2.5 Ursprung der Massen der Elementarteilchen

- Nur ein masseloses Spin-1 Teilchen beobachtet: Photon $\longrightarrow U(1)_Q$-Eichsymmetrie.

- Die schwache Wechselwirkung ist kurzreichweitig. $\Longrightarrow$ schwere Feldquanten.

- Explizite Massenterme für Eichbosonen (Proca-Gleichung) verletzen die lokale Eichsymmetrie der Lagrange-Funktion, explizite Massenterme für die Fermionen (Dirac-Gleichung) brechen die globale $SU(2)_L$-Eichsymmetrie.

- Die Eichsymmetrie ist aber verantwortlich und notwendig für die Aufhebung von Divergenzen in jeder Ordnung der Störungstheorie, d.h. die Renormierbarkeit der elektroschwachen Theorie (wie in der QED).

Ausweg:

Sog. spontane Brechung der Symmetrie des Grundzustands (des Vakuums der Feldtheorie),

während die volle Eichsymmetrie der Lagrange-Funktion und der Feldgleichungen erhalten bleibt:

$$SU(2)_L \otimes U(1)_Y \xrightarrow{SSB} U(1)_Q$$

("verborgene Eichsymmetrie").

Motivation:

Konstruktion in Analogie zu Phasenübergängen 2. Ordnung in der Festkörperphysik: SSB unterhalb der kritischen Temperatur.

Ordnungsparameter (z.B. Magnetisierung) nimmt spontan und diskontinuierlich einen von Null verschiedenen Wert im Grundzustand an.

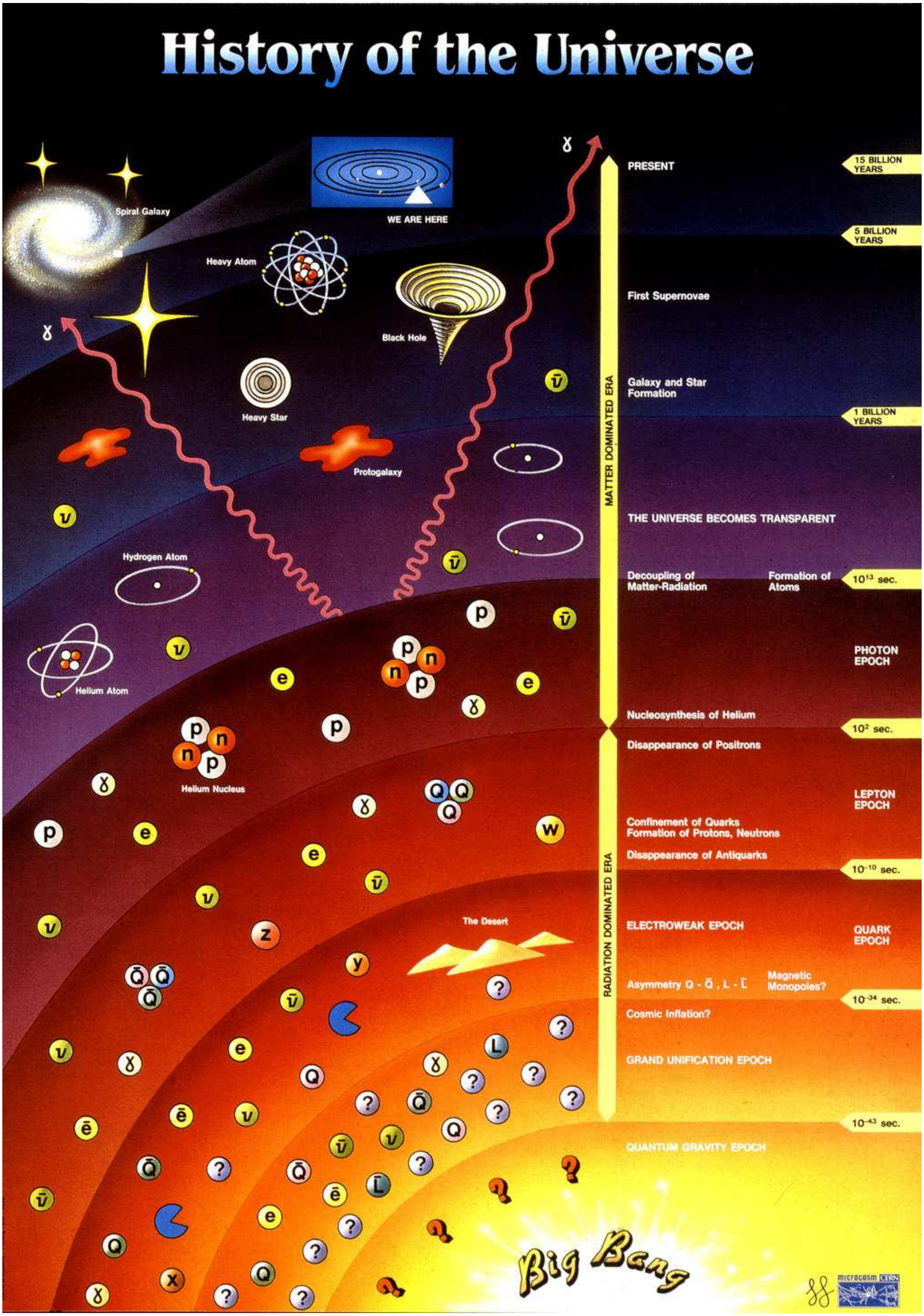
In der Teilchenphysik: Volle Symmetrie des Vakuums wiederhergestellt bei hohen Energien,

d.h. Phasenübergänge mit spontaner Symmetriebrechung bei Abkühlung des expandierenden frühen Universums.

In der Theorie der Phasenübergänge (Ginzburg-Landau-Theorie) entspricht der Ordnungsparameter einem selbstwechselwirkenden skalaren Feld, das im Grundzustand einen von Null verschiedenen Erwartungswert annimmt.

Goldstone-Theorem:

Für jeden Generator einer globalen kontinuierlichen Symmetrie der Bewegungsgleichungen, die im Grundzustand gebrochen ist, tritt ein masseloses skalares Teilchen (Goldstone-Boson) auf.


History of the Universe
Spiral Galaxy
WE ARE HERE
Heavy Atom
Black Hole
Heavy Star
Protogalaxy
Hydrogen Atom
Helium Atom
Helium Nucleus
The Desert
PRESENT
First Supernovae
Galaxy and Star Formation
THE UNIVERSE BECOMES TRANSPARENT
Decoupling of Matter-Radiation
Formation of Atoms
Nucleosynthesis of Helium
Disappearance of Positrons
Confinement of Quarks Formation of Protons, Neutrons
Disappearance of Antiquarks
ELECTROWEAK EPOCH
Asymmetry $Q - \bar{Q}$, $L - \bar{L}$
Magnetic Monopoles?
Cosmic Inflation?
GRAND UNIFICATION EPOCH
QUANTUM GRAVITY EPOCH
MATTER DOMINATED ERA
RADIATION DOMINATED ERA
15 BILLION YEARS
5 BILLION YEARS
1 BILLION YEARS
10^{13} sec.
PHOTON EPOCH
10^{2} sec.
LEPTON EPOCH
10^{-10} sec.
QUARK EPOCH
10^{-34} sec.
10^{-43} sec.
Big Bang
microcosm CERN

Goldstone-Bosonen sind (wegen der Eichsymmetrie) energielose Anregungen, die die durch die gebrochenen Symmetrie-Generatoren erreichbaren (ineinander transformierbaren) Grundzustände verbinden (Quasiteilchenanregungen in der Festkörperphysik, z.B. Phononen).

Als Elementarteilchen wurden sie nicht beobachtet.

Bei lokaler Eichsymmetrie transformieren die Goldstone-Bosonen mittels Eichtransformationen zu den gebrochenen Generatoren als longitudinale Polarisationsfreiheitsgrade der Eichbosonen, die dadurch eine Masse erhalten (Higgs-Mechanismus).

Analogie zum Supraleiter im Magnetfeld:

Durch lokal eichinvariante, elektromagnetische Wechselwirkung mit den Cooper-Paarkondensat im kohärenten supraleitenden Grundzustand (Ordnungsparameterfeld) wird das Photonfeld aus dem Supraleiter abgeschirmt und erhält eine effektive Masse (endliche Reichweite, Eindringtiefe).

Die lokale $U(1)$-Phasensymmetrie (Teilchenzahlerhaltung) wird im kohärenten Grundzustand gebrochen.

2.5.1 (Minimaler) Higgs-Mechanismus im Standardmodell

Zusätzliches komplexes, skalares Feld, $SU(2)_L$-Dublett,

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi^+ \\ \Phi^0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{ccc} Q & I^0 & Y = 2(Q - I^0) \\ +1 & +\frac{1}{2} & +1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & +1 \end{array}$$

mit schwacher und elektromagnetischer Wechselwirkung (4 Freiheitsgrade).

Erfüllt die Klein-Gordon-Gleichung mit $SU(2)_L \times U(1)_Y$-eichinvarianter Lagrange-Dichte:

$$\mathcal{L}_{\text{Skalar}} = (D_\mu\Phi)^\dagger(D^\mu\Phi) - V(\Phi^\dagger\Phi) = T - V$$

mit

$$D_\mu = \partial_\mu \cdot 1 + i\frac{g'}{2}YB_\mu \cdot 1 + i\frac{g}{2}\vec{\tau} \cdot \vec{W}_\mu$$

und dem Selbstwechselwirkungspotential ($\lambda > 0$):

$$V(\Phi^\dagger\Phi) = \mu^2(\Phi^\dagger\Phi) + \lambda(\Phi^\dagger\Phi)^2.$$

$|\Phi|$ ist der Ordnungsparameter in Analogie zur Ginzburg-Landau-Theorie (freie Energie ersetzt Lagrangedichte).

Für $\mu^2 < 0$ ist der Grundzustand (kin. Energie $T = 0$, $V = V_{\mathrm{min.}}$) bei einem von Null verschiedenen Betrag des Skalarfelds (Vakuumerwartungswert $|\Phi_0| = v/\sqrt{2}$):

$$\frac{\partial V}{\partial |\Phi|} = 2\mu^2 |\Phi_0| + 4\lambda |\Phi_0|^3 = 0.$$

$$\Longrightarrow |\Phi_0| = \sqrt{\frac{-\mu^2}{2\lambda}} =: \frac{v}{\sqrt{2}}.$$

Die Mannigfaltigkeit (Unterraum) im Φ-Raum, auf der $V(\Phi^\dagger \Phi)$ minimal wird, ist $SU(2)_L \times U(1)_Y$-invariant.

Durch Auswahl eines der möglichen Grundzustände,

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

wird die $SU(2)_L \times U(1)_Y$-Symmetrie spontan gebrochen.

Eine $U(1)_Q$-Phasensymmetrie des Vakuums, entsprechend der Erhaltung der elektrische Ladung bleibt, wie beobachtet, ungebrochen zurück:

$$SU(2)_L \otimes U(1)_Y \xrightarrow{SSB} U(1)_Q.$$

Generatoren T, die den Grundzustand Φ_0 invariant lassen:

$$e^{iT\alpha}\Phi_0 = \Phi_0 \Longrightarrow T\Phi_0 = 0.$$

Für die gebrochenen $SU(2)_L \times U(1)_Y$-Generatoren gilt:

$$
\begin{aligned}
\tau_1 \Phi_0 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{v}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0; \\
\tau_2 \Phi_0 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\frac{v}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0; \\
\tau_3 \Phi_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{v}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0; \\
Y \Phi_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \neq 0; \\
\frac{(\tau_3 - Y)}{2} \Phi_0 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \neq 0;
\end{aligned}
$$

während die elektrische Ladung erhalten bleibt:

$$
Q\Phi_0 = \frac{1}{2}(\tau_3 + Y)\Phi_0 = 0.
$$

(orthogonal zum Generator $(\tau_3 - Y)/2$, der dem Z^0_μ-Eichfeld entspricht).

Eine Parametrisierung von Feldanregungen aus dem Grundzustand Φ_0 (Quasiteilchenanregungen):

$$\Phi(x) = e^{i\frac{\vec{\tau}\vec{\zeta}(x)}{2v}} \begin{pmatrix} 0 \\ (v + H(x))/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

mit der reellen radialen Anregung $H(x)$ (skalares Higgs-Boson: massiv, gegen die Rückstellkraft des Potentials V) und den reellen Winkelanregungen $\zeta_i(x)$ $(i = 1, ..., 3)$, die die verschiedenen Grundzustände verbinden.

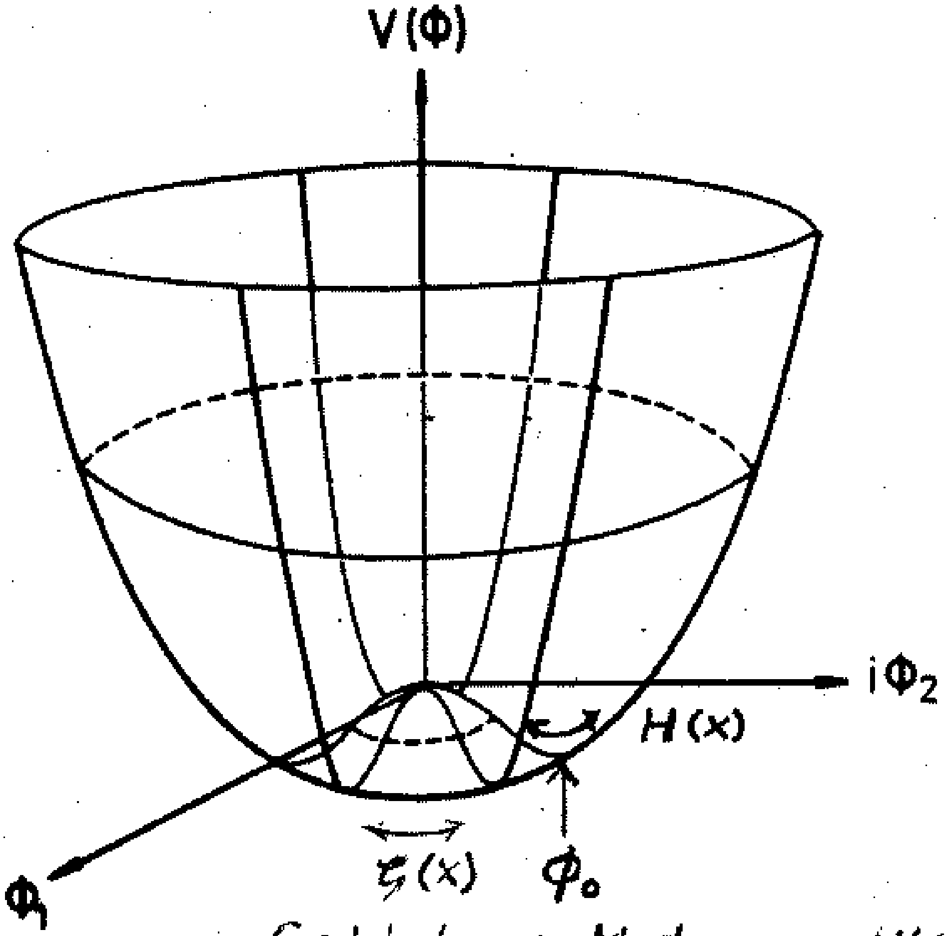
Die masselosen Goldstone-Moden ζ_i werden von den Eichbosonen "absorbiert", die den gebrochenen Generatoren entsprechen.

Dies geschieht durch die lokale $SU(2)_L$-Eichtransformation:

$$\begin{aligned}
\Phi(x) &\longrightarrow \Phi'(x) = e^{-i\frac{\vec{\tau}\vec{\zeta}(x)}{2v}} \Phi(x), \\
L_f(x) &\longrightarrow L'_f(x), \\
R_f(x) &\longrightarrow R_f(x), \\
\vec{W}_\mu(x) &\longrightarrow \vec{W}'_\mu(x), \\
B_\mu(x) &\longrightarrow B_\mu(x)
\end{aligned}$$

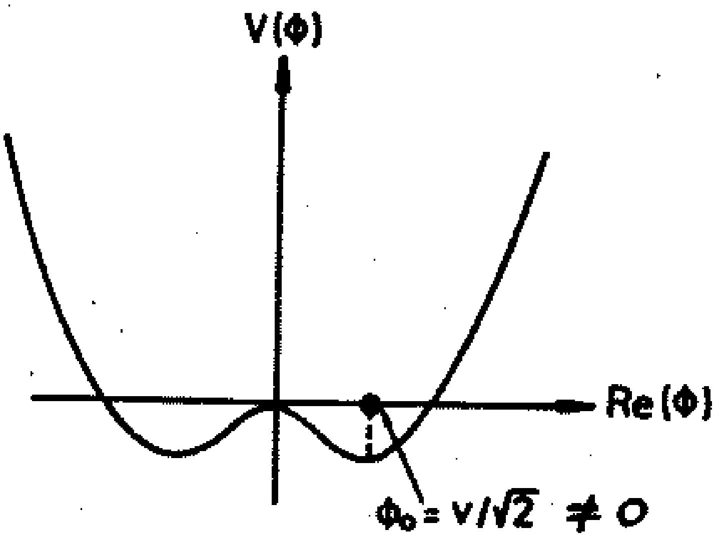
(sog. "unitäre Eichung").

Higgs - Potential:

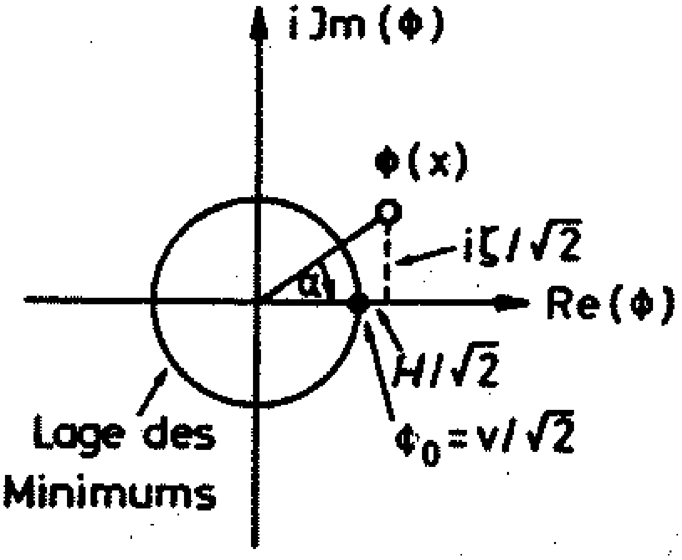


Goldstone Moden ↔ U(1)-Transf

Beispiel: U(1) - Symmetrie des Vakuums gebrochen



(SSB)



Mit $Y_\Phi = +1$ gilt danach:

$$\begin{aligned}
(D_\mu\Phi)' &= (\partial_\mu 1 + ig\frac{\vec{\tau}}{2}\cdot\vec{W}'_\mu + ig'B_\mu 1)\frac{1}{\sqrt{2}}(v+H)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\ \partial_\mu H\end{pmatrix} + \frac{ig}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}(W^{1\prime}_\mu - iW^{2\prime}_\mu)(v+H)\\ 0\end{pmatrix}\\
&+ \frac{i}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\ (g'B_\mu - gW^{3\prime}_\mu)(v+H)\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Einsetzen von $\Phi'(x)$ und $(D_\mu\Phi)'$ in $\mathcal{L}_{\text{Skalar}} = T - V$ ergibt:

$$\begin{aligned}
T &= (D^\mu\Phi)'^\dagger(D_\mu\Phi)'\\
&= \frac{1}{2}\partial^\mu H\partial_\mu H + \frac{g^2(v+H)^2}{8}|W^{1\prime}_\mu - iW^{2\prime}_\mu|^2\\
&+ \frac{(v+H)^2}{8}|g'B_\mu - gW^{3\prime}_\mu|^2\\
&= \frac{1}{2}\partial^\mu H\partial_\mu H + \frac{g^2v^2}{8}(W^+_\mu W^{\mu+} + W^-_\mu W^{\mu-})\\
&+ \frac{g^2v^2}{8\cos^2\theta_W}Z^0_\mu Z^{0\mu}\\
&+ \frac{g^2}{4}(H^2+2vH)\left[W^+_\mu W^{\mu-} + \frac{1}{2\cos^2\theta_W}Z^0_\mu Z^{0\mu}\right].\\
V &= \mu^2\Phi^\dagger\Phi + \lambda(\Phi^\dagger\Phi)^2\\
&= \frac{\mu^2}{2}(v+H)^2 + \frac{\lambda}{4}(v+H)^4 = -\mu^2H^2 + \lambda vH^3 + \frac{\lambda}{4}H^4.
\end{aligned}$$

Alle Wechselwirklungsterme werden genau so benötigt, damit die elektroschwache Theorie störungstheoretisch berechenbar ("renormierbar") ist (durch Eichsymmetrie!).

$$\text{mit} \quad (W_\mu^{1\prime} + iW_\mu^{2\prime})(W^{1\prime\mu} - iW^{2\prime\mu}) \equiv 2W_\mu^+ W^{-\mu} = W_\mu^+ W^{\mu+} + W_\mu^- W^{\mu-}$$

und Rotation mit Weinberg-Winkel θ_W wie beim neutralen Strom (Diagonalisierung der Massenmatrix der neutralen Eichbosonen):

$$Z_\mu^0 = \frac{g' B_\mu - g W_\mu^{3\prime}}{\sqrt{g^2 + g'^2}} = \frac{g}{\cos\theta_W}(g' B_\mu - g W_\mu^{3\prime}).$$

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{L}_{\text{Skalar}} = \frac{1}{2}\left(\partial^\mu H \partial_\mu H - M_H^2 H^2\right) - \lambda v H^3 - \frac{\lambda}{4} H^4$$
$$+ \quad \frac{g^2}{4}(H^2 + 2vH)\left[W_\mu^+ W^{-\mu} + \frac{1}{2\cos^2\theta_W} Z_\mu^0 Z^{0\mu}\right.$$
$$+ \quad \frac{1}{2} M_W^2 (W_\mu^+ W^{\mu+} + W_\mu^- W^{\mu-}) + \frac{1}{2} M_Z^2 Z_\mu^0 Z^{0\mu}.$$

mit

$$\text{Eichbosonen}: M_W = \frac{gv}{2}; \quad M_Z = \frac{gv}{2\cos\theta_W} = \frac{M_W}{\cos\theta_W};$$
$$\text{Higgsboson}: \quad M_H = \sqrt{-2\mu^2} = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} v.$$

$$\text{und} \quad \sin^2\theta_W = 1 - \cos^2\theta_W = 1 - \frac{M_W^2}{M_Z^2}.$$

2.5.2 Massen der Fermionen

Eichinvariante Kopplung der links- und rechtshändigen Fermionen an das Skalarfeld $\Phi(x)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{WW}^{\text{Yukawa}} = & - \sum_{f(\text{up})} g_f \left[\left(\overline{L}_f \overline{\Phi}^* \right) \psi_{fR} + \overline{\psi}_{fR} \left(\overline{\Phi}^T L_f \right) \right] \\ & - \sum_{f(\text{down})} g_f \left[\left(\overline{L}_f \Phi \right) \psi_{fR} + \overline{\psi}_{fR} \left(\Phi^\dagger L_f \right) \right]\end{aligned}$$

(Yukawa-Kopplung vom Typ $-g(\overline{\psi}\psi)\phi$ zuerst für Nukleon-Pion-Kernwechselwirkung eingeführt.)

mit dem $SU(2)_L$-Dublett ($Y_{\overline{\Phi}} = 2(Q - I^0) = -1 = -Y_\Phi$):

$$\overline{\Phi} := i\tau_2 \Phi^* = \begin{pmatrix} \overline{\Phi}^0 \\ -\Phi^- \end{pmatrix} \xrightarrow{SSB} \begin{pmatrix} (v+H)/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wegen der speziellen Eigenschaft der $SU(2)$-Gruppe, daß $\tau_2 \vec{\tau}^* = -\vec{\tau}\tau_2$, gilt unter $SU(2)_L \times U(1)_Y$-Eichtransformationen:

$$\begin{aligned}\overline{\Phi} &= i\tau_2 \Phi^* \longrightarrow (i\tau_2\Phi^*)' = i\tau_2 (U\Phi)^* \\ &= i\tau_2 e^{-i\frac{\vec{\tau}^*}{2}\cdot\vec{\beta}} e^{-i\frac{Y_\Phi}{2}\alpha} \Phi^* \\ &= e^{i\frac{\vec{\tau}}{2}\cdot\vec{\beta}} e^{i\frac{Y_{\overline{\Phi}}}{2}\alpha} (i\tau_2\Phi^*) = U\overline{\Phi}.\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ $SU(2)_L$-Invarianz von $\mathcal{L}_{WW}^{\text{Yukawa}}$:

$$\begin{aligned}
(\overline{L}\Phi)\psi_R &\longrightarrow (\overline{L}U^\dagger U\Phi)\psi_R = (\overline{L}\Phi)\psi_R, \\
\overline{\psi}_R(\Phi^\dagger L) &\longrightarrow \overline{\psi}_R(\Phi^\dagger U^\dagger U L) = \overline{\psi}_R(\Phi^\dagger L).
\end{aligned}$$

(und ebenso für die 'up'-Terme mit $\overline{\Phi}$),

wobei

$L \longrightarrow UL$, $\overline{L} \longrightarrow \overline{L}U^\dagger$, $\psi_R \longrightarrow \psi_R$, $\Phi \longrightarrow U\Phi$ und

$\overline{\Phi} \longrightarrow U\overline{\Phi}$.

$U(1)_Y$-Invarianz von $\mathcal{L}_{WW}^{\text{Yukawa}}$:

durch Aufhebung der Phasenfaktoren der L-und R-Fermionen und des Skalarfelds wegen

$$\begin{aligned}
Y_{\overline{L}} &+ Y_{\overline{\Phi}} + Y_R = +1 - 1 + 0 = 0 \quad (\text{up} - \text{Leptonen}) \\
Y_{\overline{L}} &+ Y_{\Phi} + Y_R = +1 + 1 - 2 = 0 \quad (\text{down} - \text{Leptonen}).
\end{aligned}$$

Einsetzen von $\Phi'(x)$ ergibt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{WW}^{\text{Yukawa}} &= -\sum_f g_f \frac{v+H}{\sqrt{2}} \left(\overline{\psi}_{fL}\psi_{fR} + \overline{\psi}_{fR}\psi_{fL} \right) \\
&\equiv -\sum_f \frac{g_f v}{\sqrt{2}} \overline{\psi}_f \psi_f - \sum_f \frac{g_f}{\sqrt{2}} (\overline{\psi}_f \psi_f) H.
\end{aligned}$$

Damit Dirac-Massenterm mit

$$m_f = \frac{g_f v}{\sqrt{2}}$$

und Yukawa-Kopplung der Fermionen an das Higgsfeld H

$$\frac{g_f}{\sqrt{2}} = \frac{m_f}{v} \sim m_f.$$

Damit $H \to f\bar{f}$ bevorzugt in schwerste Fermionen mit $2m_f \leq M_H$.

Beachte: für Quarks gilt:

Massen- (und flavour-) Eigenzustände $\neq$ schwache Eigenzustände von $SU(2)_L$.