2.6.5 Renormierung der Kopplungskonstanten

Fundamentales Problem bei der störungstheoretischen Berechnung von Observablen in der relativistischen Feldtheorie mit elementaren Punktteilchen als Trägern der Ladungen:

Divergenzen bei hohen Impulsüberträgen $\rightarrow \infty$, d.h. kleinen Abständen $\rightarrow 0$ in Diagrammen höherer Ordnung (Schleifendiagramme), die über die Prozesse niedrigster Ordnung (Baum-Graphen) hinausgehen (sog. UV-Divergenzen).

Problem behebbar durch das Renormierungsprogramm (effektive Ladungen und Massen in Anwesenheit von quantenmechanischen Vakuumfluktuationen) für renormierbare Feldtheorien.

Erfolg der QED aufgrund ihrer Eigenschaft der Renormierbarkeit.

Auch Nicht-Abelsche Eichtheorien (auch mit SSB) sind renormierbar (t'Hooft, Veltman 1971).

2.6.5.1 Beispiel aus der QED: Vakuumpolarisation bei der e^-p-Coulomb-Streuung

Die QED-Beiträge höherer Ordnung führen zu einer effektiven Modifikation des Photon-Propagators, die die **Form** des Resultats niedrigster Ordnung unverändert läßt:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}^{(1)} &= e_0^2 \overline{u}_e(p_3)\gamma^\mu u)e(p_1)\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}\overline{u}_p(p_4)\gamma^\nu u_p(p_2); \\
\mathcal{M}^{(2)} &= e_0^2 \overline{u}_e(p_3)\gamma^\mu u)e(p_1)\left[\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}\right. \\
&\cdot\quad Q_f^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left(ie_0\gamma^\nu \frac{i(\not k + m)}{k^2-m^2} ie_0\gamma^\rho \frac{i(\not q - \not k + m)}{(q-k)^2-m^2}\right) \\
&\cdot\quad \left.\frac{-ig_{\rho\sigma}}{q^2}\right]\overline{u}_p(p_4)\gamma^\sigma u_p(p_2).
\end{aligned}
$$

(Summe über alle Fermionen und $W^\pm$ in der Schleife, gewichtet mit Ladung und Masse/einfallende Energie).

Das Integral über $d^4k = k^2 dk d\Omega_k dk_0$, $k = |\vec{k}|$, divergiert für $k \to \infty$.

Deshalb willkürliche Integrationsgrenze beim sog. Abschneideparameter $k = \Lambda$.

Dann ist für $q^2 \to 0$ ($|Q_f| = 1$):

$$\mathcal{M}^{(1)} + \mathcal{M}^{(2)} = e_0^2 \left[1 - \frac{\alpha_0}{3\pi} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2} \right) \right] \frac{\mathcal{M}^{(1)}}{e_0^2}.$$

Höhere Schleifenordnungen $n = 2, ..., \infty$ ("leading log"-Strahlungskorrekturen) wiederholen sich in der Korrektur zum Photon-Propagator in einer geometrischen Reihe, die exakt aufsummiert werden kann, d.h.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}^{(n)} &= e_0^2 \left[1 - \frac{\alpha_0}{3\pi} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2} \right) - \left(\frac{\alpha_0}{3\pi} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2} \right) \right)^2 + ... \right] \frac{\mathcal{M}^{(1)}}{e_0^2} \\ &= \frac{e_0^2}{1 + \frac{\alpha_0}{3\pi} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2} \right)} \cdot \frac{\mathcal{M}^{(1)}}{e_0^2}\end{aligned}$$

In einer fundamentalen Theorie (gültig für alle $k \to \infty$) soll das Endresultat unabhängig vom Abschneideparameter Λ sein.

Interpretation des Resultats:

Im Streuprozeß wird die effektive (renormierte) elektr. Ladung ($\alpha = e^2/4\pi$)

$$\alpha_R(m_e^2) = \alpha = \frac{\alpha_0}{1 + \frac{\alpha_0}{3\pi}\ln\left(\frac{\Lambda^2}{m_e^2}\right)} =: Z_3 \cdot \alpha_0$$

gemessen.

Für $q^2 \to 0$ ist dies die Elementarladung $e = e_R(m_e^2)$ bzw. die Feinstrukturkonstante $\alpha_R(q^2 = m_e^2) = \alpha \approx \frac{1}{137}$, gemessen in der Coulomb-Streuung bei sehr niedrigen Energien (Atomphysik).

Die (sehr langsame, log) Divergenz in der Renormierungskonstanten Z_3 für $\Lambda \to \infty$ wird durch die "nackte" Ladung e_0 kompensiert.

Für $|q^2| \gg m_e^2$ gilt:

$$\begin{aligned}
\alpha_R(q^2) &= \frac{\alpha_0(\Lambda^2)}{1 + \frac{\alpha_0}{3\pi}\ln\left(\frac{\Lambda^2}{m_e^2}\right) - \frac{\alpha_0}{3\pi}\ln\left(\frac{-q^2}{m_e^2}\right)} \\
&= \frac{\alpha_0(\Lambda^2)}{\left[1 + \frac{\alpha_0}{3\pi}\ln\left(\frac{\Lambda^2}{m_e^2}\right)\right]\left[1 - \frac{\alpha_R(m_e^2)}{3\pi}\ln\left(\frac{-q^2}{m_e^2}\right)\right]} \\
&= \frac{\alpha_R(m_e^2)}{1 - \frac{\alpha_R(m_e^2)}{3\pi}\ln\left(\frac{-q^2}{m_e^2}\right)}.
\end{aligned}$$

Allgemein ist die q^2-Abhängigkeit der el.magn. Kopplung ("laufende" Kopplungskonstante):

$$\alpha_R(q^2) = \frac{\alpha_R(q_0^2)}{1 - \frac{\alpha_R(q_0^2)}{3\pi}\ln\left(\frac{q^2}{q_0^2}\right)}.$$

$$\xrightarrow{\text{alle } f} \frac{\alpha_R(q_0^2)}{1 - \sum_f N_C^f Q_f^2 \frac{\alpha_R(q_0^2)}{3\pi}\ln\left(\frac{q^2}{q_0^2}\right)}.$$

$\Longrightarrow$ Sehr langsame Entwicklung (log): $\alpha(M_Z^2) = 1/128.9$.

Kleiner Beitrag zum Lamb-shift in der Atomphysik.

$\Longrightarrow$ Abschirmung der "nackten" elektrischen Ladung bei großen Abständen (d.h. kleinen Impulsüberträgen) durch die polarisierten Vakuumfluktuationen (virtuelle $f\bar{f}$-Paare mit Lebensdauer $\Delta t \approx \hbar/2m_f$) wie in einem polarisierbaren Medium mit Permeabilität $\varepsilon > 1$.

2.6.5.2 Die starke Kopplungskonstante der QCD

Vakuumpolarisation in der Quark-Quark-Streuung mit Gluon-Austausch:

$\Longrightarrow$ q^2-Abhängigkeit der starken Kopplungskonstante $\alpha_s = \frac{g_s}{4\pi}$:

Beitrag der inneren Quark-Schleifen in Analogie zur QED mit $e^2 \to g_s^2 Sp\left(\frac{\lambda^a}{2}\frac{\lambda^b}{2}\right) = g_s^2\frac{\delta^{ab}}{2}$:

$$[\alpha_s(q^2)]_{q\bar{q}} = \frac{\alpha_s(q_0^2)}{1 - N_q\frac{\alpha_s(q_0^2)}{6\pi}\ln\left(\frac{q^2}{q_0^2}\right)}.$$

Beitrag der Gluon-Schleifen:

$$[\alpha_s(q^2)]_{gg} = \frac{\alpha_s(q_0^2)}{1 + 11\frac{\alpha_s(q_0^2)}{4\pi}\ln\left(\frac{q^2}{q_0^2}\right)}.$$

Zusammen (additive Beiträge):

$$\begin{aligned}\alpha_s(q^2) &= \frac{\alpha_s(q_0^2)}{1 + (33 - 2N_q)\frac{\alpha_s(q_0^2)}{12\pi}\ln\left(\frac{q^2}{q_0^2}\right)} \\ &= \frac{12\pi}{(33 - 2N_q)\ln\left(\frac{q^2}{\Lambda^2}\right)}\end{aligned}$$

mit der Definition des QCD-Skalenparameters (aus der Störungstheorie) $\Lambda_{QCD}^2 = q_0^2 e^{-(C\alpha_s(q_0^2))^{-1}}$ mit $C = (33 - 2N_q)/12\pi$, der experimentell bestimmt werden muß (äquivalent zur Messung von $\alpha_s(q_0^2)$).

(gültig nur für $q^2 \gg \Lambda_{QCD}$: Störungstheorie anwendbar).

$\Longrightarrow$ Für $N_q \leq 16$ nimmt die starke Kopplungskonstante mit wachsendem q^2 schnell ab:

$$\alpha_s(q^2) \mapsto 0 \text{ für } |q^2| \to \infty,$$

$\Longrightarrow$ sog. "asymphthotische Freiheit" der Quarks und Gluonen bei hohen Impulsüberträgen bzw. kurzen Abständen, in den farbneutralen Bindungszuständen der Hadronen ($d < 10^{-15}$ m $\approx$ Größe des Protons).

Effekt der überwiegenden Gluon-Vakuumpolarisation (nicht-Abelsche farbgeladene Eichbosonen): Anti-Abschirmung der Farbladung.

Zahlreiche Messungen der starken Kopplungskonstanten (aus hadronischen Wirkungsquerschnitten) ergeben:

$$\alpha_s(M_Z^2) = 0.118 \pm 0.002.$$

$\Longrightarrow$ Bei großen q^2 ist die Störungstheorie in der QCD anwendbar;

im Gegensatz zu kleinen $q^2 \leq \Lambda_{QCD}$ bzw. großen Abständen zwischen den Quarks, bei denen die starke Kopplungskonstante große Werte annimmt, d.h. keine Stöhrungstheorie:

Confinement der Quarks und Gluonen in Hadronen;

Fragmentation von Quarks und Gluonen in farbneutrale Hadronen.