2.5.3 Schwache Wechselwirkung und Massen der Quarks

Experimentelle Beobachtung (schwache Zerfälle von K-, D-, B-Mesonen mit s-, c-, b-Quarks):

Die Masseneigenzustände der Quarks (Massenoperator diagonal; feste Massen) sind <u>verschieden</u> von den schwachen Eigenzuständen der Quarks, den linkshändigen $SU(2)$-Dubletts und den rechtshändigen $SU(2)$-Singuletts (schwache Ladungsoperatoren, $SU(2)$-Generatoren diagonal; feste schwache Ladungen).

Deshalb ist der Quark-Massenterm in der elektroschwachen Lagrange-Funktion nach der spontanen Symmetriebrechung statt

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{Masse}} &= -\sum_q \frac{g_q v}{\sqrt{2}}(\overline{\psi}_{qL}\psi_{qR} + \overline{\psi}_{qR}\psi_{qL}) \\
&\equiv -\sum_q \frac{g_q v}{\sqrt{2}}\overline{\psi}_q\psi_q = -\sum_q m_q\overline{\psi}_q\psi_q
\end{aligned}$$

(vereinfacht durch Annahme einer diagonalen Massenmatrix) allgemeiner von der Form

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{Masse}} &= -\frac{v}{\sqrt{2}}\sum_{i,j}[\overline{\Gamma}_{ij}\overline{u}_{iL}u_{jR} + \overline{\Gamma}^*_{ji}\overline{u}_{jR}u_{iL} \\
&\qquad + \Gamma_{ij}\overline{d}_{iL}d_{jR} + \Gamma^*_{ji}\overline{d}_{jR}d_{iL}] \\
&= -\sum_{i,j}[M^{(u)}_{ij}\overline{u}_{iL}u_{jR} + M^{(u)*}_{ji}\overline{u}_{jR}u_{iL} \\
&\qquad + M^{(d)}_{ij}\overline{d}_{iL}d_{jR} + M^{(d)*}_{ji}\overline{d}_{jR}d_{iL}]
\end{aligned}$$

mit den allgemeinen komplexen Massenmatrizen

$$M_{ij}^{(d)} = \Gamma_{ij}\frac{v}{\sqrt{2}} \text{ und } M_{ij}^{(u)} = \overline{\Gamma}_{ij}\frac{v}{\sqrt{2}}$$

Oder mit der Definition für die up (u)- und down (d)-artigen Quark-Eigenzustände des schwachen Isospins

$$D = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} \text{ und } U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix}$$

in Matrixschreibweise:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Masse}}^{\text{Quarks}} = & - \overline{D}_L M^{(d)} D_R - \overline{D}_R M^{(d)\dagger} D_L \\ & - \overline{U}_L M^{(u)} U_R - \overline{U}_R M^{(u)\dagger} U_L . \end{aligned}$$

(Es gilt $\mathcal{L}^\dagger = \mathcal{L}$ wie verlangt fuer eine Observable.)

Die separaten Massenmatrizen für up- und down-artige Quarks lassen sich diagonalisieren durch separate unitäre Transformationen jeweils für die links- und die rechtshändigen Quark-Zustände:

$$
\begin{aligned}
U_d^\dagger M^{(d)}\, V_d &= M^{(d)}_{\text{diag.}}; \quad U_u^\dagger M^{(u)} V_u = M^{(u)}_{\text{diag.}}; \\
V_d^\dagger M^{(d)\dagger} U_d &= (U_d^\dagger M^{(d)} V_d)^\dagger = M^{(d)*}_{\text{diag.}}; \\
V_u^\dagger M^{(u)\dagger} U_u &= (U_u^\dagger M^{(u)} V_u)^\dagger = M^{(u)*}_{\text{diag.}};
\end{aligned}
$$

mit

$$
\begin{aligned}
D'_L &= U_d^\dagger D_L; \quad U'_L = U_u^\dagger U_L; \\
D'_R &= V_d^\dagger D_R; \quad U'_R = V_u^\dagger U_R.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & \mathcal{L}^{\text{Quarks}}_{\text{Masse}} = \\
- \quad & \overline{D}_L \overbrace{U_d U_d^\dagger}^{=1} M^{(d)} \overbrace{V_d V_d^\dagger}^{=1} D_R - \overline{D}_R \overbrace{V_d V_d^\dagger}^{=1} M^{(d)\dagger} \overbrace{U_d U_d^\dagger}^{=1} D_L \\
- \quad & \overline{U}_L U_u \underbrace{U_u^\dagger M^{(u)} V_u} V_u^\dagger U_R - \overline{U}_R V_u \underbrace{V_u^\dagger M^{(u)\dagger} U_u} U_u^\dagger U_L \\
= \quad & -\overline{D}'_L M^{(d)}_{\text{diag.}} D'_R - \overline{D}'_R M^{(d)*}_{\text{diag.}} D'_L \\
& -\overline{U}'_L M^{(u)}_{\text{diag.}} U'_R - \overline{U}'_R M^{(u)*}_{\text{diag.}} U'_L \\
= \quad & -\overline{D}' M^{(d)}_{\text{diag.}} D' - \overline{U}' M^{(u)}_{\text{diag.}} U'.
\end{aligned}
$$

Die letzte Zeile gilt nach einer $U(1)$-Phasentransformation der Quarkfelder, so daß die Masseneigenwerte reell werden.

Die Lagrange-Funktion für die schwache geladene Stromwechselwirkung der Quarks läßt sich folgendermaßen durch die Masseneigenzustände ausdrücken:

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{L}_{CC}^{\text{Quarks}} = \\
= \quad & -\frac{g}{\sqrt{2}}[j_{CC}^{\mu +}W_\mu^- + j_{CC}^{\mu -}W_\mu^+] \\
= \quad & -\frac{g}{\sqrt{2}}\sum_{i=1}^{3}\Big[(\overline{U}_{Li}\gamma^\mu D_{Li})W_\mu^- + (\overline{D}_{Li}\gamma^\mu U_{Li})W_\mu^+\Big] \\
= \quad & -\frac{g}{\sqrt{2}}\Big[(\overline{U}_L\gamma^\mu 1 D_L)W_\mu^- + (\overline{D}_L\gamma^\mu 1 U_L)W_\mu^+\Big] \\
\equiv \quad & -\frac{g}{\sqrt{2}}\Big[(\overline{U}'_L U_u^\dagger \gamma^\mu U_d D'_L)W_\mu^- + (\overline{D}'_L U_d^\dagger \gamma^\mu U_u U'_L)W_\mu^+\Big] \\
\equiv \quad & -\frac{g}{\sqrt{2}}\Big[\underbrace{(\overline{U}'_L\gamma^\mu V_{CKM} D'_L)}_{=j_{CC}^{\mu +}} W_\mu^- \\
& \qquad + \underbrace{(\overline{D}'_L V_{CKM}^\dagger \gamma^\mu U'_L)}_{=j_{CC}^{\mu -}} W_\mu^+\Big]
\end{aligned}
$$

mit der unitären Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM)-Matrix $V_{CKM} = U_u^\dagger U_d$.

2.5.3.1 Mischung der Quark-Flavours

Die "Quark-Mischungsmatrix" V_{CKM} führt zu geladenen schwachen Übergängen zwischen den Quarkgenerationen, definiert als die Masseneigenzustände der Quarks, die an die elektromagnetische und starke Wechselwirkung koppeln, und gibt verschiedene Gewichte für die Wahrscheinlichkeit der schwachen CC-Übergänge zwischen den up- und down-artigen Masseneigenzuständen der Quarks:

$$\begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} d_C \\ s_C \\ b_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}.$$

Z.B.: $u \longleftrightarrow d_C = V_{ud}d + V_{us}s + V_{ub}b$.

Die Elemente der CKM-Matrix werden vom Standardmodell nicht vorhergesagt, sondern müssen experimentell bestimmt werden. Dies ist ein aktiver Forschungszweig, insbesondere für die Übergänge mit schweren Quarks (c, b, t).

Zahl der unabhängigen Parameter der CKM-Matrix:

Für $n = 2$ Generationen:

Bis zur Entdeckung des bottom-Quarks.

Reelle orthogonale 2×2 Matrix mit 1 reellen Parameter, keine komplexe Phase:

$$\mathrm{Cabibbo-Matrix}: V = \begin{pmatrix} \cos\theta_c & \sin\theta_c \\ -\sin\theta_c & \cos\theta_c \end{pmatrix}.$$

θ_c ist der Cabibbo-Winkel mit $\sin\theta_c \approx 0.23$ und $\cos\theta_c \approx 0.95$.

Für $n = 3$ Generationen:

CKM-Matrix mit 3 reellen Parametern und 1 komplexen Phase: $V^* \neq V$ (möglich nur für ≥ 3 Generationen):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -s_{23}c_{12} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}$$

Mit den 3 Mischungswinkeln θ_{ij} $(i, j = 1, 2, 3; i > j)$, $c_{ij} = \cos\theta_{ij} > 0$, $s_{ij} = \sin\theta_{ij} > 0$, und dem Phasenfaktor $e^{i\delta}$.

Allgemeine Herleitung:

Komplexe $n \times n$-Matrix: $2n^2$ Parameter.

Unitäre Matrix mit n^2 Nebenbedingungen ($V^\dagger V = 1$): n^2 Parameter.

Davon sind $\underline{n(n-1)/2}$ Parameter reell; die übrigen $n^2 - n(n-1)/2 = n(n+1)/2$ Parameter sind komplexe Phasenfaktoren.

Denn eine reelle unitäre Matrix (orthogonale Matrix) mit $n + n(n-1)/2$ Nebenbedingungen ($V^T V = 1$) hat $n^2 - n - n(n-1)/2 = n(n-1)/2$ unabhängige reelle Parameter.

n Phasenfaktoren können in den n U-Feldern durch Neudefinition ihrer Phase absorbiert werden (aus der 1. Spalte der Mischungsmatrix):

$$U_{Lj} \longrightarrow e^{-i\alpha_j^{(u)}} U_{Lj} \quad (j = 1, ..., n).$$

$n-1$ weitere Phasenfaktoren können aus der 1. Reihe der Mischungsmatrix in den $n-1$ D-Feldern absorbiert werden:

$$D_{Lj} \longrightarrow e^{-i\alpha_j^{(d)}} D_{Lj} \quad (j = 2, ..., n),$$

d.h. insgesamt werden $2n-1$ Phasenfaktoren eliminiert.

Danach bleiben $n(n+1)/2 - (2n-1) = \underline{(n-1)(n-2)/2}$ unabhängige Phasenfaktoren übrig.

Die aktuellen Meßwerte für die CKM-Matrixelemente sind:

$\lvert V_{ud}\rvert = 0.9736 \pm 0.0010$	aus nuklearem β- und μ-Zerfall
$\lvert V_{us}\rvert = 0.2205 \pm 0.0018$	aus semilept. Kaon-Zerfällen $K \to \pi e \nu_e$
$\lvert V_{ub}\rvert = (3.6 \pm 0.5) \cdot 10^{-3}$	aus semileptonischen Zerfällen $B \to X_u \ell \nu_\ell$
$\lvert V_{cd}\rvert = 0.224 \pm 0.016$	charm-Quark-Produktionsrate in $\nu(\bar{\nu})$-Kern-Streuung
$\lvert V_{cs}\rvert = 1.01 \pm 0.18$	semileptonische charm-Quark Zerfälle $D \to K e \nu_e$ $(c \to s)$
$\lvert V_{cb}\rvert = 0.040 \pm 0.002$	aus semilept. B-Mesonzerfällen
$\lvert V_{td}\rvert = 0.009 \pm 0.002$	von $B_d^0\overline{B}_d^0$-Mischung
$\lvert V_{td}\rvert < 0.009$ (95% C.L.)	von $B_s^0\overline{B}_s^0$-Mischung
$\lvert V_{td}/V_{ts}\rvert < 0.29$ (95 % C.L.)	von $B_d^0\overline{B}_d^0$- und $B_s^0\overline{B}_s^0$-Mischung
$\lvert V_{td}/V_{ts}\rvert < 0.56$ (90 % C.L.)	von $b \to s\gamma$ Zerfällen
$\lvert V_{ts}/V_{cb}\rvert = 1.1 \pm 0.4$	von $b \to s\gamma$ Zerfällen
$\lvert V_{tb}\rvert > 0.016$ (95 % C.L.)	aus top-Quark-Zerfällen $t \to W^+ b$

$$\begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix}$$

Die Hierarchie der Übergangswahrscheinlichkeiten und der Quarkmassen läßt eine Erklärung durch eine dem Standardmodell übergeordnete Theorie erwarten.

u	**c**	**t**
d	**s**	**b**

Die näherungsweise Wolfenstein-Parametrisierung macht die Rangordnung der Übergänge zwischen den Quark-Generationen (Massen/flavour-Eigenzustände) deutlich:

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} 1-\frac{\lambda^2}{2} & \lambda & A\lambda^3(\rho - i\eta) \\ -\lambda & 1-\frac{\lambda^2}{2} & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1-\rho-i\eta) & -A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\lambda^4),$$

bei der die Matrixelemente nach dem kleinen Parameter λ entwickelt werden.

Die 4 Wolfenstein-Parameter haben die gemessenen Werte:

$$\begin{aligned} \lambda &\equiv s_{12} = 0.2205 \pm 0.0018, \\ A &\equiv s_{23}/\lambda^2 = 0.82 \pm 0.06, \\ \sqrt{\rho^2+\eta^2} &\equiv |V_{ub}|/A\lambda^3 = 0.36 \pm 0.09. \end{aligned}$$

Eine komplexe CKM-Matrix ermöglicht eine Beschreibung der beobachteten schwachen Verletzung der CP-Symmetrie im Rahmen des Standardmodells (mit 6 Quarks in 3 Generationen), hervorgerufen wiederum durch die schwache Wechselwirkung und mit Ursprung in der Fermion-Higgs-Boson-Kopplung bzw. der Quark-Massenmatrix:

Vorschlag von Kobayahi und Maskawa 1973 noch vor der Entdeckung der dritten Fermion-Generation (τ-Lepton 1975, bottom-Quark 1977, top-Quark 1994) und vor der Entdeckung des charm-Quarks 1974.

Denn mit

$$\begin{aligned} j_{CC}^{\mu+} &= \overline{U}_L\gamma^\mu V_{CKM} D_L \xrightarrow{CP} -\overline{D}_L V_{CKM}^T \gamma^\mu U_L; \\ j_{CC}^{\mu-} &= \overline{D}_L V_{CKM}^\dagger \gamma^\mu U_L \xrightarrow{CP} -\overline{U}_L\gamma^\mu V_{CKM}^* D_L; \end{aligned}$$

und

$$W_\mu^\pm \xrightarrow{CP} -W_\mu^\mp.$$

verhält sich $\mathcal{L}_{CC}^{\text{Quarks}}$ unter CP-Transformationen wie

$$\begin{aligned} & (\overline{U}_L\gamma^\mu V_{CKM} D_L)W_\mu^- + (\overline{D}_L V_{CKM}^\dagger \gamma^\mu U_L)W_\mu^+ \\ \xrightarrow{CP}\ & (\overline{D}_L V_{CKM}^T \gamma^\mu U_L)W_\mu^+ + (\overline{U}_L\gamma^\mu V_{CKM}^* D_L)W_\mu^-, \end{aligned}$$

d.h. $\mathcal{L}_{CC}^{\text{Quarks}}$ ist nur CP-invariant, wenn $V^* = V$.

2.5.3.2 Neutrale Ströme der Quarks

$$\mathcal{L}_{NC} = -e j^{\mu}_{\text{el.magn.}} A_\mu - \frac{e}{\sin\theta_W \cos\theta_W}\left[j^{\mu 3} - j^{\mu}_{\text{el.magn.}} \sin^2\theta_W\right] Z_\mu$$

mit dem elektromagnetischen Strom

$$\begin{aligned} j^{\mu}_{\text{el.magn.}} &= Q_u(\overline{U}\gamma^\mu U) + Q_d(\overline{D}\gamma^\mu D) \\ &= Q_u(\overline{U}'\gamma^\mu U') + Q_d(\overline{D}'\gamma^\mu D') \end{aligned}$$

und dem Strom der dritten Komponente des schwachen Isospins

$$\begin{aligned} j^{\mu 3} &= I^3_u(\overline{U}\gamma^\mu U) + I^3_d(\overline{D}\gamma^\mu D) \\ &= \frac{1}{2}(\overline{U}\gamma^\mu U) - \frac{1}{2}(\overline{D}\gamma^\mu D) \\ &= \frac{1}{2}(\overline{U}'\gamma^\mu U') - \frac{1}{2}(\overline{D}'\gamma^\mu D'). \end{aligned}$$

Die neutralen Ströme bleiben flavour-erhaltend für die Masseneigenzustände U', D' wie für die schwachen Eigenzustände U, D wegen der Unitarität der Transformation,

$$U^\dagger_{u,d} U_{u,d} = 1; \quad V^\dagger_{u,d} V_{u,d} = 1,$$

so daß z.B. gilt

$$\begin{aligned}\overline{U}\gamma_\mu U &= \overline{U}_L\gamma_\mu U_L + \overline{U}_R\gamma_\mu U_R \\ &= \overline{U}'_L U_u^\dagger \gamma_\mu U_u U'_L + \overline{U}'_R V_u^\dagger \gamma_\mu V_u U'_R \\ &= \overline{U}'_L\gamma_\mu U'_L + \overline{U}'_R\gamma_\mu U'_R = \overline{U}'\gamma_\mu U'.\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Keine CP-Verletzung in der schwachen neutralen und der elektromagnetischen WW.

Die kinetischen Terme bleiben ebenfalls unverändert.

$\Longrightarrow$ Keine flavour-ändernden Prozesse mit neutralen Strömen (FCNC-Prozesse) in 1. Ordnung im Standardmodell.

Unterdrückung von FCNC-Prozessen auch in höherer Ordnung der schwachen WW: durch den

"**GIM-Mechanismus**" (Glashow, Illiopoulos, Maiani).

Experimentell sind FCNC-Prozesse sehr klein, z.B. ist das Verzweigungsverhältnis

$$BR(K_L^0 \to \mu^+\mu^-) = \frac{\Gamma(K_L^0 \to \mu^+\mu^-)}{\Gamma^{\text{tot}}_{K_L^0}} \approx 9\cdot 10^{-7}\%$$

während $BR(K^+ \to \mu^+\nu_\mu) = 63.5\%$ (typischer schwacher CC-Zerfall).

(NB: Schwacher Zerfall in Myonpaar bevorzugt gegenüber Zerfall in Elektronpaar wegen Drehimpulserhaltung und Paritätsverletzung!)

In 2. Ordnung der schwachen Wechselwirkung ist der Prozeß für den Zerfall $K_L^0 \to \mu^+\mu^-$:

Gegenseitige Aufhebung der Amplituden für up- und charm-Quark-Austausch wegen der Unitariät der CKM-Matrix (Orthogonalität der Cabibbo-Matrix für 2 Generationen):

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_u &\sim \quad g^4 \sin\theta_C \cos\theta_C; \\ \mathcal{M}_c &\sim -g^4 \sin\theta_C \cos\theta_C; \end{aligned}$$

Details abhängig vom Wert der charm-Quark-Masse $m_c \gg m_u$.

$\Longrightarrow$ Vorhersage für die Masse des charm-Quarks: > 1 GeV.

Konsequenzen der Quark-Flavour-Mischung in der schwachen Wechselwirkung:

1. Quark-Flavour-Oszillationen.

2. Verletzung der CP-Symmetrie.

2.6 Grundlagen der Störungsrechnung und Feynman-Graphen

Zur Berechnung von Übergangsamplituden $\langle f|\psi(t)\rangle$ für Zerfallswahrscheinlichkeiten und Wirkungsquerschnitte.

Einfachste Methode (nach Feynman):

Iterative Lösung der klassischen Feldgleichungen, mit Wechselwirkungsterm als Störung zu den freien Feldgleichungen, unter Benutzung der Methode der Greenschen Funktion.

2.6.1 Bekanntes Beispiel: Elektrostatik:

Poisson-Gleichung für skalares elektrostatisches Potential $\phi(\vec{x})$:

$$\vec{\nabla}^2\Phi(\vec{x}) = -\rho(\vec{x}).$$

Lösung für Punktladung am Ort $\vec{x}'$: $\rho(\vec{x}) = q\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}')$:

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|} \quad (\mathrm{Coulomb-Potential}).$$

Für eine allgemeine Ladungsverteilung $\rho(\vec{x}')$ ist die Lösung offensichtlich:

$$\Phi(\vec{x}) = \int \frac{\rho(\vec{x}')}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|}d^3x' =: \int G(\vec{x}-\vec{x}')\rho(\vec{x}')d^3x'$$

mit der sog. Greenschen Funktion

$$G(\vec{x},\vec{x}') = G(\vec{x}-\vec{x}') = \frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

die eine Lösung der Poisson-Gleichung ist für eine Einheitspunktladung am Ort $\vec{x}'$ (Definition):

$$\vec{\nabla}_x^2 G(\vec{x},\vec{x}') = -\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}').$$

3.6.2 Anwendung auf Eichfeldtheorien:

2.6.2.1 Elektromagnetische WW von Fermionen (QED):

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{QED}_{\mathrm{Fermion}} &= \overline{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi \\
&= \overline{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - eQ\overline{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \\
&= \overline{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - ej^\mu A_\mu .
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Feldgleichung nach dem Lagrange-Formalismus:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \overline{\psi}} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \overline{\psi})} \right) = 0$$

ist die Dirac-Gleichung

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = eQ\gamma^\mu A_\mu(x)\psi(x)$$

mit elektromagnetischem Kopplungsterm:

inhomogene Differentialgleichung, die i.a. nicht analytisch lösbar ist, d.h. iterative Lösung mit inhomogenem Wechselwirkungsterm als Störung.

Ansatz für Greensche Funktion:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)K(x-x') = \delta^{(4)}(x-x') \cdot 1.$$

Mit der Lösung $\psi^{(0)}(x)$ der homogenen freien Dirac-Gleichung, $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi^{(0)}(x) = 0$

ist damit die allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl.:

$$\underline{\psi(x)} = \psi^{(0)}(x) + eQ \int d^4x' K(x-x')\gamma^\mu A_\mu(x')\underline{\psi(x')}.$$

Die Integralgleichung kann iterativ gelöst werden:

0. Näherung: $\psi^{(0)}(x) \longrightarrow$ einsetzen in RS.

1. Näherung:

$$\psi^{(1)}(x) = \psi^{(0)}(x) + eQ \int d^4x' K(x-x')\gamma^\mu A_\mu(x')\underline{\psi^{(0)}(x')};$$

$\longrightarrow$ einsetzn in RS.

2. Näherung:

$$\psi^{(2)}(x) = \psi^{(0)}(x) + eQ \int d^4x' K(x-x')\gamma^\mu A_\mu(x')\psi^{(0)}(x')$$

$$+e^2Q^2 \int\int d^4x'' d^4x' \quad K(x-x'') \quad \gamma^\mu A_\mu(x'') \\ K(x''-x') \quad \gamma^\mu A_\mu(x')\psi^{(0)}(x').$$

Störungsentwicklung nach Potenzen des WW-Terms $\sim e$.

Fouriertransformation der Greenschen Funktion,

$$K(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \widehat{K}(p) e^{-ip(x-x')},$$

ergibt bei Einsetzen in die Dirac-Gleichung:

$$\begin{aligned}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) K(x-x') &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p (\not{p} - m) \widehat{K}(p) e^{-ip(x-x')} \\ \equiv \delta^{(4)}(x-x') \cdot 1 &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ip(x-x')} \cdot 1,\end{aligned}$$

d.h. $(\not{p} - m)\widehat{K}(p) = 1$, mit $\not{p} := \gamma^\mu p_\mu = \gamma^0 p_0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{p}$ etc.

$$\Longrightarrow (\not{p} + m)(\not{p} - m)\widehat{K}(p) = (p^2 - m^2)\widehat{K}(p) \equiv (\not{p} + m) \cdot 1$$

$\Longrightarrow$ "Fermion-Propagator":

$$\boxed{\widehat{K}(p) = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}}$$

mit Integrationsregel für das Fourierintegral der räumlichen Greenschen Funktion in der komplexen Ebene:

Konvergente Lösungen für Wellen mit positiver Energie (Teilchen), die sich in positiver Zeitrichtung ($t > t'$) ausbreiten und für Wellen mit negativer Energie (Antiteilchen), die sich in negativer Zeitrichtung ausbreiten ($t < t'$). $\longrightarrow$ Feynman-Bild.

2.6.2.2 Photon-Propagator:

Lösung der Wellengleichung:

$$\partial_\nu \partial^\nu A^\mu(x) = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \right) A^\mu(x) = -e j^\mu_{\mathrm{el.magn.}}(x).$$

Lösungen der freien Wellengleichung sind ebene Wellen mit 2 transversalen Polarisationsfreiheitsgraden (s.o.).

Lösungsansatz für die inhomogenen Feldgleichungen mit Greenscher Funktion:

$$\partial_\lambda \partial^\lambda D^{\mu\nu}(x - x') = g^{\mu\nu} \delta^{(4)}(x - x')$$

mit der Minkowsky-Metrik $g^{\mu\nu}$.

Damit ist die allgemeine Lösung der inhomogenen Wellengleichung (einsetzen!):

$$A_\mu(x) = -e \int d^4x' D^{\mu\nu}(x - x') j_\nu(x').$$

Die Fouriertransformation der Greenschen Funktion,

$$D^{\mu\nu}(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q \widehat{D}^{\mu\nu}(q) e^{-iq(x-x')},$$

eingesetzt in die Wellengleichung, ergibt:

$$\begin{aligned} \partial_\lambda \partial^\lambda D^{\mu\nu}(x-x') &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q \widehat{D}^{\mu\nu}(q)(-iq)^2 e^{-iq(x-x')} \\ &= g^{\mu\nu} \delta^{(4)}(x-x'). \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ "Photon-Propagator":

$$\boxed{\widehat{D}^{\mu\nu}(q) = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{-g^{\mu\nu}}{q^2 + i\varepsilon}}$$

(Integrationsvorschrift und Zeitentwicklung für Teilchen- und Antiteilchen wie für Fermionen).

2.6.2.3 Propagator für massive Eichbosonen: $W_\mu^\pm$, Z_μ^0

Elektromagnetische Wellengleichung ersetzt durch Proca-Gleichung mit Masseterm (nicht eichinvariant):

$$\begin{aligned}
(\partial_\nu \partial^\nu + M^2) W^{\pm\mu} - \partial^\mu (\partial_\nu W^{\pm\nu}) &= -\frac{g}{\sqrt{2}} j_{CC}^{\mp\mu} \\
\Big[(\partial_\nu \partial^\nu + M^2) g^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu \Big] W_\nu^\pm &= -\frac{g}{\sqrt{2}} j_{CC}^{\mp\mu}
\end{aligned}$$

mit zusätzlichem Masseterm $\mathcal{L}_\mathrm{M} = \frac{1}{2} M^2 W^{\pm\mu} W_\mu^\pm$ in der Lagrange-Funktion von SSB (Eichinvarianz wiederhergestellt durch kompensierende zusätzliche WW-Terme mit dem Higgs-Feld).

Feldgleichung ohne die Selbstwechselwirkungsbeiträge für nicht-Abelsche Eichbosonen; nur WW mit Fermionen als Quellterm betrachtet. Der freie Propagator ist davon unabhängig, jede einzelne WW ist separate Störung in erster Näherung.

Ansatz für Greensche Funktion:

$$\Big[(\partial_\nu \partial^\nu + M^2) g^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu \Big] D_{\nu\lambda}^{(\pm)}(x - x') = \delta_\lambda^\mu \delta^{(4)}(x - x').$$

$\Longrightarrow$ Lösung der inhomogenen Wellengleichung (einsetzen!):

$$W_\nu^\pm(x) = -\frac{g}{\sqrt{2}} \int d^4x' D_{\nu\lambda}^{(\pm)}(x - x') j^{\mp\lambda}(x').$$

Für die Fouriertransformierte der Greenschen Funktion gilt nach Einsetzen in die Wellengleichung:

$$\left[(-q^2 + M^2)g^{\mu\nu} + q^\mu q^\nu\right]\widehat{D}_{\nu\lambda}(q) = \delta^\mu_\lambda.$$

Ansatz zur Lösung der Matrixgleichung:

$$\widehat{D}_{\nu\lambda}(q) = A \cdot g_{\nu\lambda} + B \cdot q_\nu q_\lambda.$$

$$\Longrightarrow A \cdot \left[\delta^\mu_\lambda(-q^2 + M^2) + q^\mu q_\lambda\right] + B \cdot M^2 q^\mu q_\lambda = \delta^\mu_\lambda$$

mit $g^{\mu\nu}g_{\nu\lambda} = \delta^\mu_\lambda$.

$$\Longrightarrow A = \frac{-1}{q^2 - M^2}; \quad B = -\frac{A}{M^2} = \frac{1}{(q^2 - M^2)M^2}.$$

$\Longrightarrow$ Propagator für massive Vektorbosonen:

$$\boxed{\widehat{D}^{\mu\nu}(q) = \lim_{\varepsilon\to+0} \frac{-[g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu/M^2]}{q^2 - M^2 + i\varepsilon}}$$

$$\widehat{D}^{\mu\nu} \longmapsto \begin{cases} \dfrac{g^{\mu\nu}}{M^2}; & |q^2| \ll M^2 \\ \dfrac{g^{\mu\nu}}{-q^2}; & |q^2| \gg M^2 \end{cases}.$$

2.6.2.4 Propagator für skalare Spin-0 Bosonen: Higgs-Boson

o.E.: reelles Feld; beschrieben durch die Klein-Gordon-Gleichung:

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\Phi(x) = -g_f \overline{\psi}\psi$$

mit Yukawa-Wechselwirkung mit Fermionfeld.

Gleichung wie für eine Komponente des elektromagnetischen Feldes, aber mit Masse.

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)G(x - x') = -\delta^{(4)}(x - x');$$

$$\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}(-q^2 + m^2)\widehat{G}(q)e^{-iq(x-x')} = -\frac{d^4q}{(2\pi)^4}e^{-iq(x-x')}.$$

$\Longrightarrow$ Skalarer (Higgs-) Propagator:

$$\boxed{\widehat{G}(q) = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{q^2 - m^2 + i\varepsilon}}$$

2.6.2.5 Berechnung der Übergangsmatrixelemente

mit der Streumatrix S,

$$\psi_s(x) = S \cdot \psi_i(x),$$

ist das Streumatrixelement

$$\begin{aligned}
\langle \psi_f | \psi_s \rangle &= \langle \psi_f | S | \psi_i \rangle =: S_{fi} \equiv \mathcal{M}_{fi} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i) \\
&= \int d^3x \psi_f^\dagger(x) S \psi_i(x) = \int d^3x \psi_f^\dagger(x) \psi_s(x) \\
&= S_{fi}^{(0)} + S_{fi}^{(1)} + S_{fi}^{(2)} + \dots
\end{aligned}$$

wobei für die gestreute Welle $\psi_s(x)$ die obige Störungsentwicklung durchgeführt wird (einsetzen!).

Im Anfangs (i)- und Endzustand (f) befinden sich wechselwirkungsfreie Zustände (ebene Wellen).

2.6.2.6 Anleitung zum selbst Nachrechnen

Durch Einsetzen der Störungsentwicklung für $\psi_s(x)$ ist mit $\psi_i(x) = \psi^{(0)}(x)$ die Störungsentwicklung für die Streumatrix S_{fi} und damit für das Streumatrixelement (Abkürzung: $\not{A}(x) := \gamma^\mu A_\mu(x)$):

$$
\begin{aligned}
S_{fi}^{(0)} &= \int d^3x \psi_f^\dagger(x)\psi_i(x) = \frac{2E_i}{V}\delta_{fi}\int d^3x = 2E_i\delta_{fi}, \\
S_{fi}^{(1)} &= eQ\int d^3x\psi_f^\dagger(x)\int d^4x' K(x-x')\gamma^\mu A_\mu(x')\psi_i(x') \\
&= eQ\int d^4x' \Big(\underbrace{\int d^3x\psi_f^\dagger(x)K(x-x')}_{= -i\overline{\psi}_f(x')\ \text{(Rückwärtspropagator)}}\Big)\ \not{A}(x')\psi_i(x') \\
&= -ieQ\int d^4x'\overline{\psi}_f(x')\ \not{A}(x')\psi_i(x'), \\
S_{fi}^{(2)} &= e^2Q^2\int d^3x\psi_f^\dagger(x) \\
&\quad\cdot\int\int d^4x'' d^4x' K(x-x')\ \not{A}(x'')K(x''-x')\ \not{A}(x')\psi_i(x') \\
&= e^2Q^2\int\int d^4x'' d^4x' \\
&\quad\Big(\underbrace{\int d^3x\psi_f^\dagger(x)K(x-x'')}_{= -i\overline{\psi}_f(x'')}\Big)\ \not{A}(x'')K(x''-x')\ \not{A}(x')\psi_i(x') \\
&= -ie^2Q^2\int\int d^4x'' d^4x' \\
&\quad\cdot\ \overline{\psi}_f(x'')\ \not{A}(x'')K(x''-x')\ \not{A}(x')\psi_i(x').
\end{aligned}
$$

2.6.2.7 Wechselwirkung zwischen Fermionen und Photonen

Einlaufende Fermionen (1: Elektron e^-, 2: Fermion f):

$\psi_{i1}(x) = u(p_1)e^{-ip_1 x}$ (Q), $\psi_{i2}(x) = u(p_2)e^{-ip_2 x}$ (Q_f).

Auslaufende Fermionen (1: Elektron e^-, 2: Fermion f):

$\overline{\psi}_{f1}(x) = \overline{u}(p_3)e^{ip_3 x}$ (Q), $\overline{\psi}_{f2}(x) = \overline{u}(p_4)e^{ip_4 x}$ (Q_f).

Lösung der elektromagnetischen Wellengleichung mit Qellen:

$$A_\mu(x) = -e \int d^4x' D_{\mu\nu}(x - x') j^\nu_{\text{el.magn.}}(x').$$

Der elektromagnetische Strom der Photonen emittierenden Fermionen f (Quelle des auf die Elektronen wirkenden el.magn. Feldes) ist in niedrigster Ordnung (freie Fermionen):

$j^\mu_{el.magn.}(x) = Q_f \overline{\psi}_{f2}(x)\gamma^\mu \psi_{i2}(x) = Q_f \overline{u}(p_4)\gamma^\mu u(p_2) e^{i(p_4 - p_2)x}$.

Mit dem Photonpropagator erhält man:

$$\begin{aligned}
. \quad & A_\mu(x) = \\
&= -eQ_f \int d^4x' \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{-g_{\mu\nu}}{q^2 + i\varepsilon} e^{i(p_4 - p_2 + q)x'} e^{-iqx} \overline{u}(p_4)\gamma^\nu u(p_2) \\
&= -eQ_f \int d^4q \delta^{(4)}(p_4 - p_2 + q) \frac{-g_{\mu\nu}}{q^2 + i\varepsilon} e^{-iqx} \overline{u}(p_4)\gamma^\nu u(p_2)
\end{aligned}$$

Elektromagnetische Fermion-Fermion-WW mit Photonaustausch in niedrigster Störungsordnung:

Einsetzen der Näherung für das Photon-Feld in

$$
\begin{aligned}
S_{fi}^{(1)} &= -ieQ \int d^4x' \overline{\psi}_{f1}(x')\gamma^\mu \psi_{i1}(x') A_\mu(x') \\
&= ie^2 Q Q_f \int d^4x' \overline{u}(p_3)\gamma^\mu u(p_1) e^{i(p_3-p_1-q)x} \\
&\cdot \left(\int d^4q\, \delta^{(4)}(p_4-p_2+q) \frac{-g_{\mu\nu}}{q^2+i\varepsilon} \right) \overline{u}(p_4)\gamma^\nu u(p_2) \\
&= ie^2 Q Q_f (2\pi)^4 \int d^4q\, \overline{u}(p_3)\gamma^\mu u(p_1) \delta^{(4)}(p_4-p_2+q) \\
&\cdot \frac{-g_{\mu\nu}}{q^2+i\varepsilon} \overline{u}(p_4)\gamma^\nu u(p_2) \underbrace{\int \frac{d^4x'}{(2\pi)^4} e^{i(p_3-p_1-q)x}}_{} \\
&\cdot \qquad\qquad\qquad\qquad = \delta^{(4)}(p_3-p_1-q) \\
S_{fi}^{(1)} &= ie^2 Q Q_f (2\pi)^4 \int d^4q\, \delta^{(4)}(p_4-p_2+q)\delta^{(4)}(p_3-p_1-q) \\
&\cdot \overline{u}(p_3)\gamma^\mu u(p_1) \frac{-g_{\mu\nu}}{q^2+i\varepsilon} \overline{u}(p_4)\gamma^\nu u(p_2) \\
&= -ie^2 Q Q_f (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_4-p_2+p_3-p_1) \\
&\cdot \overline{u}(p_3)\gamma^\mu u(p_1) \frac{1}{q^2} \overline{u}(p_4)\gamma_\mu u(p_2) \\
&= \mathcal{M}_{fi}(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_4-p_2+p_3-p_1)
\end{aligned}
$$

mit dem Impulsübertrag $q^2 = (p_3-p_1)^2$ (Impulserhaltung).

2.6.2.8 Fermion-Fermion-Streuung:

Das Übergangsmatrixelement $\mathcal{M}_{fi}$ für elektromagnetische Fermion (Elektron e)-Fermion (f)-Streuung unter Austausch eines ("virtuellen") Photons ist demnach:

$$\mathcal{M}_{fi} = -ie^2 Q_e Q_f \overline{u}_e(p_3)\gamma_\mu u_e(p_1)\frac{1}{q^2}\overline{u}_f(p_4)\gamma^\mu u_f(p_2)$$

in 1. Ordnung der Störungsrechnung, 2. Ordnung in eQ bzw. 1. Ordnung in der Feinstrukturkonstanten $\alpha \equiv e^2/4\pi \approx 1/137$

$(\sigma(e^- f \to e^- f) \sim |\mathcal{M}_{fi}|^2 \sim e^4 Q_e^2 Q_f^2 \sim \alpha^2)$

und mit $q^2 = (p_3 - p_1)^2 \approx -2p_1p_3 = -4E_1E_3\sin^2(\theta/2)$ bei Vernachlässigung der Fermion-Massen; $\theta =$ Streuwinkel.

2.6.2.9 Elektron-Positron-Vernichtung

Nach den Feynman-Regeln ist das QED-Übergangsmatrixelement für die Elektron-Positron-Vernichtung unter Erzeugung eines Fermion-Antifermion-Paars (Erzeugung neuer Materie an e^+e^--Speicherringen):

$$\mathcal{M} = -ie^2 Q_e Q_f \overline{v}_e(p_2)\gamma_\mu u_e(p_1)\frac{1}{q^2}\overline{u}_f(p_3)\gamma^\mu v_f(p_4)$$

mit $q^2 = (p_1 + p_2)^2 =: s = E_{CMS}^2$ (Schwerpunktsenergie).

Im Schwerpunktsystem gilt: $\sqrt{s} = 2E_e$.

2.6.3 Wirkungsquerschnitte und Zerfallswahrscheinlichkeiten (Formelsammlung)

Übergangswahrscheinlichkeit pro Raum- und Zeiteinheit ("Goldene Regel"):

$$dw = |S_{fi}|^2 \rho(E_f) dE_f / (V_0 \cdot T).$$

Dabei ist bei Begrenzung der WW auf V_0, T:

$$|S_{fi}|^2 = |M_{fi}|^2 \cdot V_0 \cdot T \cdot (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i)$$

und $\rho(E_f)$ die Zustandsdichte im Endzustand.

Differentieller Wirkungsquerschnitt für die 2-Körper-Reaktion $a + b \to c + d$ (mit $p_1 + p_2 = p_3 + p_4$, $s := (p_1 + p_2)^2 = E_{CMS}^2$):

$$d\sigma = dw / j_{\text{ein}}$$

mit der einlaufenden Teilchenstromdichte (Lorentz-invariant):

$$\begin{aligned} j_{\text{ein}} &= |\vec{v}_{ab}| \frac{2E_1}{V} \frac{2E_2}{V} = \frac{4}{V^2} [(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{4}{V^2} E_{CMS} |\vec{p}_a^{\,CMS}|. \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \boxed{d\sigma = \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{j_{\text{ein}}} d\text{Lips}}$$

mit dem Lorentz-invarianten Phasenraumelement (Zustandsdichte im Endzustand):

$$d\text{Lips} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_3 + p_4 - p_1 - p_2) \frac{V}{2E_3} \frac{d^3p_3}{(2\pi)^3} \frac{V}{2E_4} \frac{d^3p_4}{(2\pi)^3}.$$

Zerfallsbreite für n-Körperzerfall $a \to 1, ..., n$:

$$\boxed{d\Gamma = \frac{|\mathcal{M}|^2}{2E_a} d\text{Lips}}$$

mit

$$d\text{Lips} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i) \prod_{j=1}^{n} \frac{V}{2E_j} \frac{d^3p_j}{(2\pi)^3}.$$

$\Gamma = \int d\Gamma = \frac{1}{\tau}$.

Das Normierungsvolumen V kürzt sich!

2.6.4 Wechselwirkungsprozesse im Standardmodell

2.6.4.1 Feynman-Regeln allgemein

Regeln zur Berechnung der Streumatrixelemente $\mathcal{M}$ in der Stöhrungstheorie, die sich durch die sog. Feynman-Diagramme veranschaulichen lassen.

Faktoren im Streumatrixelement $\mathcal{M}$ für beliebige Streuprozesse bzw. Teichenzerfälle: mit Integration über die 4-Impulse der virtuellen Teilchen ($p^2 \neq m^2$) im Zwischenzustand:

QED:

Ein- (auslaufendes) Fermion: $u_s(p)$ $(\overline{u}_s(p))$

Ein- (auslaufendes) Anti-Fermion: $v_s(p)$ $(\overline{v}_s(p))$

Ein- (auslaufendes) reelles Photon: $\varepsilon_\mu(k;\lambda)$ $(\varepsilon^*_\mu(k;\lambda))$

Virtuelles (intermediäres) Photon: $-i\dfrac{g_{\mu\nu}}{q^2+i\varepsilon}$

Virtuelles Fermion (Propagator): $i\dfrac{\not{p}+m}{p^2-m^2+i\varepsilon}$

Fermion-Photon-Vertex: $-ieQ_f\gamma^\mu(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_f-p_i-q)$

QCD:

Quark-Gluon-Vertex: $-i\frac{g_s}{2}\lambda^a_{\alpha\beta}\gamma^\mu(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_f-p_i-q)$

Elektroschwache Wechselwirkung:

Ein- (auslaufendes) Z^0-, $W^\pm$-Boson: $\varepsilon_\mu(k;\lambda)$ $(\varepsilon^*_\mu(k;\lambda))$

Virtuelles Z^0-, $W^\pm$-Boson: $-i\frac{g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu/M^2}{q^2 - M^2 + i\varepsilon}$

Virtuelles Higgs–Boson: $\frac{i}{q^2 - M_H^2 + i\varepsilon}$

Fermion-Higgs-Boson-Vertex:

$$-i\frac{m_f}{v}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_f - p_i - q)$$

Fermion-$W^\pm$-Vertex:

$$-i\frac{g}{2\sqrt{2}}\gamma^\mu(1-\gamma_5)(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_f - p_i - q)$$

Fermion-Z^0-Vertex:

$$-i\frac{g}{2\cos\theta_W}\gamma^\mu[c_L^f(1-\gamma_5) + c_R^f(1+\gamma_5)](2\pi)^4\delta^{(4)}(p_f - p_i - q)$$

Schwache NC-Kopplungskonstanten:

$$\text{Links}: \ \mathrm{c_L^f = I_f^3 - Q_f \sin^2\theta_W}; \quad \text{rechts}: \ \mathrm{c_R^f = -Q_f\sin^2\theta_W};$$

$$\text{Vektor}: \ \mathrm{v_f = c_L^f + c_R^f = I_f^3 - 2Q_f\sin^2\theta_W};$$

$$\text{Axialvektor}: \ \mathrm{a_f = c_L^f - c_R^f = I_f^3}.$$

$$\overline{u}\gamma^\mu c_L^f(1-\gamma_5) + c_R^f(1+\gamma_5)u = \overline{u}\gamma^\mu(v_f - a_f\gamma_5)u.$$

2.6.4.2 Selbstwechselwirkung der Eichbosonen

Freie nicht-Abelsche $SU(2) \times U(1)$-Eichfelder:

$$\vec{W}_\mu, B_\mu \longrightarrow W_\mu^\pm, Z_\mu^0, A_\mu$$

mit der Lagrangedichte ($i = 1, ..., 3$)

$$\mathcal{L}_{SU(2)}^{\text{frei}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^i F^{i\mu\nu}$$

mit

$$F_{\mu\nu}^i = \partial_\nu W_\mu^i - \partial_\mu W_\nu^i + g\varepsilon^{ijk} W_\mu^j W_\nu^k$$

oder kurz:

$$\vec{F}_{\mu\nu} = \partial_\nu \vec{W}_\mu - \partial_\mu \vec{W}_\nu + g\vec{W}_\mu \times \vec{W}_\nu.$$

Die zugehörige Bewegungsgleichung nach dem Lagrange-Formalismus ist:

$$\partial_\mu \partial^\mu \vec{W}_\nu - \partial_\nu(\partial^\mu \vec{W}_\mu) = \vec{J}_\nu,$$

eine Wellengleichung für jede Komponente (ohne Lorentz-Eichung) mit neuem Selbstwechselwirkungsterm (Quellterm)

$$\begin{aligned} \vec{J}_\nu &= -g\vec{W}^\mu \times \vec{F}_{\mu\nu} \\ &= -g\left[\vec{W}^\mu \times \partial_\mu \vec{W}_\nu - \vec{W}^\mu \times \partial_\nu \vec{W}_\mu\right] + g^2 \vec{W}^\mu \times \left(\vec{W}_\mu \times \vec{W}_\nu\right), \end{aligned}$$

d.h. $\mathcal{L}_{\text{Selbst}-\text{WW}} = \vec{J}_\mu \vec{W}^\mu$.

$\Longrightarrow$ 3- und 4-Eichbosonkopplung ($\sim g$ bzw. $\sim g^2$).

Ebenso die Selbstwechselwirkung der Gluonen (QCD), die für das Confinement der Quarks in den Hadronen verantwortlich ist:

2.6.4.3 Higgs-Eichboson-Wechselwirkung

$$\mathcal{L}_{WW} = \frac{g^2}{8} \cdot \left(H^2 + 2vH\right)\left[2W_\mu^+ W^{\mu -} + \frac{1}{\cos^2\theta_W} Z_\mu^0 Z^{\mu 0}\right]$$

2.6.4.4 Selbstwechselwirkung des Higgs-Bosons

$$\mathcal{L}_{WW} = -\lambda v H^3 - \frac{\lambda}{4} H^4$$

2.6.4.5 Prozesse höherer Ordnung in der Störungstheorie

2.6.4.5.1 QED-Prozesse

2.6.4.5.2 QCD-Prozesse (Quark-Wechselwirkung)

2.6.4.5.3 Strahlungskorrekturen

2.6.4.5.4 QCD-Korrekturen

2.6.4.5.5 Schwache Prozesse

2.6.4.6 Phänomene der schwachen Wechselwirkung
Beispiel: Schwache Neutrino-Elektron-Streuung:

CC-Prozeß: $\nu_\mu e^- \longrightarrow \mu^- \nu_e$

(verwandt mit dem schwachen Myonzerfall: $\mu^- \to e^- \nu_\mu \overline{\nu_e}$):

Das Übergangsmatrixelement ist:

$$\mathcal{M} = i\,\frac{g^2}{2} \quad \cdot \quad \left[\overline{u}_\mu(p_3)\gamma^\mu \frac{1-\gamma_5}{2} u_{\nu_\mu}(p_1)\right] \underbrace{\frac{-g_{\mu\nu} + q_\mu q_\nu / M_w^2}{q^2 - M_W^2}}_{\longrightarrow \frac{1}{M_W^2} \text{ f.} |q|^2 \ll M_W^2}$$

$$\cdot \quad \left[\overline{u}_{\nu_e}(p_4)\gamma^\nu \frac{1-\gamma_5}{2} u_e(p_2)\right]$$

geht in der Näherung kleiner Impulsüberträge $|q|^2 \ll M_W^2$ (wie beim Myonzerfall), d.h. sehr kurze Reichweite der Feldquanten, über in das Matrixelement für die Fermi'sche 4-Fermion-Punktwechselwirkung oder schwache Strom-Strom-Wechselwirkung (kein Propagator für Austauschteilchen):

$$\mathcal{M} = i\frac{G_F}{\sqrt{2}}[\overline{u}_\mu(p_3)\gamma^\mu(1-\gamma_5)u_{\nu_\mu}(p_1)][\overline{u}_{\nu_e}(p_4)\gamma_\mu(1-\gamma_5)u_e(p_2)]$$

mit der schwachen Fermi-Kopplungskonstanten G_F.

Präzisionmessung der Fermi-Konstanten aus der Myon-Lebensdauer

$$\tau_\mu = \frac{1}{\Gamma_\mu} = \frac{192\pi^3}{G_F^2 m_\mu^5}:$$

$$\Longrightarrow G_F = (1.16639 \pm 0.00002) \cdot 10^{-5}\ \mathrm{GeV}^{-2}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{g^2}{8M_W^2} = \frac{G_F}{\sqrt{2}}}$$

Erklärt die Schwachheit der schwachen Wechselwirkung bei niedrigen Energien trotz

$$g = \frac{e}{\sin\theta_W} \geq e:$$

Wenn M_W groß ist, ist G_F klein.

Nach der SSB gelten die Beziehungen

$$M_W \equiv \frac{gv}{2} = \left(\frac{g^2\sqrt{2}}{8G_F}\right)^{1/2} = \frac{g}{2}(\sqrt{2}G_F)^{-1/2}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow v &= (\sqrt{2}G_F)^{-1/2} = 246 \text{ GeV} = \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}, \\ \Longrightarrow \Phi_0 &= \frac{v}{\sqrt{2}} = 174 \text{ GeV}, \end{aligned}$$

der Energieskala (d.h. Temperaturskala, $E = kT$) der elektroschwachen Symmetriebrechung (Phasenübergang).

$$\begin{aligned} \Longrightarrow M_W &= \frac{ev}{2\sin\theta_W} \\ M_W^2 &= \frac{e^2}{4\sqrt{2}G_F\sin^2\theta_W} \equiv \frac{\pi\alpha}{\sqrt{2}G_F\sin^2\theta_W} \\ &= \frac{(37.3 \text{ GeV})^2}{\sin^2\theta_W}. \end{aligned}$$

Experimentell (Fermion-Paarproduktion in e^+e^--Vernichtung bei LEP/CERN, νN-Streuung):

$$\begin{aligned} \sin^2\theta_W(E = M_Z) &= 0.23117 \pm 0.00016 \\ \Longrightarrow M_W &\approx 78 \text{ GeV} \\ \Longrightarrow M_Z &= \frac{M_W}{\cos\theta_W} \approx 89 \text{ GeV} \end{aligned}$$

(Vorhersagen der GSW-Theorie in niedgrigster Ordnung der Störungstheorie).

Experimentell (Z- und W-Bosonerzeugung in der e^+e^--Vernichtung bei LEP und SLD und in der $p\overline{p}$-Vernichtung am Tevatron/FNAL):

$$\begin{aligned} M_Z &= 91.1875 \pm 0.0021 \text{ GeV}, \\ M_W &= 80.451 \pm 0.033 \text{ GeV}. \end{aligned}$$

Übereinstimmung mit den theoretischen Vorhersagen mit hoher Präzision, wenn elektroschwache Strahlungskorrekturen (Prozesse höherer Ordnung der Störungstheorie der elektroschwachen WW).

$\Longrightarrow$ Die am besten geprüfte physikalische Theorie.

Inputparameter der Theorie:

$$g,\ g',\ v,\ g_f.$$

Alternativ (experimentell am besten bestimmt):

$$\alpha(E = M_Z),\ G_F,\ \sin^2\theta_W \text{ oder } M_Z,\ m_f.$$

Die Masse des Higgs-Bosons

$$M_H = \sqrt{-2\mu^2} = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \cdot v$$

und die Massen der Fermionen

$$m_f = \frac{g_f v}{\sqrt{2}}$$

lassen sich im Standardmodell nicht vorhersagen.