2.2 Symmetrien der Elementarteilchen

2.2.1 Diskrete Symmetrien

Symmetrien der freien Teilchen (Beispiel: Fermionen) und der elektromagnetischen und starken, nicht der schwachen Wechselwirkung:

1. Parität P (Raumspiegelung):

   $\vec{x} \longrightarrow -\vec{x}$, $\vec{p} \longrightarrow -\vec{p}$.

   $$\psi(t,\vec{x}) \longrightarrow \psi^P(t,-\vec{x}) = \eta_P \gamma^0 \psi(t,\vec{x})$$

   erfüllt die raumgespiegelte Dirac-Gleichung.

2. Zeitinversion T: $t \longrightarrow -t$.

   $$\psi(t,\vec{x}) \longrightarrow \psi^T(-t,\vec{x}) = i\gamma^1\gamma^3 \psi^*(t,\vec{x})$$

   erfüllt die zeitgespiegelte Dirac-Gleichung.

3. Ladungskonjugation C:

   Teilchen $\longrightarrow$ Antiteilchen, $Q_f \longrightarrow -Q_f$.

   $$\psi(t,\vec{x}) \longrightarrow \psi^C(t,\vec{x}) = i\eta_C \gamma^2 \psi^*(t,\vec{x})$$

   erfüllt die konjugierte Dirac-Gleichung.

$\Longrightarrow$ CPT-Symmetrie,

$\Longrightarrow$ gleiche Lebensdauern und Massen von Teilchen und Antiteilchen.

CPT-Erhaltung gilt allgemein für jede lokale, lorentzinvariante Feldtheorie mit $\mathcal{L}^\dagger = \mathcal{L}$ und Spin-Statistik-Relation (und damit für alle Wechselwirkungen).

(Schwinger 1951, Pauli 1955, Lüders 1957).

Skalare wie $\overline{\psi}\psi$ sind invariant unter Raumspiegelung.

Pseudoskalare wie $\overline{\psi}\gamma^5\psi$ wechseln das Vorzeichen unter Raumspiegelung.

(4-) Vektoren wie $\overline{\psi}\gamma^\mu\psi$ (Strom): Zeitkomponente erhalten, Richtungsumkehr der Raumkomponente bei Raumspiegelung.

(4-) Axialvektoren wie $\overline{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi$: Raumkomponente erhalten, Vorzeichenwechsel der Zeitkomponente bei Raumspiegelung.

Erhaltene Quantenzahlen bei der elektromagnetischen und starken Wechselwirkung:

- Leptonflavour,
- Quarkflavour,

und auch bei der schwachen Wechselwirkung:

- Leptonzahl,
- Leptongenerationenzahl (außer bei Neutrinooszillationen),
- Baryonenzahl (Quarks).

2.2.2 Symmetrien und Erhaltungssätze

Mit Hilfe des Lagrange-Formalismus kann man leicht die Verbindung zwischen Symmetrien der Feldgleichungen und erhaltenen physikalischen Observablen bzw. Quantenzahlen der Teilchen verifizieren.

Das ist der Inhalt des Noether-Theorems (E. Noether, 1918):

Mit jeder kontinuierlichen Symmetrietransformation (Invarianz bis auf totale Divergenz) der Lagrangefunktion ist ein Erhaltungssatz verbunden.

Beispiele:

2.2.2.1 Der Energieerhaltungssatz in der klassischen Mechanik

(siehe z.B. Landau, Lifshitz, Band I, Klassische Mechanik)

folgt nach dem Noether-Theorem aus der Homogenität der Zeit, d.h. aus der Kovarianz der Bewegungsgleichungen und der Invarianz der Lagrange-Funktion unter Zeittranslationen:

$$t \longrightarrow t' = t + \delta t.$$

Damit ist die Variation der Lagrange-Funktion für ein abgeschlossenes System ohne explizite Zeitabhängigkeit:

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dt} &= \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i \\ &= \sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right)\end{aligned}$$

unter Benutzung der Euler-Lagrange-Gleichungen.

Damit gilt der Erhaltungssatz

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L\right) = 0$$

für die Gesamtenergie

$$E = H = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = \sum_i p_i \dot{q}_i - L.$$

Da $L(q_i, \dot{q}_i) = T(q_i, \dot{q}_i) - V(q_i)$ für abgeschlossene Systeme und $T \sim \dot{q}_i^2$, gilt

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T$$

und damit

$$E = T + V = H.$$

2.2.2.2 Erhaltungssätze in der Feldtheorie

1) Phasentransformation der (komplexen) Felder:
U(1)-Eichsymmetrie:

$$\begin{aligned}\phi(x) &\longrightarrow \phi'(x) = e^{iQ\alpha}\phi(x),\\ \phi^*(x) &\longrightarrow \phi^{*\prime}(x) = e^{-iQ\alpha}\phi^*(x).\end{aligned}$$

Führt zu infinitesimalen Variationen der Felder

$$\begin{aligned}\phi(x) &\longrightarrow \phi'(x) = \phi(x) + \delta\phi(x) = \phi(x) + iQ(\delta\alpha)\phi(x),\\ \phi^*(x) &\longrightarrow \phi^{*\prime}(x) = \phi^*(x) + \delta\phi^*(x) = \phi^*(x) - iQ(\delta\alpha)\phi^*(x)\end{aligned}$$

und es gilt $\delta(\partial_\mu\phi) = iQ(\delta\alpha)\partial_\mu\phi$, da $\delta\alpha$ eine nicht ortsabhängige Konstante ist.

Falls die Lagrangedichte $\mathcal{L}(\phi, \phi^*, \partial_\mu\phi, \partial_\mu\phi^*)$ eichinvariant ist, gilt mit den Euler-Lagrange-Gleichungen für beliebige $\delta\alpha$:

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^*}\delta\phi^* + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^*)}\delta(\partial_\mu\phi^*)\\ &= \left[\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right]iQ(\delta\alpha)\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}iQ(\delta\alpha)\partial_\mu\phi + c.c.\\ &= iQ(\delta\alpha)\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\phi\right] - iQ(\delta\alpha)\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^*)}\phi^*\right] \equiv 0,\end{aligned}$$

d.h. es gilt die Kontinuitätsgleichung für die 4-Stromdichte $j^\mu = (\rho, \vec{j})$ der Ladung $Q = \int d^3x\rho$

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{\partial}{\partial t}\rho + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0 \qquad (1)$$

mit

$$j^\mu \equiv -iQ\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\phi - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^*)}\phi^*\right), \tag{2}$$

so daß die Ladung Q in einem abgeschlossenen System eine Erhaltungsgröße ist:

$$\frac{d}{dt}Q = 0.$$

Innere (globale) Eichsymmetrien der Teilchenfelder führen zu erhaltenen Ladungen, internen Quantenzahlen.

2) Raum-Zeit-Translation (o.E. infinitesimal):

$$x_\mu \longrightarrow x'_\mu = x_\mu + \delta x_\mu .$$

Falls $\mathcal{L}$ forminvariant unter der Transformation ist, ändert sich $\mathcal{L}$ um

$$\delta\mathcal{L} = \mathcal{L}[x'] - \mathcal{L}[x] = \delta x^\nu \frac{d\mathcal{L}}{dx^\nu} = \delta x^\nu \partial_\nu \mathcal{L} \equiv \delta x_\mu g^{\mu\nu} \partial_\nu \mathcal{L}. \quad (3)$$

Mit

$$\delta\phi = \phi(x') - \phi(x) = \delta x^\mu \partial_\mu \phi(x) \cdot$$

und

$$\delta(\partial_\mu \phi) = \partial_\mu \phi(x') - \partial_\mu \phi(x) = \delta x^\nu \partial_\nu \partial_\mu \phi(x)$$

gilt außerdem bei Abhängigkeit der Lagrangedichte von den Raum-Zeit-Koordinaten nur über die Felder $\phi(x)$:

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi).$$

Mit den Euler-Lagrange-Gleichungen kann man $\partial\mathcal{L}/\partial\phi$ eliminieren, so daß

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L} &= \left[\partial_\nu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi)}\right]\delta x^\mu \partial_\mu\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi)}\delta x^\mu \partial_\mu\partial_\nu\phi && (4)\\
&= \partial_\nu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi)}\delta x^\mu\partial_\mu\phi\right]. && (5)
\end{aligned}$$

Nach Gleichsetzen der Ausdrücke (3) und (5) für $\delta\mathcal{L}$ gilt für beliebige δx^μ:

$$\delta x_\mu \partial_\nu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi)}\partial^\mu\phi - g^{\mu\nu}\mathcal{L}\right] = 0, \qquad (6)$$

d.h. es gilt die Kontinuitätsgleichung

$$\partial_\mu\Theta^{\mu\nu} = 0 \qquad (7)$$

für den Energie-Impuls-Spannungsdichte-Tensor (in eckigen Klammern in Gl.(6)):

$$\Theta^{\mu\nu} \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi)}\partial^\mu\phi - g^{\mu\nu}\mathcal{L}. \qquad (8)$$

(Dieser Tensor ist die Quelle für die Gravitation bzw. Raumkrümmung in der ART.)

Es folgt u.a. die Kontinuitätsgleichung für die Energieflußdichte:

$$\partial_\mu \Theta^{\mu 0} \equiv \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{H} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{P}} = 0, \tag{9}$$

wobei

$$\Theta^{00} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)}\partial^0 \phi - \mathcal{L} = 2\mathcal{T} - \mathcal{L} = \mathcal{T} + \mathcal{V} = \mathcal{H} \tag{10}$$

die Energiedichte $\mathcal{H}$ und entsprechend $\Theta^{0\nu} \equiv \mathcal{P}^\nu$ die 4-Impulsdichte sind.

Damit gelten nach (9) für die Gesamtenergie (Hamiltonfunktion) $H \equiv \int d^3x \Theta^{00}$ bzw. für den 4-Impuls $P^\nu \equiv \int d^3x \Theta^{0\nu}$ in einem abgeschlossenen System die Erhaltungssätze

$$\frac{d}{dt}H = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt}P^\nu = 0. \tag{11}$$

Auf analoge Weise führt die Rotationssymmetrie des Raums zur Drehimpulserhaltung und erhaltenen internen Spinquantenzahlen ($O(3)$- bzw. $SU(2)$-Symmetrie des Raums).

Rotationen der Raum-Zeit entsprechen der Lorentz-Invarianz (Relativitätstheorie).

2.3 Eichsymmetrien und Wechselwirkungen

2.3.1 Globale Eichinvarianz

Für Quantenfelder können die Gesetze der elektromagnetischen Wechselwirkung aus einem Eichprinzip hergeleitet werden (H. Weyl 1921, 1929).

Die Erwartungswerte quantenmechanischer Observabler (einschließlich der Lagrangefunktion!)

$$< \mathcal{O} >= \int \psi^* \mathcal{O} \psi$$

sind invariant unter globalen Phasenrotationen der Wellenfunktion

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = e^{i\alpha} \psi(x).$$

Nur relative Phasen zwischen Zuständen sind meßbar.

Die Invarianz der Lagrangefunktion (Forminvarianz der Wellengleichung) unter Phasenrotationen entspricht einer globalen U(1)-Symmetrie, genannt “Eichsymmetrie”, die nach dem Noether'schen Theorem zur Erhaltung der Wahrscheinlichkeit und von Ladungen führt.

U(1) ist die Gruppe der unitären Transformationen mit der niedrigsten Dimension 1; Phasenrotationen sind eine Darstellung (Realisierung) der Gruppe auf dem Raum der komplexen Wellenfunktionen.

2.3.2 Lokales Eichprinzip

Die quantenmechanischen Erwartungswerte sollen invariant sein unter lokaler Phasenwahl der Wellenfunktionen oder Felder, d.h. unabhängig an verschiedenen Raum-Zeit-Punkten:

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = e^{i\alpha(x)}\psi(x).$$

Ortsabhängige Phasentransformationen (lokale Eichtransformationen) bedeuten für die Ableitungen der Felder in den Wellengleichungen:

$$\partial_\mu\psi(x) \longrightarrow \partial_\mu\psi'(x) = e^{i\alpha(x)}[\partial_\mu\psi(x) + i(\partial_\mu\alpha(x))\psi(x)].$$

Invarianz der Lagrangedichte und Forminvarianz der Wellengleichungen kann erreicht werden, indem die gewöhnliche Ableitung durch eine eich-kovariante Ableitung ersetzt wird:

$$\partial_\mu \longrightarrow D_\mu \equiv \partial_\mu + iqA_\mu(x),$$

wobei q die elektrische Ladung des Feldes $\psi(x)$ ist und $A_\mu(x)$ das 4-Potential des elektromagnetischen Feldes, das sog. Eichvektorfeld zur Eichgruppe U(1), das unter den Phasenrotationen transformiert wie

$$A_\mu(x) \longrightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{q}\partial_\mu\alpha(x)$$

($\equiv$ Eichtransformation des elektromagnetischen Feldes).

Damit gilt

$$
\begin{aligned}
D_\mu\psi(x) &= \partial_\mu + iqA_\mu \longrightarrow \\
D'_\mu\psi'(x) &= (\partial_\mu + iqA'_\mu(x))e^{i\alpha(x)}\psi(x) \\
&= e^{i\alpha(x)}[\partial_\mu + i\partial_\mu\alpha(x) + iqA_\mu(x) - i\partial_\mu\alpha(x)]\psi(x) \\
&= e^{i\alpha(x)}[\partial_\mu + iqA_\mu(x)]\psi(x) \equiv e^{i\alpha(x)}D_\mu\psi(x)
\end{aligned}
$$

und $\psi^* D_\mu \psi$ ist invariant unter lokalen Phasentransformationen.

Dies wurde durch die Einführung einer Wechselwirkung für das Feld ψ, der elektromagnetischen Wechselwirkung für die U(1)-Phasentransformationen, erreicht.

Die globale U(1)-Symmetrie der Feldgleichungen für $\psi(x)$ führt zur Erhaltung der elektrischen Ladung, der Quellen des Eichfeldes, auch bei Wechselwirkung mit dem elektromagnetischen Feld. Die Eichfeldgleichungen mit der zugehörigen Eichinvarianz enthalten automatisch Ladungserhaltung.

Die Wechselwirkung (Kopplungsterme zwischen Materiefeld $\psi(x)$ und Eichwechselwirkungsfeld $A_\mu(x)$) ist (eindeutig) festgelegt durch die Forderung der lokalen Phaseninvarianz, das lokale Eichprinzip, d.h. durch die kovariante Ableitung

$$D_\mu\psi(x) = \partial_\mu\psi(x) + iqA_\mu(x)\psi(x)$$

(minimale eichinvariante Kopplung).

Die Ersetzung

$$i\partial_\mu \longrightarrow iD_\mu = i\partial_\mu - qA_\mu$$

entspricht ($p_\mu \longrightarrow i\partial_\mu$) der Ersetzung

$$P_\mu \longrightarrow P_\mu - qA_\mu$$

für den kanonischen Impuls bei Einführung der Wechselwirkung mit dem elektromagnetischen Feld in der klassischen Mechanik.

Beispiel 1:

Elektromagnetische Wechselwirkung zwischen Fermionen (Elektronen) und dem Photonfeld (QED):

Die Lagrangedichte für das freie Dirac-Feld

$$\mathcal{L}_{\mathrm{frei}} = \overline{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi$$

wird ersetzt durch die lokal eichinvariante Form mit minimaler Kopplung

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \overline{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi \\
&= \overline{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - qA_\mu \overline{\psi}\gamma^\mu\psi \\
&= \mathcal{L}_{\mathrm{frei}} - j^\mu A_\mu
\end{aligned}$$

mit dem (erhaltenen) elektromagnetischen Strom $j^\mu = q\overline{\psi}\gamma^\mu\psi$.

Zusammen mit der Lagrangedichte für das freie elektromagnetische Feld ist die Lagrangedichte der Quantenelektrodynamik:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{QED} &= \mathcal{L}_{\mathrm{frei}}^{\mathrm{Photon}} + \mathcal{L}_{\mathrm{frei}}^{\mathrm{Fermion}} + \mathcal{L}_{\mathrm{WW}} \\
&= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \overline{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - j^\mu A_\mu \\
&= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \overline{\psi}i\gamma^\mu \partial_\mu\psi - m\overline{\psi}\psi - j^\mu A_\mu \\
&= \mathcal{L}_{\mathrm{kin}}^{\mathrm{Photon}} + \mathcal{L}_{\mathrm{kin}}^{\mathrm{Fermion}} + \mathcal{L}_{\mathrm{Masse}}^{\mathrm{Fermion}} + \mathcal{L}_{\mathrm{WW}} = T - V.
\end{aligned}$$

Die Beiträge zur gesamten Lagrangedichte sind additiv und erfüllen die U(1)-Eichinvarinz.

Beispiel 2:

Elektromagnetische Wechselwirkung zwischen geladenen Spin-0-Bosonen und dem Photonfeld:

Die Lagrangedichte für das freie Klein-Gordon-Feld

$$\mathcal{L}_{\text{frei}} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$$

wird ersetzt durch die lokal eichinvariante Form mit minimaler Kopplung

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + D_\mu \phi^* D^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi \\
&= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi \\
&\quad -iq[\phi^* \partial^\mu \phi - (\partial^\mu \phi^*) \phi] A_\mu + q^2 A_\mu A^\mu \phi^* \phi \\
&= \mathcal{L}_{\text{frei}} - j^\mu A_\mu + q^2 A_\mu A^\mu \phi^* \phi \\
&= \mathcal{L}_{\text{kin}}^{\text{Photon}} + \mathcal{L}_{\text{kin}}^{\text{Boson}} + \mathcal{L}_{\text{Masse}}^{\text{Boson}} + \mathcal{L}_{\text{WW}}.
\end{aligned}$$

Dabei ist $j^\mu = iq[\phi^* \partial^\mu \phi - (\partial^\mu \phi^*) \phi]$ der erhaltene elektromagnetische Strom für die freien Bosonen.

Nach dem Noether-Theorem hat der erhaltene Strom für die an das Photonfeld koppelnden Bosonen eine andere Form. Der Wechselwirkungsterm erhält einen zusätzlichen Beitrag in der Form einer Kontaktwechselwirkung zwischen Photonen und Materie-Bosonen (eich- und lorentzinvariant).

2.3.3 Nicht-Abelsche Eichsymmetrien

Erweiterung der Isospinsymmetrie $SU(2)$ zu einer lokalen Eichsymmetrie
(Yang, Mills 1954):

Freie Lagrangefunktion für Nukleonen (Proton, Neutron):

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi} I (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi.$$

Proton und Neutron bilden dabei ein Isotopenspindublett (2-dimensionale Darstellung der Isospingruppe).

$$\psi = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}.$$

Beide Fermionfelder $p(x)$ und $n(x)$ sind jeweils 4-Spinoren.

Die freie Lagrangefunktion ohne Wechselwirkung ist diagonal im 2-dimensionalen Isospinraum (2-dim. Einheitsmatrix I) und invariant unter globalen Isospinrotationen

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = e^{i\vec{\alpha}\cdot\vec{I}}\psi(x) = e^{i\vec{\alpha}\cdot\vec{\tau}/2}\psi(x),$$

wobei $\vec{\tau}$ der 3-Isovektor der Pauli'schen 2×2 Spinmatrizen ist (die drei Generatoren der Isospingruppe $SU(2)$, $\vec{I} = \vec{\tau}/2$, in der fundamentalen 2-dimensionalen Darstellung; Bezeichnung $\vec{\tau}$ statt $\vec{\sigma}$ für den Isospin).

Wie bei der $U(1)$-Symmetrie der elektromagnetischen Wechselwirkung:

Übergang zu einer lokalen $SU(2)$-Eichsymmetrie, d.h. Forderung nach Invarianz der Lagrangefunktion und Feldgleichungen unter lokalen Eichtransformationen

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = e^{i\vec{\alpha}(x)\cdot\vec{\tau}/2}\psi(x) \equiv G(x)\psi(x).$$

Damit transformiert der 4-Gradient des Feldes wie

$$\partial_\mu\psi(x) \longrightarrow G(x)(\partial_\mu\psi(x)) + (\partial_\mu G(x))\psi(x).$$

$\Longrightarrow$ Einführen einer kovarianten Ableitung (kovariant unter den lokalen Eichtransformationen $G(x)$):

$$D_\mu(x) = I\partial_\mu + igB_\mu(x)$$

mit der 2×2-Einheitsmatrix I auf dem Isospinraum und einer Kopplungskonstanten g, die die Stärke der Eichwechselwirkung angibt.

Das Eichvektorfeld $B_\mu(x)$ ist eine 2×2-Matrix auf dem Isospinraum, definiert durch ($a = 1, 2, 3$):

$$\begin{aligned} B^\mu(x) &= \frac{1}{2}\vec{\tau} \cdot \vec{b}^\mu(x) = \frac{1}{2}\tau_a b_a^\mu(x) \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} b_3^\mu(x) & b_1^\mu(x) - ib_2^\mu(x) \\ b_1^\mu(x) + ib_2^\mu(x) & -b_3^\mu(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit dem Isovektor $\vec{b}_\mu = (b_1^\mu, b_2^\mu, b_3^\mu)$ der drei Eichvektorfelder $b_i(x)$, die den drei Generatoren (Ladungsoperatoren) der $SU(2)$-Eichsymmetrie $\vec{I} = \vec{\tau}/2$ entsprechen.

Um die lokale nicht-Abelsche $SU(2)$-Eichsymmetrie zu erhalten, müssen also 3 neue Eichvektorpotentiale eingeführt werden, die 3 Eichbosonfeldern entsprechen, die die Eichwechselwirkungen vermitteln.

(Dies erinnert an die 3 Austauschteilchen $W^\pm$ und Z^0 der schwachen Wechselwirkung, die ebenfalls globale $SU(2)$-Symmetrie besitzt, aber an Quark- und Leptonfelder koppelt.)

Die kovariante Ableitung soll unter lokalen Eichtransformationen ebenso transformieren wie die Felder, um die lokale Eichinvarianz der Lagrangefunktion zu gewährleisten, d.h.

$$D_\mu\psi \longrightarrow D'_\mu\psi' = G(x)(D_\mu\psi).$$

Diese Forderung definiert das Transformationsverhalten der Eichvektorfelder:

$$\begin{aligned} D'_\mu \psi' &= (\partial_\mu + igB'_\mu)\psi' \\ &= G(\partial_\mu \psi) + (\partial_\mu G)\psi + igB'_\mu(G\psi) \\ &\equiv G(\partial_\mu + igB_\mu)\psi \\ &= G(\partial_\mu \psi) + igG(B_\mu \psi) \end{aligned}$$

und damit

$$igB'_\mu(G\psi) = igG(B_\mu\psi) - (\partial_\mu G)\psi$$

für beliebige Werte des Nukleonfelds ψ, d.h. nach Multiplizieren mit G^{-1}:

$$\begin{aligned} B'_\mu &= GB_\mu G^{-1} + \frac{i}{g}(\partial_\mu G)G^{-1} \\ &= G\left[B_\mu + \frac{i}{g}G^{-1}(\partial_\mu G)\right]G^{-1}. \end{aligned}$$

Dies ist die nicht-Abelsche Verallgemeinerung der $U(1)$-Eichtransformation des elektromagnetischen Potentials (Isoskalar), die analog lautet:

$$\begin{aligned} A'_\mu &= G_{EM} A_\mu G_{EM}^{-1} + \frac{i}{q}(\partial_\mu G_{EM})G_{EM}^{-1} \\ &\equiv A_\mu - \partial_\mu \alpha(x) \end{aligned}$$

mit der lokalen $U(1)$-Eichtransformation

$$G_{EM}(x) = e^{iq\alpha(x)}.$$