1,$ damit die Erhaltung der Wahrscheinlichkeit gewährleistet ist, d.h. der Betrag der Wellenfunktion ändert sich nicht.

Beispiele für Symmetrietransformationen der Wellenfunktion ("Rotationen im Hilbertraum"):

1. Zeittranslationen: $\widehat{U} = e^{-i\widehat{H}t}$

   Infinitesimal:
   $$\psi'(\vec{x}, t) = (1 - i\widehat{H}\delta t)\psi(\vec{x}, t) = \psi(\vec{x}, t) + \frac{\partial \psi(\vec{x}, t)}{\partial t}\delta t.$$

2. Räumliche Translationen: $\widehat{U} = e^{-i\widehat{\vec{p}}\cdot\vec{x}}$

   Infinitesimal:
   $$\psi'(\vec{x}, t) = (1 - i\widehat{\vec{p}} \cdot \delta\vec{x})\psi(\vec{x}, t) = \psi(\vec{x}, t) - \delta\vec{x} \cdot \vec{\nabla}\psi(\vec{x}, t).$$

3. Rotationen im Raum: $\widehat{U} = e^{-i\widehat{\vec{J}}\cdot\vec{\alpha}}$

   Infinitesimal:
   $$\psi'_\beta(\vec{x}, t) = (1 - i\widehat{\vec{J}}_{\beta\gamma} \cdot \delta\vec{\alpha})\psi_\gamma(\vec{x}, t).$$

Die infinitesimalen (unitären) Transformationen werden durch die (hermiteschen) Operatoren der konjugierten Observablen (Energie$\leftrightarrow$ Zeit, Impuls$\leftrightarrow$ Ort, Drehimpuls$\leftrightarrow$ Drehwinkel) "erzeugt": Generatoren der Transformationen.

- Die unitären Symmetrietransformationen auf dem Hilbertraum (Phasentransformationen der Wellenfunktion) haben Gruppeneigenschaften mit der Hintereinanderausführung als Gruppenoperation.

  Sie sind spezielle Realisierungen (Darstellungen) der (kontinuierlichen) Symmetriegruppen der Raum- und Zeittranslationen, der räumlichen Rotationen usw.

- Operatoren $\widehat{O}$, die mit dem Hamiltonoperator vertauschen, sind Konstanten der Bewegung und entsprechen erhaltenen Observablen, d.h.

$$i\frac{d\widehat{O}}{dt} = [\widehat{H}, \widehat{O}] = 0.$$

- Observable, die mit dem Hamiltonoperator vertauschen, lassen sich gleichzeitig mit ihm diagonalisieren, d.h. die Eigenzustände von $\widehat{H}$ (stationäre Lösungen der Schrödingergleichung) sind gleichzeitig Eigenzustände von Impuls, Drehimpuls usw. mit festen Eigenwerten.

  Symmetrieoperationen, die mit dem Hamiltonoperator vertauschen, führen zur Entartung der Energieeigenzustände des Hamiltonoperators, d.h. die Eigenzustände zu festen Energieeigenwerten bilden unter den Symmetrietransformationen invariante Unterräume des Hilbertraums (Eigenräume zu den Darstellungen der Symmetrietransformationen mit bestimmter Dimension).

  Die Symmetrieeigenschaften des Hamiltonoperators und Erhaltungssätze erleichtern damit, wie in der klassischen Mechanik, die Lösung der Schrödingergleichung und die Bestimmung der Eigenzustände (orthonormale Basen der Eigenräume).

Beispiel: Drehimpulserhaltung:

- $[\vec{J}, H] = 0$

- $$\left.\begin{array}{l} [J_x, J_y] = iJ_z \\ [J_y, J_z] = iJ_x \\ [J_z, J_x] = iJ_y \end{array}\right\} \quad [J_i, J_j] = i\sum_k \varepsilon_{ijk} J_k \quad (i,j,k = x,y,z)$$

mit

$$\varepsilon_{i,j,k} = \begin{cases} 0, & \text{2 gleiche Indizes} \\ +1, & \text{Indizes gerade Permutation von } x,y,z \\ \text{-1}, & \text{Indizes ungerade Permutation von } x,y,z. \end{cases}$$

Mit $\vec{J}^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$ gilt:

- $[\vec{J}, \vec{J}^2] = 0,$

d.h. gemeinsame Eigenzustände von J_i und $\vec{J}^2$. Spezielle Wahl: J_z und $\vec{J}^2$ bei Spinquantisierungsrichtung in z-Richtung.

J_x, J_y, J_z sind die Erzeugenden (Generatoren) der Drehgruppe $O(3)$, d.h. der Gruppe aller Drehungen im dreidimensionalen Raum, die aus Drehungen um drei unabhängige Achsen zusammengesetzt werden können (3 Euler-Winkel).

Eine Darstellung (Realisierung) der Drehgruppe $O(3)$ sind reelle orthogonale 3×3-Drehmatrizen, die die Vektoren im Raum drehen, ohne ihren Betrag zu ändern, und durch $9-6 = 3$ unabhängige Parameter (z.B. die Euler-Winkel) beschrieben werden.

Die Gruppe $O(3)$ läßt sich auf die Gruppe $SU(2)$ abbilden; beide Gruppen sind verwandt in dem Sinne, daß die kleinen Transformationen und die Generatoren identisch sind.

Die definierende (und fundamentale) Darstellung der $SU(2)$-Gruppe sind die komplexen unitären 2×2-Matrizen mit Determinante $= 1$, die ebenfalls durch $3 = 8 - 5$ unabhängige Parameter beschrieben werden.

Allgemein:

Die Gruppe $SU(N)$ der speziellen unitären Transformationen (Transformationen mit $U^\dagger U = 1$ und Det(U)$= 1$) in N Dimensionen besitzt $2N^2 - N^2 - 1 = N^2 - 1$ Parameter und ebensoviele Generatoren. Die Generatoren sind hermitesch und quantenmechanische Observable (z.B. "Ladungen" zu inneren Symmetrien der Teilchen).

Alternative Variable der Drehimpulsgruppe:

- $J^+ = J_x + iJ_y, \quad J^- = J_x - iJ_y$

mit

- $[J_z, J^+] = J^+, \quad [J_z, J^-] = -J^-$
- $[J+, J^-] = 2J_z$

und damit

- $[\vec{J}^2, J^\pm] = 0.$

Es gilt: $\vec{J}^2 = \frac{1}{2}(J^+J^- + J^-J^+) + J_z^2.$

Eigenzustände der Drehimpulsoperatoren:

Simultan:

$$\begin{aligned} \vec{J}^2|j,m> &= j(j+1)|j,m>, \\ J_z|j,m> &= m|j,m>, \end{aligned}$$

definiert $(2j+1)$-dimensionale Eigenräume des Drehimpulses (und damit Hamiltonoperators) zu den Eigenwerten $j = 0, 1/2, 1, 3/2, ...$ und $m = -j, -j+1, ..., j-1, j$ von $\vec{J}^2$ und J_z (Singuletts, Dubletts, Tripletts usw.).

$J^\pm$ sind Auf- und Absteigeoperatoren in jedem Eigenraum:

$$\begin{aligned} J^+|j,m> &= |j,m+1> \quad (m<j), \\ &= 0 \quad\quad\quad\quad\quad (m=j), \\ J^-|j,m> &= |j,m-1> \quad (m>-j), \\ &= 0 \quad\quad\quad\quad\quad (m=-j). \end{aligned}$$

Beispiel:

Spin $\frac{1}{2}$-Zustände mit Eigenwerten $j = 1/2$, $m = \pm 1/2$.

3 unabhängige hermitesche 2×2-Spinmatrizen mit Spur $= 0$ (entspricht Determinante $= 1$ für die von ihnen erzeugten Rotationsmatrizen), die Pauli'schen Spinmatrizen:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{\sigma}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot I.$$

in der Pauli-Darstellung, in der die Eigenwerte (s.o.) zur Eigenvektorbasis

$$\begin{aligned} |\frac{1}{2}, +\frac{1}{2} > &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} > &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

evident sind, d.h. mit $\vec{J} \equiv \frac{1}{2}\vec{\sigma}$ gilt

$$\begin{aligned} \vec{J}^2 \, |\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2} > &= \frac{3}{4} \, |\frac{1}{2}, +\frac{1}{2} >, \\ J_z \, |\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2} > &= \pm\frac{1}{2} \, |\frac{1}{2}, +\frac{1}{2} > . \end{aligned}$$

Die Auf- und Absteigeoperatoren reduzieren sich auf Projektionsoperatoren auf die beiden Zustände Spin up/down:

$$
\begin{aligned}
J^+ = \frac{1}{2}(\sigma_x + i\sigma_y) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
J^- = \frac{1}{2}(\sigma_x - i\sigma_y) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

2.1.3.2 Gruppentheorie: Grundlagen der Lie-Gruppen

Relevante Symmetriegruppen für innere Symmetrien der Teilchen und Eichsymmetrien:

Unitäre Transformationen (QM) und kontinuierlich erzeugte Transformationen, die sich aus infinitesimal kleinen Transformationen nahe der Einheitstransformation I,

$$g(\delta\alpha) = I + i\delta\alpha^a T^a + \mathcal{O}(\delta\alpha^2),$$

zusammensetzen lassen.

α^a sind die unabhängigen Gruppenparameter ("Winkel") und T^a hermitesche Operatoren, die Erzeugenden oder Generatoren der Gruppe.

Alle Gruppenelemente werden erzeugt in der Form

$$g(\alpha) = e^{i\alpha^a T^a}.$$

Die Transformationen sind unitär, wenn die Generatoren hermitesch sind.

Kontinuierliche Gruppen dieser Art heißen Lie-Gruppen.

Die Generatoren einer Lie-Gruppe spannen einen Vektorraum auf und erfüllen die Vertauschungsrelation

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c$$

mit den Strukturkonstanten f^{abc}, die für die Symmetriegruppe spezifisch sind.

Mit der Vertauschung als zusätzlicher Operation bilden die Generatoren eine sog. Lie-Algebra.

Aufgrund der Vertauschungsrelation und der identischen Beziehung

$$[T^a,[T^b,T^c]] + [T^b,[T^c,T^a]] + [T^c,[T^a,T^b]] \equiv 0$$

gilt für die Strukturkonstanten die Jacobi-Identität:

$$f^{ade} f^{bcd} + f^{bde} f^{cad} + f^{cde} f^{abd} \equiv 0.$$

Nur, wenn für die Vertauschungsrelation der Basiselemente der Algebra, die Jacobi-Identität erfüllt ist, ist die Algebra eine Lie-Algebra.

Die Lie-Algebra definiert die Symmetriegruppe eindeutig für kleine Transformationen nahe der Einheitstransformation. Die kovariante Ableitung und damit die Lagrangefunktion der lokalen Eichfeldtheorien hängt nur von den infinitesimalen Transformationen und damit nur von der Lie-Algebra der Generatoren ab.

Klassifizierung der Lie-Gruppen und Lie-Algebren:

Die kommutative oder Abelsche Lie-Gruppe ist die Gruppe U(1) der unitären 1-dimensionalen Phasentransformationen $\psi \to e^{i\alpha}\psi$.

Allgemeine Lie-Algebren lassen sich als Summe einfacher Lie-Algebren, die nicht weiter in Summanden zerlegt werden können, und kommutativer Lie-Algebren $U(1)$ darstellen.

Die einfachen (und kompakten) Lie-Algebren lassen sich in 4 Klassen einteilen, die durch Transformationsgruppen definiert sind:

1. Spezielle unitäre Transformationen U N-dimensionaler Vektoren: $SU(N)$,

   mit $U^\dagger U = 1$ und $\mathrm{Det}(U) = 1$. Sie erhalten das komplexe Betragsquadrat der Vektoren.

   Die Generatoren $T = T^\dagger$ lasssen sich darstellen als hermitesche $N \times N$-Matrizen mit $\mathrm{Spur}(T) = 0$. Es gibt $N^2 - 1$ unabhängige Matrizen dieser Art und damit Generatoren.

2. Reelle orthogonale Transformationen O N-dimensionaler Vektoren: $SO(N)$,

   mit $O^T O = 1$ und $\mathrm{Det}(O) = 1$. Sie erhalten das reelle Betragsquadrat der Vektoren.

   $SO(N)$ besitzt $N(N-1)/2$ Generatoren.

3. Sog. symplektische Transformationen N-dimensionaler Vektoren: $Sp(N)$.

4. Sog. exzeptionelle Lie-Algebren: G_2, F_4, E_6, E_7 und E_8.

Bisher wurden $SU(N)$, $SO(10)$ sowie E_6 und E_8 als Eichsymmetrien im Standardmodell und seinen Erweiterungen in Betracht gezogen.

2.1.3.3 Gruppentheorie: Darstellungen von Gruppen

Die Darstellung einer Gruppe G ist definiert als die Abbildung auf eine Gruppe T linearer Transformationen

$$\theta : G \longrightarrow T$$

mit

$$s \in G \longrightarrow D(s) \in T,$$

wobei $D(s)$ eine lineare Transformation auf einem N-dimensionalen Vektorraum V ist, so daß

$$s \cdot t \longrightarrow D(s) \cdot D(t).$$

Es gilt dann $D(e) = I$ und $D(s^{-1}) = D^{-1}(s)$.

Der Vektorraum V ist der Darstellungsraum. Seine Dimension ist die Dimension der Darstellung.

Nach Wahl einer Basis im Darstellungsraum können die linearen Transformationen als $N \times N$-Matrizen dargestellt werden.

Fundamentale Darstellungen sind diejenigen mit der niedrigsten Dimension > 1 (nicht Singulett).

Bei der adjungierten Darstellung einer Lie-Gruppe, wird der Darstellungsraum von den Generatoren der Gruppe aufgespannt.

Bei reduziblen Darstellungen kann der Darstellungsraum in invariante Unterräume zerlegt werden, die (bei unitären Darstellungen) zueinander orthonormale Basen besitzen.

Irreduzible Darstellungen transformieren auf invarianten Darstellungsräumen, die nicht in kleinere invariante Unterräume zerlegt werden können.

Die Suche nach Eigenvektoren und Eigenwerten der Symmetrieoperatoren entspricht der Konstruktion irreduzibler Darstellungen der Symmetriegruppen.

Die Felder der Elementarteilchen müssen nach unitären Darstellungen der Symmetriegruppen der Lagrangefunktion transformieren. Sie gehören Multipletts, den N-dimensionalen Eigenräumen bzw. irreduziblen Darstellungsräumen, der Symmetrietransformationen an.

Für die Lie-Gruppen $SU(N)$ können die Multipletts (irreduzible Darstellungen) aufgrund der Vertauschungsrelationen mit Hilfe der Auf- und Absteigeoperatoren konstruiert werden; siehe Drehimpuls.

Da die Hamiltonfunktion mit dem Masseoperator (kinetische Energie) mit dem Drehimpuls und den Operatoren für andere innere Symmetrien vertauscht, müssen alle Teilchenzustände eines Multipletts einer inneren Symmetrie die gleiche Masse und den gleichen Spin besitzen; andernfalls ist die Symmetrie mehr oder minder gebrochen.

Ausnahme ist die Supersymmetrie, die Bosonen und Fermionen in gemeinsamen Super-Multipletts vereinigt. Die Fermion- und Bosonzustände innerhalb eines Super-Multipletts werden durch die SUSY-Transformationen ineinander übergeführt. Dies ist nur möglich durch eine Erweiterung der Raum-Zeit-Symmetrien in einer neuen Symmetriegruppe.

Beispiele innerer Symmetrien:

1. $U(1)$-Phasentransformationen der Wellenfunktionen (Wahrscheinlichkeitserhaltung und Erhaltung der elektrischen Ladung).

2. Isospinsymmetrie $SU(2)$, analog zur räumlichen Drehimpuls- und Spinsymmetrie.

   Fundamentale Dublettdarstellung:

$$\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \text{ bzw.} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}.$$

3. Schwache Isopsinsymmetrie $SU(2)_W$, Eichsymmetrie der schwachen Wechselwirkung:

   Fundamentale Dublettdarstellung: Quark- und Lepton-Dubletts.

   Fermionen und Antifermionen befinden sich in der gleichen Darstellung und besitzen daher die gleichen schwachen ladungen.

   Die Eichbosonen (W^+, Z^0, W^-) bilden die adjungierte Darstellung entsprechend den drei Generatoren der $SU(2)$; die Triplett-Darstellung ist analog zur Spin 1-Darstellung.

4. $SU(3)$ flavour-Symmetrie der Quarks: Quarkmodell

Es gibt zwei verschiedene fundamentale Triplett-Darstellungen: (u, d, s) und $(\bar{u}, \bar{d}, \bar{s})$.

Quarks und Antiquarks sind in verschiedenen (zueinander konjugierten) Multipletts.

Die Multipletts der Mesonen und Baryonen werden durch Produkte der fundamentalen Darstellungen und Zerlegen in irreduzible Unterräume (Ausreduzieren) gewonnen, z.B.

$$3 \otimes \bar{3} = 1 \oplus 8,$$

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10.$$

$$\bar{3} \otimes \bar{3} \otimes \bar{3} = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10.$$

Baryonen und Antibaryonen (qqq) befinden sich in unterschiedlichen Multipletts, während Mesonen und Antimesonen $(q\bar{q})$ in den gleichen Multipletts auftreten.

2.1.4 Lagrange-Formalismus in der Feldtheorie

2.1.4.1 Lagrange-Formalismus in der klassischen Mechanik

Nach dem Hamiltonschen Prinzip der kleinsten Wirkung in der klassischen Mechanik (siehe z.B. Goldstein: Klassische Mechanik) erhält man die Bewegungsgleichungen durch Variation des Wirkungsintegrals

$$S \equiv \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_i, \dot{q}_i), \tag{1}$$

mit der Lagrangefunktion $L(q_i, \dot{q}_i) = T - V$ als Funktion der verallgemeinerten Koordinaten $q_i(t)$ und ihrer Ableitungen $\dot{q}_i$ $(i = 1, \ldots n)$, aus der Bedingung

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_i, \dot{q}_i) = 0, \tag{2}$$

wobei die Koordinaten an den Endpunkten t_1 und t_2 festgehalten werden.

Die Bewegungsgleichungen liefern die Trajektorien $q_i(t)$, für die die Wirkung S minimal (stationär) wird.

Die Bewegungsgleichungen sind die Euler-Lagrange-Gleichungen:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \tag{3}$$

Kurze Herleitung:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i(t)}\delta q(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(t)}\delta \dot{q}_i(t)\right].$$

Partielle Integration des 2. Terms mit $\delta \dot{q}_i(t) = \frac{d}{dt}\delta q_i(t)$ ergibt

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} dt \, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \frac{d}{dt}\delta q_i &= \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i \\ &= -\int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i, \end{aligned}$$

die 2. Zeile wegen der Randbedingung $\delta q_i(t_1) = 0 = \delta q_i(t_2)$,

und damit

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i(t)} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q.$$

<u>$\delta S = 0$ gilt, falls die Euler-Lagrange-Gleichungen erfüllt sind.</u>

2.1.4.2 Anwendung des Lagrange-Formalismus in der Feldtheorie

(siehe z.B. Landau, Lifshitz: Band II, Klassische Feldtheorie)

Die Feldgleichungen ergeben sich durch Variation der klassichen Wirkung

$$S \equiv \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \tag{4}$$

mit der Lagrangedichte $\mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x))$ als Funktion des Feldes $\phi(x)$ (Kontinuum unendlich vieler Variabler) und seines 4-Gradienten $\partial_\mu \phi(x)$, die die Rolle der Lagrangefunktion

$$L = \int d^3x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = T - V$$

übernimmt.

Das Hamilton-Prinzip, $\delta S = 0$ mit $\delta\phi(t_1, \vec{x}) = 0 = \delta\phi(t_2, \vec{x})$, ist erfüllt, wenn die Euler-Langrage-Bewegungsgleichungen

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi(x))} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi(x)} = 0 \tag{5}$$

erfüllt sind.

Die Feldgleichungen sind relativistisch kovariant, wenn die Lagrangedichte lorentzinvariant, also ein Lorentzskalar ist. Wegen der Randbedingung ändern sie sich nicht, wenn eine totale Divergenz $\partial_\mu A$ zur Lagrangedichte addiert wird.

Die Symmetrien der Feldgleichungen ergeben sich aus den Symmetrien der Lagrangedichte.

Die Quantenzahlen der Elementarteilchen und ihre Wechselwirkungen sind durch Symmetrien der Lagrangedichte bestimmt.

2.1.5 Feldgleichungen für freie Teilchen

Relativistische Wellengleichungen für die fundamentalen Teilchen des Standardmodells.

2.1.5.1 Rekapitulation: Schrödingergleichung

für nicht-relativistische freie Punktteilchen ohne Spin:
$E = \frac{\vec{p}^2}{2m} = T$.

Quantisierung:

$$E \longrightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}; \quad \vec{p} \longrightarrow -i\hbar\vec{\nabla}.$$

$\Longrightarrow$ Wellengleichung:

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\vec{x},t)}{\partial t} = \widehat{H}\psi(\vec{x},t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2\psi(\vec{x},t)$$

mit den ebenen Wellenlösungen

$$\psi(\vec{x},t) = \frac{1}{V}e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$$

zu den Energie- und Impulseigenwerten $E = \hbar\omega$, $\vec{p} = \hbar\vec{k}$.

Mit den Definitionen

$$
\begin{aligned}
\rho &= \psi^*\psi = |\psi|^2 \ (= \frac{1}{V}), \\
\vec{j} &= -\frac{i\hbar}{2m}(\psi^*(\nabla\psi) - (\vec{\nabla}\psi^*)\psi) \ (= \frac{\hbar\vec{k}}{mV} = \rho\frac{\vec{p}}{m} = \rho\vec{v})
\end{aligned}
$$

für die Wahrscheinlichkeitsdichte und die Wahrscheinlichkeitsstromdichte (in Klammern für ebene Wellen) gilt die lokale Erhaltung der Wahrscheinlichkeit (Kontinuitätsgleichung):

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

und damit

$$\frac{d}{dt}\int d^3x\rho = 0.$$

2.1.5.2 Skalare Bosonen: Klein-Gordon-Gleichung

(Gordon, Klein 1926; Pauli, Weisskopf 1934)

für relativistische skalare (Spin 0-) Bosonen (z.B. $\pi^{\pm}$, $K^0/\bar{K}^0$, Higgsfeld): $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$.

Quantisierung ($\hbar = 1$):

$$p^\mu = (E, \vec{p}) \longrightarrow i\partial^\mu = (i\frac{\partial}{\partial t}, -i\vec{\nabla}).$$

$\Longrightarrow$ Wellengleichung:

$$-\frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial t^2} = (-\vec{\nabla}^2 + m^2)\phi(x),$$

$$\boxed{\Longrightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 + m^2\right)\phi(x) \equiv (\Box + m^2)\phi(x) = 0.}$$

Die gleiche Gleichung gilt für das komplex konjugierte Feld (Antiteilchen):

$$(\Box + m^2)\phi^*(x) = 0.$$

Die Feldgleichungen lassen sich aus der Lagrangedichte

$$\boxed{\mathcal{L} = [(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi)^* - m^2 \phi\phi^*] = \mathcal{L}(\phi, \phi^*; \partial^\mu \phi, \partial^\mu \phi^*)}$$

nach dem Variationsformalismus von Euler und Lagrange herleiten durch Variation der Felder:

$\delta\phi^*(x)$ ergibt Feldgleichung für $\phi(x)$.

$\delta\phi(x)$ ergibt Feldgleichung für $\phi^*(x)$.

Freie Lösungen sind ebene Wellen:

$$\phi^{\pm}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}\mp\omega t)}$$

zu den Energieeigenwerten $E = \pm\omega$ mit $\omega = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$.

Die globale $U(1)$-Eichsymmetrie der Lagrangedichte unter Phasentransformationen der Felder (siehe Beispiel) führt zu dem lokalen Erhaltungssatz (Kontinuitätsgleichung)

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$$

für die 4-Wahrscheinlichkeitsstromdichte $j^\mu = (\rho, \vec{j})$:

$$\begin{aligned} j^\mu &= -i\frac{1}{2m}\cdot\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\phi - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^*)}\phi^*\right) \\ &= -\frac{i}{2m}[(\partial^\mu\phi)^*\phi - (\partial^\mu\phi)\phi^*] \end{aligned}$$

mit $\rho = \pm\frac{1}{V} \cdot \frac{\omega}{m}$ und $\vec{j} = \frac{1}{V} \cdot \frac{\vec{k}}{m}$ für ebene Wellenlösungen (relativistische Verallgemeinerung der Wahrscheinlichkeitserhaltung in der klassichen Quantenmechanik).

Die Wahrscheinlichkeitsdichte ρ für Lösungen mit negativen Energieeigenwerten ist ebenfalls negativ.

Im Rahmen der Quantenfeldtheorie können die ebene Wellen mit negativer Energie als Wellenfunktionen für die Antiteilchen interpretiert werden (s.u.).

Die relativistische Invarianz erlaubt keine konsistente quantenmechanische Interpretation der Einteilchenwellengleichung. Eine Vielteichenquantentheorie ist erforderlich. Die (klassiche) Lagrangedichte ist dennoch für die Untersuchung der Symmetrien und Wechselwirkungen und die meisten Berechnungen ausreichend.

Grenzfall:

Reelle skalare Felder beschreiben Spin 0-Teilchen, die mit ihren Antiteilchen identisch sind (z.B. π^0, Higgsboson).

Die Wellengleichung

$$(\Box + m^2)\phi(x) = 0$$

entspricht der Lagrangedichte

$$\mathcal{L}(\phi, \partial^\mu\phi) = \frac{1}{2}[(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - m^2\phi^2].$$

2.1.5.3 Fermionen: Dirac-Gleichung

(Dirac, 1928)

für relativistische Spin $\frac{1}{2}$-Fermionen (Leptonen und Quarks): $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$.

Quantisierung:

$$E \longrightarrow i\frac{\partial}{\partial t}; \quad \vec{p} \longrightarrow -i\vec{\nabla}.$$

$\Longrightarrow$ Ansatz für die Wellengleichung nur mit 1. Ableitung nach der Zeit (wie Schrödingergleichung nach den Interpretationsproblemen mit der Klein-Gordon-Gleichung) und damit auch nach dem Ort (wegen relativistischer Kovarianz):

$$\begin{aligned} i\frac{\partial\psi}{\partial t} \equiv \widehat{H}\psi &= (\vec{\alpha}\cdot\widehat{\vec{p}} + \beta m)\psi \\ &\equiv (-i\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} + \beta m)\psi \end{aligned}$$

mit Parametern $\vec{\alpha}$, β, die so gewählt werden müssen, daß weiterhin (für jede Komponente des Feldes ψ) die Klein-Gordon-Gleichung erfüllt, d.h. nach 2. Ableitung des Ansatzes nach der Zeit und Einsetzen des Ansatzes für die 1. Ableitung:

$$-\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \equiv \widehat{H}^2\psi = (\widehat{\vec{p}}^{\,2} + m^2)\psi \equiv (-\vec{\nabla}^2 + m^2)\psi$$

Dies ist nur erfüllbar, wenn $\alpha_{1,2,3} = \alpha^\dagger_{1,2,3}$ und $\beta = \beta^\dagger$ hermitesche Matrizen sind mit den Eigenschaften:

1. $\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = \alpha_3^2 = \beta^2 = 1 \implies$ Eigenwerte $= \pm 1$

2. Antivertauschungsrelationen:

$$\alpha_j \alpha_k + \alpha_k \alpha_j = 0 \quad (j \neq k),$$

$$\alpha_j \beta + \beta \alpha_j = 0 \quad \Longrightarrow \mathrm{Spur}(\alpha_{1,2,3}) = \mathrm{Spur}(\beta) = 0.$$

Damit muß die Dimension der Matrizen gerade sein und mindestens $n = 4$, da es für $n = 2$ neben der Einheitsmatrix I nur 3 linear unabhängige Matrizen gibt, die Pauli'schen Spinmatrizen:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Für $n = 4$ gibt es 16 linear unabhängige Matrizen.

Die folgenden Kombinationen von Matrizen sind am günstigsten für eine raum-zeitlich symmetrische Formulierung der Dirac-Wellengleichung: die Dirac'schen γ-Matrizen:

$$\gamma^0 = \beta, \gamma^1 = \beta\alpha_1, \gamma^2 = \beta\alpha_2, \gamma^3 = \beta\alpha_3,$$

die formal einen 4-Vektor bilden,

$$\gamma^\mu = (\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3), \ \gamma_\mu = g_{\mu\nu}\gamma^\mu = (\gamma^0, -\gamma^1, -\gamma^2, -\gamma^3),$$

bei Lorentztransformationen aber invariant bleiben.

Damit ist die relativistisch kovariante Dirac-Gleichung:

$$\boxed{(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0}$$

d.h.

$$\left[i(\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla}) - m \cdot I\right]\psi = 0.$$

Die Fermionfelder sind 4-komponentig: 4-Spinoren.

Die γ-Matrizen haben die folgenden Eigenschaften:

- $\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \cdot I.$
- $\gamma^\mu \gamma_\mu = g_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu = 4 \cdot I.$
- $\gamma^{0\dagger} = \gamma^0$, $\gamma^{j\dagger} = -\gamma^j$.

Eine gebräuchliche Darstellung der γ-Matrizen ist (Pauli-Dirac-Darstellung: γ^0 diagonal):

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \; \gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ -\sigma_j & 0 \end{pmatrix}.$$

Der adjungierte Spinor, definiert durch

$$\overline{\psi} := \psi^\dagger \gamma^0,$$

erfüllt die adjungierte Dirac-Gleichung:

$$\overline{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) = 0.$$

Das Produkt $\overline{\psi}\psi$ ist im Gegensatz zu $\psi^\dagger\psi$ lorentzinvariant (Lorentz-Skalar).

Die lorentzinvariante Lagrangedichte für freie Dirac-Teilchen ist damit:

$$\boxed{\mathcal{L} = \overline{\psi}(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x)}$$

Variation $\delta\overline{\psi}$ liefert als Feldgleichung die Dirac-Gleichung.

Variation $\delta\psi$ liefert als Feldgleichung die adjungierte Dirac-Gleichung.

Lösungen der freien Dirac-Gleichung sind ebene Wellen mit 4 internen Spinorfreiheitsgraden,

zu zwei (positiven und negativen Energieeigenwerten $E = \pm\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ und zu zwei Spineinstellungen $s = 1, 2$ (up/down bzgl. der z-Richtung),

die ein Orthonormalsystem bilden:

$$\psi^+(x) = u_s(p)e^{-ip_\mu x^\mu}; \quad \psi^-(x) = v_s(p)e^{+ip_\mu x^\mu}$$

mit den Spinorkomponenten

$$u_1(p) = \sqrt{\frac{E+m}{V}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x+ip_y}{E+m} \end{pmatrix}; \; u_2(p) = \sqrt{\frac{E+m}{V}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x-ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix};$$

$$v_1(p) = \sqrt{\frac{|E|+m}{V}} \begin{pmatrix} \frac{p_x-ip_y}{|E|+m} \\ \frac{-p_z}{|E|+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; v_2(p) = \sqrt{\frac{|E|+m}{V}} \begin{pmatrix} \frac{p_z}{|E|+m} \\ \frac{p_x+ip_y}{|E|+m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dabei ist $p_\mu x^\mu = Et - \vec{p}\cdot\vec{x}$ und $u_s^\dagger u_s = v_s^\dagger v_s = 2E/V$.

Interpretation der Zustände:

1) Feynman-Stückelberg-Bild:

- $u_s(p)$ $(E > 0)$: in pos. Zeitrichtung einlaufendes Fermion;
- $\overline{u}_s(p)$ $(E > 0)$: in pos. Zeitrichtung auslaufendes Fermion;
- $v_s(p)$ $(E < 0)$: in neg. Zeitrichtung einlaufendes Anti-Fermion;
- $\overline{v}_s(p)$ $(E < 0)$: in neg. Zeitrichtung auslaufendes Anti-Fermion.

2) <u>QFT-Bild</u>:

Freie Feldoperatoren:

- $\widehat{\psi}_f(x)$: vernichtet Fermionen $(u_s(p))$,
  erzeugt Antifermionen $(v_s(p))$.

- $\widehat{\overline{\psi}}_f(x)$: vernichtet Antifermionen $(\overline{v}_s(p))$,
  erzeugt Fermionen $(\overline{u}_s(p))$.

Bei Wahl der Spinrichtung entlang der Impulsrichtung (Spin-Quantisierungsachse) können folgende Spinzustände definiert werden:

Linkshändige Fermionen $\psi_L = P_L \psi$: Spin und Impuls antiparallel.

Rechtshändige Fermionen $\psi_R = P_R \psi$: Spin und Impuls parallel.

Die Projektionsoperatoren $P_L = P_L^2$ und $P_R = P_R^2$, mit $P_L P_R = P_R P_L = 0$ und $P_R + P_L = 1$, sind gegeben durch:

$$P_L = \frac{1-\gamma_5}{2} = P_L^\dagger, \quad P_R = \frac{1+\gamma_5}{2} = P_R^\dagger.$$

Dabei ist der Chiralitätsoperator γ_5 ist gegeben durch

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \gamma_5^\dagger$$

mit den Eigenzuständen (Chiralitätsspinorzustände):

$$\gamma_5 \psi_R = \psi_R, \quad \gamma_5 \psi_L = -\psi_L,$$

wobei

$$\begin{aligned} \overline{\psi}_L &= (P_L \psi)^\dagger \gamma^0 = \overline{\psi} P_R, \\ \overline{\psi}_R &= (P_R \psi)^\dagger \gamma^0 = \overline{\psi} P_L. \end{aligned}$$

Die Helizität $h = \frac{\vec{s} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|}$ hängt vom Bezugsystem ab, außer für masselose Teilchen.

Es gilt:

- $\gamma_5^2 = I.$
- $\gamma^\mu \gamma_5 + \gamma_5 \gamma^\mu = 0.$
- $\gamma_5 P_R = -P_R$, $\gamma_5 P_L = -P_L.$
- $\gamma^\mu P_L = P_R \gamma^\mu$, $\gamma^\mu P_R = P_L \gamma^\mu.$

In der Pauli-Dirac-Darstellung (γ^0 diagonal) hat γ_5 die Form

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}.$$

Ergänzung:

Die Weyl-Darstellung ist dadurch definiert, daß γ_5 diagonal ist mit den den Chiralitäten der Spinorzustände als Eigenwerten:

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}.$$

γ^0 hat in dieser Darstellung die Form

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{pmatrix},$$

während die anderen γ-Matrizen $\gamma_{1,2,3}$ ihre Form behalten.

2.1.5.4 Photonen: Elektromagnetisches Feld

Maxwell-Gleichungen $(c = 1)$:

(Maxwell 1864)

(i) $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0; \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t};$ (Randbedingungen)

(ii) $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0; \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t};$ (freies Feld)

(ii′) $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho; \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}.$ (mit Quellen)

mit der elektrischen Ladungsdichte $\rho(x)$ und der elektrischen Stromdichte $\vec{j}(x)$, für die ein Erhaltungssatz (Kontinuitätsgleichgung) gilt:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0,$$

der unmittelbar aus (ii′) durch Berechnung des Gradienten folgt.

Die Gleichungen (i) für die elektromagnetischen Felder $\vec{E}(x)$ und $\vec{B}(x)$ sind automatisch erfüllt, wenn diese durch ein skalares Potential $\Phi(x)$ und ein Vektorpotential $\vec{A}(x)$ ausgedrückt werden:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}; \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

Eichinvarianz der Lösungen der Maxwell-Gleichungen

unter den Transformationen

$$\Phi(x) \longrightarrow \Phi(x) - \frac{\partial \chi(x)}{\partial t}; \qquad \vec{A}(x) \longrightarrow \vec{A}(x) + \vec{\nabla} \cdot \chi(x)$$

mit einem beliebigen skalaren Feld $\chi(x)$.

Die Maxwell-Gleichungen sind Lorentz-kovariant. Die Lichtgeschwindigkeit ist in allen bewegten Bezugssystemen die gleiche (Entdeckung der Speziellen Relativitätstheorie 1905).

Relativistisch kovariante Schreibweise:

Mit dem 4-Potential $A^\mu = (\Phi, \vec{A})$ und dem antisymmetrischen Feldtensor, definiert durch dessen 4-Rotation

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu = -F^{\nu\mu}$$

mit

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ -E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix},$$

erhalten die Maxwell-Gleichungen die Form:

(i) $\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} = 0;$

(ii) $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0;$

(ii′) $\partial_\mu F^{\mu\nu} = -j^\nu.$

Aus (ii′) und der Definition des Feldtensors (aufgrund von (i)) folgt durch Anwendung der 4-Divergenz unmittelbar die kovariante Form der Kontinuitätsgleichung zur Ladungserhaltung:

$$\partial_\nu j^\nu = -\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$$

mit der elektrischen 4-Stromdichte $j^\mu(x) = (\rho(x), \vec{j}(x))$.

Die Erhaltung der elektrischen Ladung ist damit mit der Eichsymmetrie der elektromagnetischen Feldgleichungen verbunden.

Die Lösungen der Maxwellgleichungen für die Felder sind invariant unter der Eichtransformation des 4-Potentials:

$$A^\mu(x) \longrightarrow A^\mu(x) - \partial^\mu \chi(x).$$

Potentialschreibweise der Maxwell-Gleichungen

durch Einsetzen der Definition des Feldtensors:

$$
\begin{array}{llcl}
(\mathrm{ii}') & -\partial_\mu F^{\mu\nu} & = & \partial_\mu F^{\nu\mu} \equiv \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) \\
 & & = & \partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\
 & & = & \Box A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) = j^\nu; \\
 & (\mathrm{ii}) & & \Box A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) = 0.
\end{array}
$$

Ohne Quellen (im Vakuum) erhält man durch geeignete Wahl der Eichung (Lorentz-Eichung)

$$A^\mu \longrightarrow A^{\mu\prime} = A^\mu - \partial^\mu \chi,$$

so daß

$$\partial_\mu A^{\mu\prime} \equiv 0,$$

d.h. Wahl des Feldes $\chi(x)$, so daß

$$\partial_\mu \partial^\mu \chi \equiv \Box \chi = \partial_\mu A^\mu.$$

Damit gilt die bekannte Wellengleichung für das elektromagnetische Potential:

$$\Box A^\nu = 0.$$

Jede Komponente von $A^\nu(x)$ erfüllt daher die Klein-Gordon-Gleichung für ein masseloses Teilchen.

Lösungen der freien elektromagnetischen Wellengleichung

sind ein- bzw. auslaufende ebene Wellen

$$
\begin{aligned}
A^{\mu+}(x) &= \frac{1}{\sqrt{V}}\varepsilon_\mu(k,\lambda)e^{-ik_\mu x^\mu}, \\
A^{\mu-}(x) &= \frac{1}{\sqrt{V}}\varepsilon^*_\mu(k,\lambda)e^{ik_\mu x^\mu}
\end{aligned}
$$

mit dem Wellenvektor $k^\mu = p^\mu/\hbar$ mit $k_\mu k^\mu = k^2 = m_\gamma^2 \equiv 0$ und 2 transversalen Polarisationsfreiheitsgraden:

$$\varepsilon_\mu(\lambda = \pm 1) = (\varepsilon^0, \vec{\varepsilon}) = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, \pm i, 0)$$

(zirkulare Polarisation mit Helizitäten $\lambda = \frac{\vec{k}\cdot\vec{s}}{|\vec{k}||\vec{s}|} = \pm 1$, $\vec{k}||\hat{z}$).
Aus der Bedingung $\partial_\nu A^\nu = 0$ für die Lorentz-Eichung folgt die Randbedingung $k_\mu \varepsilon^\mu = 0$.

Die Funktion $\chi(x)$ der Lorentz-Eichung kann so gewählt werden, daß auch $\vec{k}\cdot\vec{\varepsilon} = 0$,

d.h. es gibt aufgrund der Eichinvarianz keine longitudinale Polarisation ($\lambda = 0$) der elektromagnetischen Wellen bzw. der masselosen Photonen, sie läßt sich durch Eichtransformation eliminieren.

Die Maxwell-Gleichungen beschreiben also ein Photonfeld mit Spin 1 und Masse 0, das nur zwei Helizitätszustände parallel und antiparallel zum Wellenvektor besitzt.

Die Masselosigkeit des Photons und das Verschwinden des transversalen Helizitätsfreiheitsgrads des 4-Vektorfelds des Photons sind beides miteinander verknüpfte Konsequenzen der Eichfreiheit.

Die elektrisch neutralen Photonen sind mit ihren Antiteilchen identisch.

Der Feldoperator $\widehat{A}^{\mu}(x)$ des elektromagnetischen Feldes erzeugt und vernichtet Photonzustände, entsprechend den ein- und auslaufenden Photonen im Feynman-Stückelberg-Bild.

Das gleiche gilt für reelle, massive Bosonfelder mit Spin 0 (Higgs-Boson).

Lagrangedichte für das elektromagnetische Feld

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{4} (\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu)(\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu) \end{aligned}$$

ergibt nach den Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \right) = 0$$

die Feldgleichungen im Vakuum und

$$\boxed{\mathcal{L} = -\tfrac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j^\nu A_\nu}$$

die Feldgleichungen mit Quellen, wie leicht zu verifizieren ist.

2.1.5.5 Massive Vektorfelder

Durch Einführung eines lorentzinvarianten Masseterms in der Lagrangedichte analog zur Klein-Gordon-Gleichung,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}M^2 A^\nu A_\nu$$

erhält man die Wellengleichung (Proca-Gleichung) für Spin-1 Bosonen mit Masse M (z.B. $W^\pm$, Z^0):

$$\begin{aligned} \partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + M^2 A^\nu &= 0, \\ \Box A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) + M^2 A^\nu &= 0. \end{aligned}$$

Die 4-Divergenz des ersten Terms der Gleichung verschwindet, so daß für massive Vektorfelder immer gilt $\partial_\mu A^\mu \equiv 0$, d.h. die Eichfreiheit ist durch Fixierung der Eichung verloren. Damit gilt für jede Komponente des Feldes $A^\nu(x)$ die Klein-Gordon-Gleichung mit Masse:

$$[\Box + M^2]A^\nu = 0$$

mit der Nebenbedingung $\partial_\mu A^\mu = 0$. Der Massenterm in $\mathcal{L}$ ist offensichtlich nicht invariant unter der Eichtransformation des 4-Potentials.

Um die Eichinvarianz auch für massive Vektorbosonen zu retten, wird der Higgs-Mechanismus mit spontaner Brechung der Eichsymmetrie benötigt.

Die ebenen Wellenlösungen für freie massive Vektorbosonen besitzen im Gegensatz zum Photon 3 Polarisationfreiheitsgrade mit zusätzlicher longitudinaler Polarisation bzw. transversaler Helizität $\lambda = 0$:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_\mu(k; \lambda = \pm 1) &= \mp\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, \pm i, 0); \\
\varepsilon_\mu(k; \lambda = 0) &= \mp\frac{1}{M}(k, 0, 0, E).
\end{aligned}$$

mit $k_\mu = (E, 0, 0, k)$, $k_\mu k^\mu = E^2 - k^2 = M^2$

und $k_\mu \varepsilon^\mu = 0$.