3.2 Die schwache Wechselwirkung der Quarks

3.2.1 Quark-Flavour-Oszillationen

Teilchen-Antiteilchen-Oszillationen der neutralen Mesonen:

$$
\begin{array}{rcll}
K^0 = (d\bar{s}) & \longleftrightarrow & \overline{K}^0 = (\bar{d}s) & (|\Delta S| = 2); \\
D^0 = (c\bar{u}) & \longleftrightarrow & \overline{D}^0 = (\bar{c}u) & (|\Delta C| = 2); \\
B_d^0 = (d\bar{b}) & \longleftrightarrow & \overline{B}_d^0 = (\bar{d}b) & (|\Delta B| = 2); \\
B_s^0 = (s\bar{b}) & \longleftrightarrow & \overline{B}_d^0 = (\bar{s}b) & (|\Delta B| = 2).
\end{array}
$$

Die schwache Wechselwirkung verletzt die Erhaltung der flavour-Quantenzahlen.

Vorhersage von Gell-Mann und Pais 1955 für K^0-Mesonen:

Flavour-Eigenzustände K^0 $(S = -1)$, $\overline{K}^0$ $(S = +1)$

$\neq$ CP-Eigenzustände mit definierten Massen $m_{S,L}$ und Lebensdauern:

K_S^0 (kurzlebig): $\tau_S \approx 10^{-10}$ s; $K_S^0 \to \pi^+\pi^-$ $(CP = +1)$;

K_L^0 (langlebig): $\tau_L \approx 10^{-7}$ s; $K_L^0 \to \pi^+\pi^-\pi^+$ $(CP = -1)$.

Die zeitliche Entwicklung der Zustände

$$\phi(t) >= a(t)|K^0 > +b(t)|\overline{K}^0 >= \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix},$$

$$|K^0 >= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \overline{K}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

wird beschrieben durch die Schrödinger-Gleichung

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\phi >= H\phi >$$

mit dem effektiven Hamilton-Operator $(H^\dagger \neq H)$:

$$H = H_{\text{el.magn.}} + H_{\text{stark}} + H_{\text{schwach}} = \widehat{M} - i\widehat{\Gamma}/2$$

$\widehat{M}$, $\widehat{\Gamma}$ sind die Massenmatrix und die Zerfallsmatrix:

$$\begin{aligned}\widehat{M} - \frac{i}{2}\widehat{\Gamma} &= \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} - \frac{i}{2}\begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} m_K & m_{12} \\ m_{12} & m_K \end{pmatrix} - \frac{i}{2}\begin{pmatrix} \Gamma_K & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_K \end{pmatrix}\end{aligned}$$

mit $m_{11} = m_{22}$, $m_{21} = m_{12}^*$ wegen CPT-Invarianz,
$m_{12} = m_{21} = m_{12}^*$ bei CP-Invarianz,
$m_K = (m_S + m_L)/2$ und $\Delta m := m_L - m_S$, $\Delta\Gamma := \Gamma_L - \Gamma_S$.

Die Matrizen lassen sich Diagonalisieren durch die Transformation ($K^0 - \overline{K}^0$-Mischung):

$$\begin{aligned}K_S^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(K^0 + \overline{K}^0); \\ K_L^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(K^0 - \overline{K}^0),\end{aligned}$$

mit den Massen- und Lebensdauer-Eigenzuständen K_L^0 und K_S^0 und den Eigenwerten:

$$\begin{aligned}m_{S,L} &= m_K \pm \mathcal{R}e\sqrt{\left(m_{12} - \frac{i}{2}\Gamma_{12}\right)\left(m_{12}^* - \frac{i}{2}\Gamma_{12}^*\right)}; \\ \Gamma_{S,L} &= \Gamma_K \mp \mathcal{I}m\sqrt{\left(m_{12} - \frac{i}{2}\Gamma_{12}\right)\left(m_{12}^* - \frac{i}{2}\Gamma_{12}^*\right)} = \tau_{S,L}^{-1};\end{aligned}$$

$K^0 - \overline{K}^0$-Übergänge (durch $M_{12} \neq 0$) werden in 2. Ordnung der schwachen Wechselwirkung ($\Delta S = 2$) erzeugt:

$$\Longrightarrow \Delta m \approx \frac{G_F^2}{4\pi^2} f_K^2 m_K m_c^2 \cos^2\theta_C \sin^2\theta_C$$

mit der Kaon-Zerfallskonstante f_K (QCD-Parameter) und dem Cabibbo-Winkel θ_C.

Der Beitrag des charm-Quark-Austauschs dominiert, da $m_c \gg m_u$.

$\Longrightarrow$ Vorhersage der charm-Quarkmasse $m_c \approx 1.5$ GeV 1974 (Gaillard, Lee) vor der Entdeckung des charm-Quarks
(bis heute gültig).

(Der Beitrag des top-Quark-Austauschs ist aufgrund der V_{CKM}-Faktoren unterdrückt; er dominiert für $B^0 - \overline{B}^0$-Mischung.)

Die zeitliche Entwicklung der Masseneigenzustände ist gegeben durch:

$$K_S^0(t) = \mathcal{N} e^{-(im_S+\frac{\Gamma_S}{2})t} K_S(0);$$
$$K_L^0(t) = \mathcal{N} e^{-(im_L+\frac{\Gamma_L}{2})t} K_L(0).$$

Damit ist die zeitliche Entwicklung der flavour-Eigenzustände $K^0(0)$ und $\overline{K}^0(0)$ (in der vereinfachenden und guten Näherung $\Delta\Gamma \approx 0$, d.h. $\Gamma_S \approx \Gamma_L$):

$$K^0(t) = \mathcal{N} e^{-(im_K+\frac{\Gamma_K}{2})t} \left[\cos(\Delta m t/2) K^0 + \sin(\Delta m t/2) \overline{K}^0\right]$$
$$\overline{K}^0(t) = \mathcal{N} e^{-(im_K+\frac{\Gamma_K}{2})t} \left[\sin(\Delta m t/2) K^0 + \cos(\Delta m t/2) \overline{K}^0\right]$$

Die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten $\mathcal{P}$ der K^0-Zustände oszillieren mit einer Frequenz Δm und 180° relativer Phasenverschiebung neben dem Zerfall mit der mittleren Lebensdauer $\tau_K = \Gamma_K^{-1}$ (flavour-Oszillationen):

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(K^0 \to K^0(t)) &= |<K^0|K^0(t)>|^2 \\
&= \frac{1}{2\tau_K} e^{-t/\tau_K}(1 + \cos \Delta m\ t) \\
\mathcal{P}(K^0 \to \overline{K}^0(t)) &= |<\overline{K}^0|K^0>|^2 \\
&= \frac{1}{2\tau_K} e^{-t/\tau_K}(1 - \cos \Delta m\ t)
\end{aligned}$$

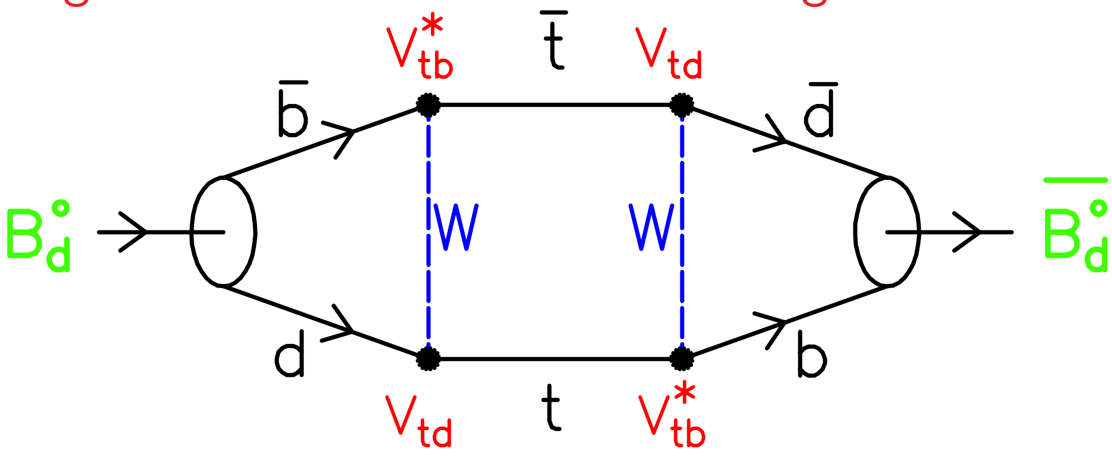
(ebenso für $\overline{K}^0$).

Die gemessene $K_L^0 - K_S^0$-Massenaufspaltung = Oszillationsfrequenz ($\hbar\omega = \Delta M c^2$) ist:

$$\Delta M = (3.489 \pm 0.008) \cdot 10^{-6}\ \mathrm{eV} = (0.530 \pm 0.001) \cdot 10^{10}\ \mathrm{Hz}.$$

$B^0\overline{B^0}$-Oszillationen

2. Ordnung der schwachen Wechselwirkung:



$$\boxed{\Delta m_d = \frac{G_F^2}{6\pi^2} M_{B_d} m_{\text{top}}^2 F\left(\frac{m_{\text{top}}^2}{M_W^2}\right) \eta_{QCD} (f_{B_d}^2 B_{B_d}) |V_{td}V_{tb}^*|^2}$$

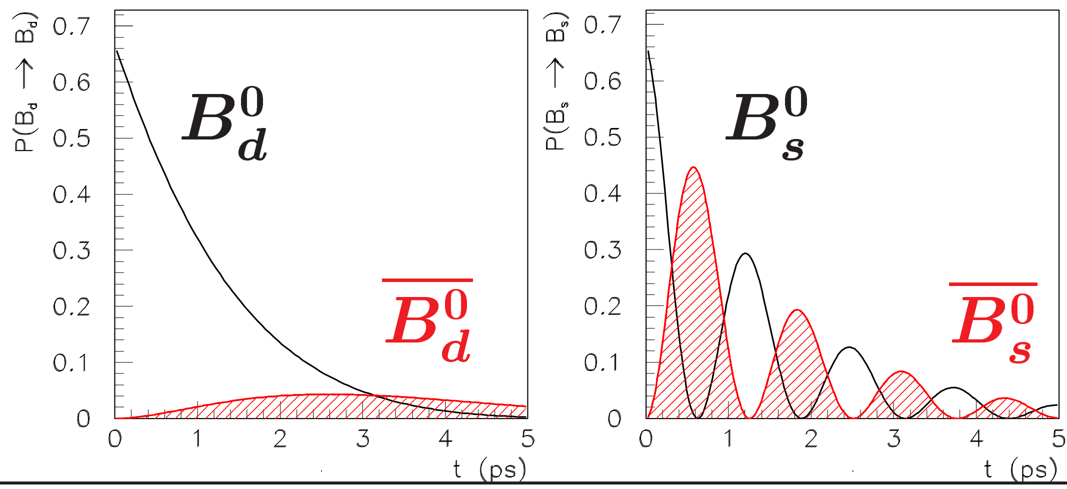
$$\Longrightarrow \frac{\Delta m_d}{\Delta m_s} = \frac{M_{B_d}}{M_{B_s}} \cdot \frac{f_{B_d}^2 B_{B_d}}{f_{B_s}^2 B_{B_s}} \cdot \frac{|V_{td}|^2}{|V_{ts}|^2} \qquad \overset{|V_{ts}| \approx |V_{cb}|}{=}$$

$$\approx (0.88 \pm 0.04)^2 \frac{|V_{td}|^2}{|V_{cb}|^2}$$

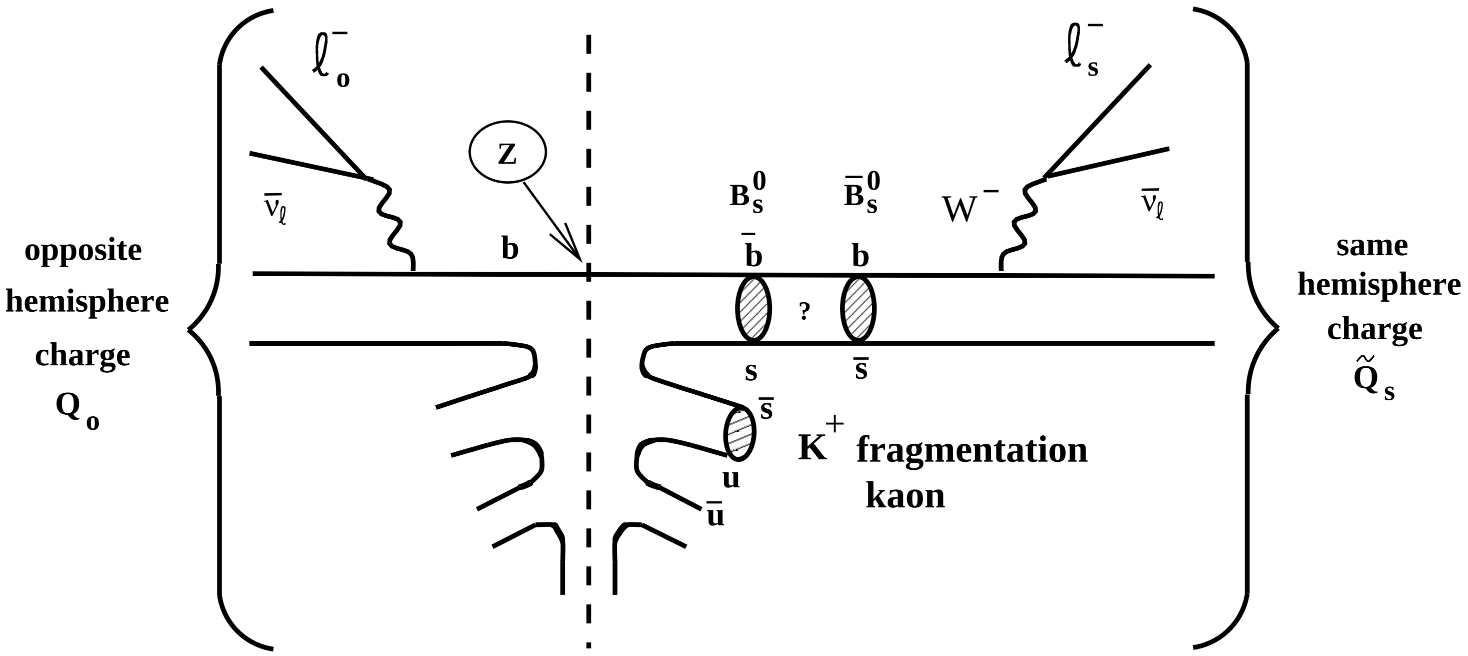
$(\approx 3 \cdot 10^{-4}\ \text{eV})$ $\qquad$ $(> 10^{-2}\ \text{eV})$

$$\boxed{\Delta m_d = 0.496 \pm 0.007\ \text{ps}^{-1}} \qquad \boxed{\Delta m_s > 14.9\ \text{ps}^{-1}\ (95\%\ \text{CL})}$$

$$|V_{td}| = 0.009 \pm 0.002 \qquad |V_{td}| < 0.009$$



Unterscheidung zwischen B^0 und $\overline{B^0}$ durch Ladung der Zerfallsleptonen:



Signal für $B^0\overline{B^0}$-Oszillation:

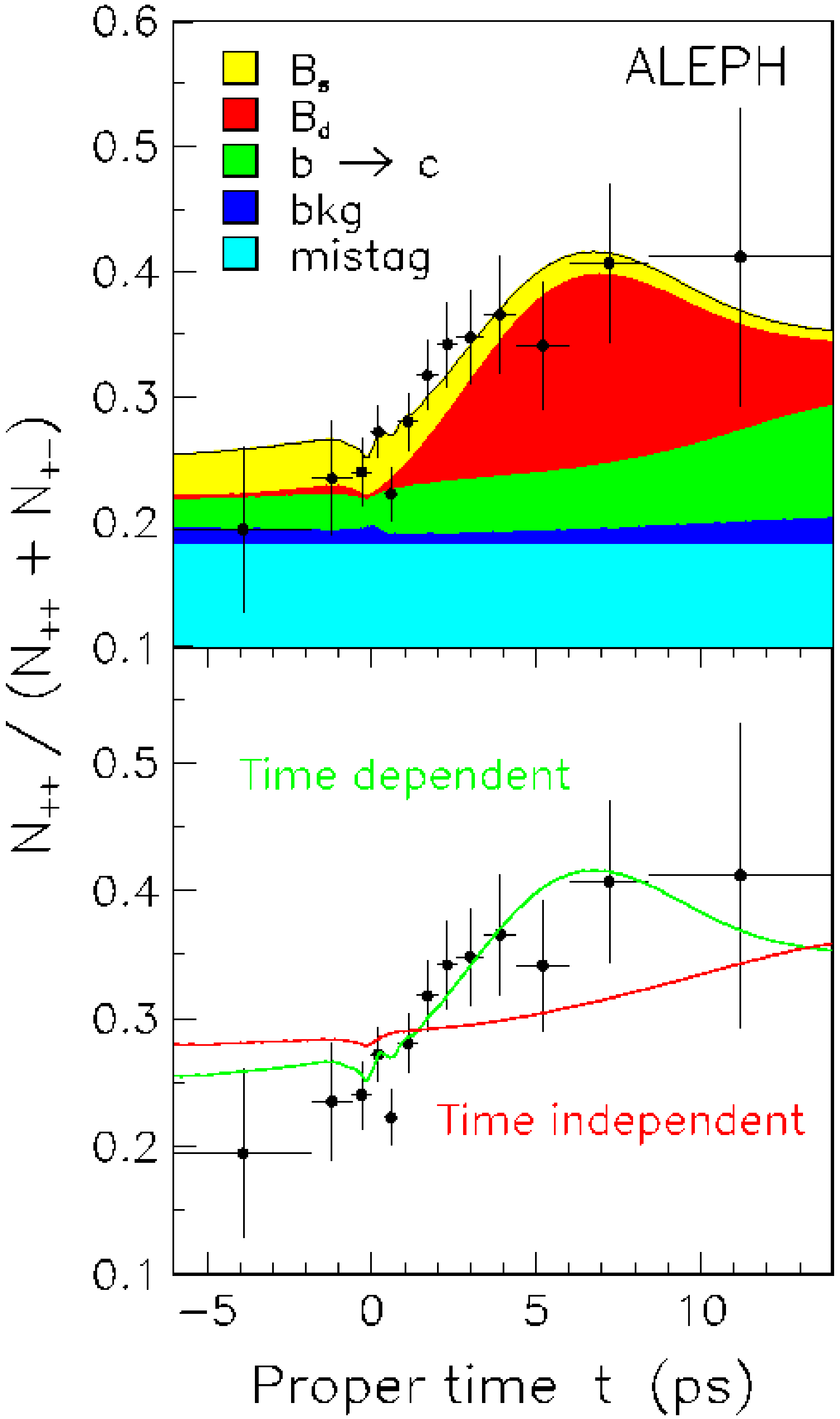
gleichgeladene Leptonpaare

in Abhängigkeit von der Zerfallsdauer $t = d/\beta\gamma c$:

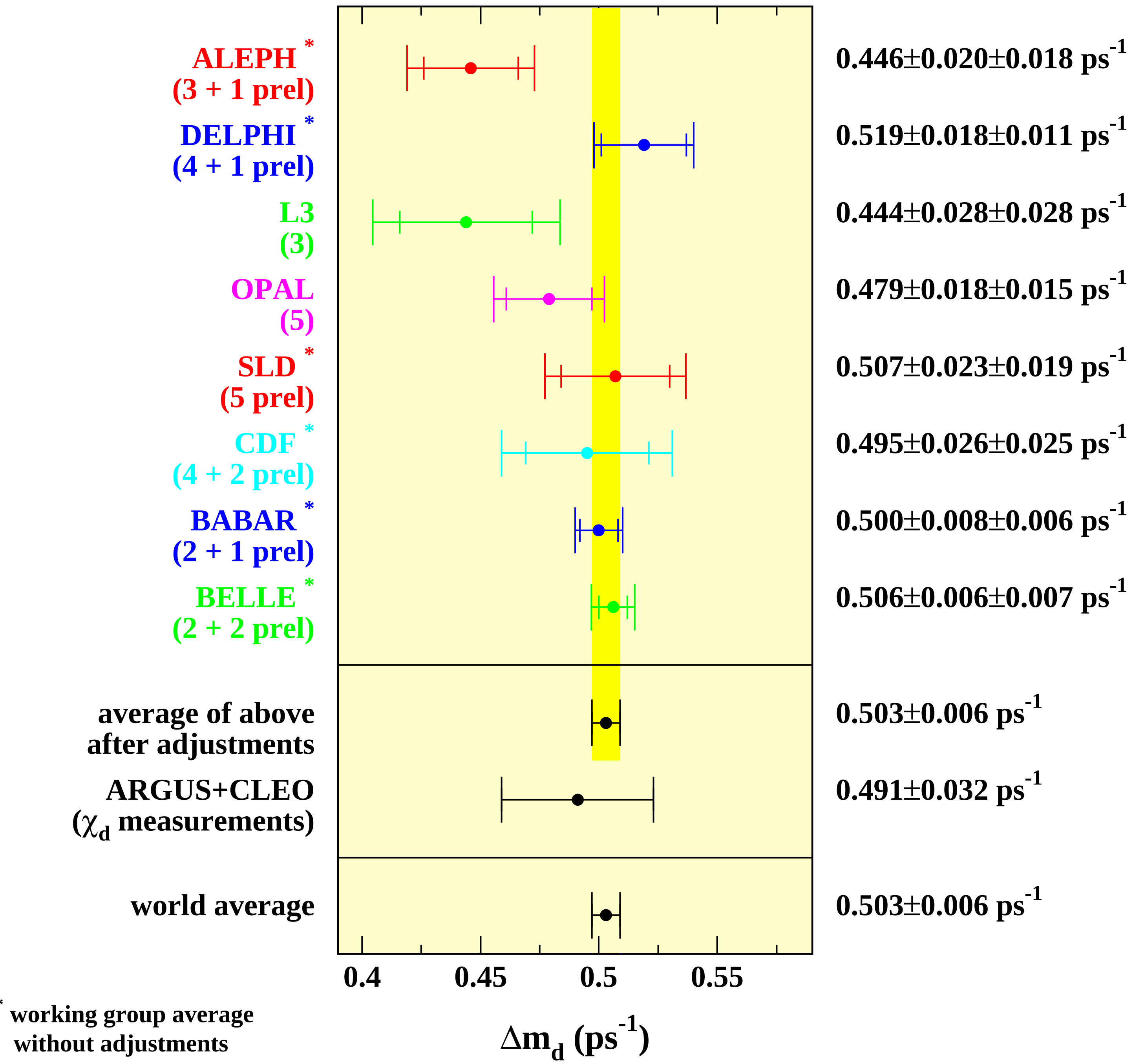
$$\frac{N(\ell^\pm\ell^\pm)[t]}{N_{\mathrm{tot}}(\ell\ell)[t]} = \frac{\mathcal{P}(B^0 \to \overline{B^0})[t]}{\mathcal{P}(B^0 \to \overline{B^0})[t] + \mathcal{P}(B^0 \to B^0)[t]}$$

$$= \sin^2(\Delta m \cdot t/2)$$

$B^0\overline{B^0}$-Oszillationen im ALEPH-Experiment



$B_d^0\overline{B_d^0}$-Mischung: $\boxed{\Delta m_d = 0.503 \pm 0.006\ \mathrm{ps}^{-1}}$



3.2.2 Verletzung der CP-Symmetrie

3.2.2.1 CP-Verletzung in K^0-Mesonzerfällen

1964: Nachweis von $K^0_L \to \pi^+\pi^-$ (sehr kleiner Anteil mit falschem $CP = +1$ im Endzustand).

$\Longrightarrow$ Verletzung der CP- und damit der Zeitumkehrsymmetrie in K^0-Zerfällen.

$\Longrightarrow$ Masseneigenzustände $K^0_{S,L}$ sind orthogonale Mischung der CP-Eigenzustände $=: K^0_{1,2}$ $(CP = \pm 1)$, mit kleiner Beimischung des "falschen" CP-Zustands $\sim \varepsilon$:

$$
\begin{aligned}
K^0_S &= \frac{K^0_1 - \varepsilon K^0_2}{\sqrt{1+|\varepsilon|^2}} \approx K^0_1; \\
K^0_L &= \frac{K^0_2 + \varepsilon K^0_1}{\sqrt{1+|\varepsilon|^2}} \approx K^0_2.
\end{aligned}
$$

Tritt auf, falls die Massenmatrix komplex ist mit $M^*_{12} \neq M_{12}$: sog. "indirekte" CP-Verletzung bei der $K^0 - \overline{K}^0$-Mischung.

Im Standardmodell verursacht durch den komplexen Phasenfaktor der CKM-Matrix.

Alternativ: neue superschwache Wechselwirkung (Wolfenstein, 1964)?

Messung: $|\varepsilon| = (2.271 \pm 0.017) \cdot 10^{-3}$ (kleiner Effekt!).

"Direkte" CP-Verletzung im Zerfall des CP-Eigenzustands K_2^0 $(CP = -1)$:

Im Standardmodell durch komplexe Phase der CKM-Matrix bei Interferenz des Zerfallsprozesses niedrigster Ordnung zu $K_2^0 \to \pi^+\pi^-$ oder $\pi^0\pi^0$ mit Beiträgen höherer Ordnung, die zum gleichen Endzustand führen (sog. "Pinguin"-Diagramme):

Der Anteil direkter CP-Verletzung wird im Standardmodell durch den Parameter ε' beschrieben.

$\varepsilon' \neq 0$ schließt superschwache WW als Quelle der CP-Verletzung aus.

Nachweis 1999 bei CERN (NA48 Experiment) und FNAL (KTeV Experiment):

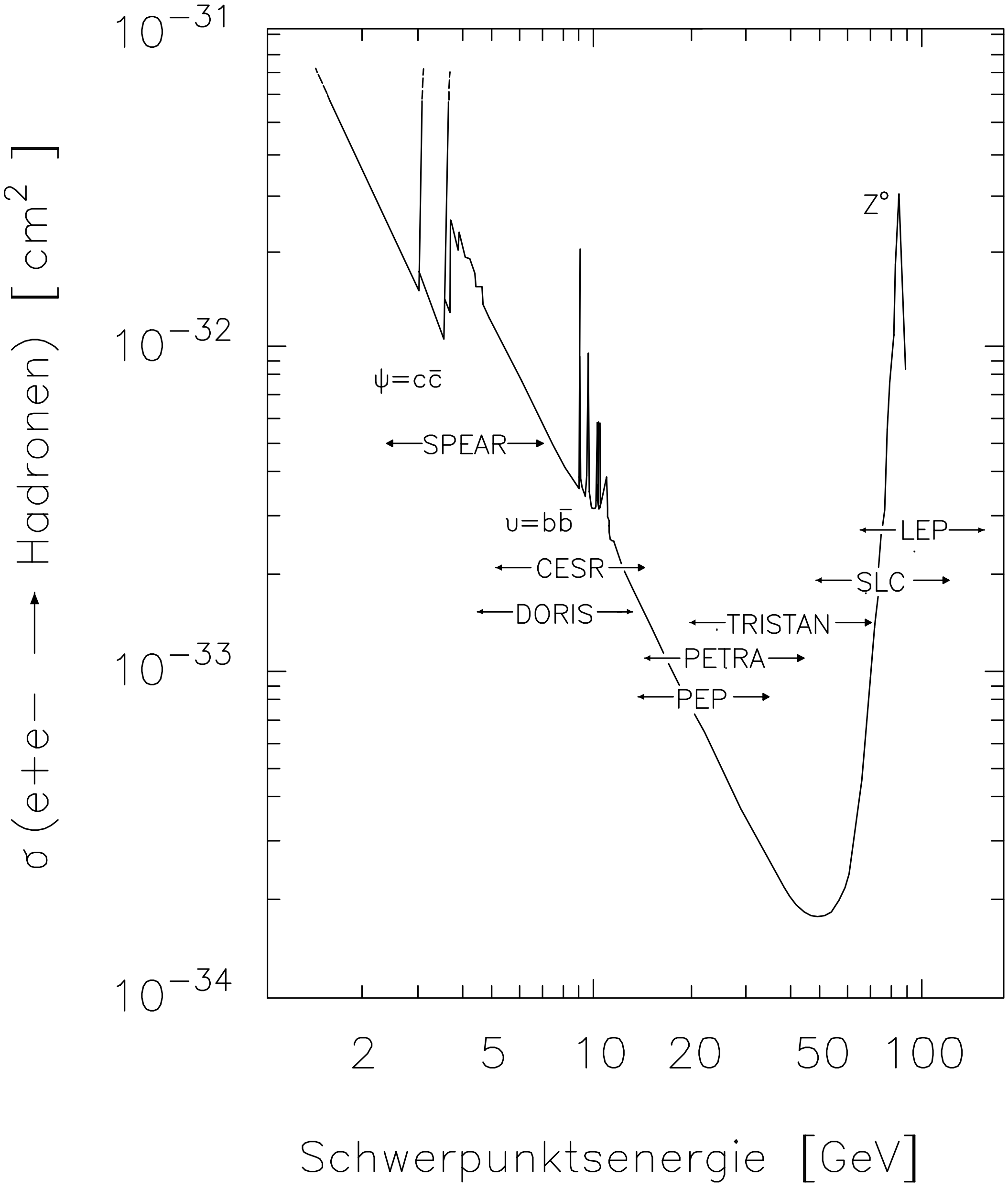
$\left|\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right| = (2.1 \pm 0.5) \cdot 10^{-3}$ (sehr kleiner Effekt!).

Das Standardmodell sagt direkte und indirekte CP-Verletzung nach den gleichen Mechanismen auch bei B^0-Mesonen vorraus.

$\longrightarrow$ Test bei sog. B-Meson-Fabriken seit 1999.

3.2.2.2 CP-Verletzung in B^0-Mesonzerfällen

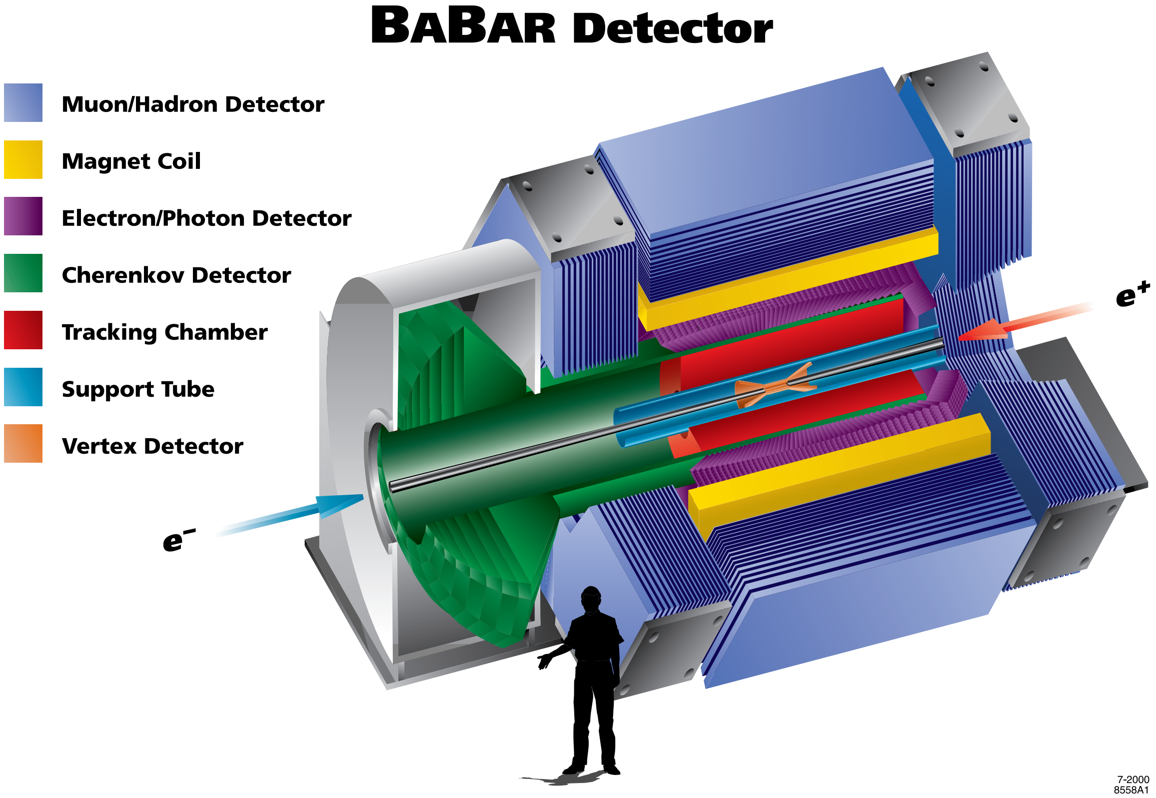
B-Meson-Produktion



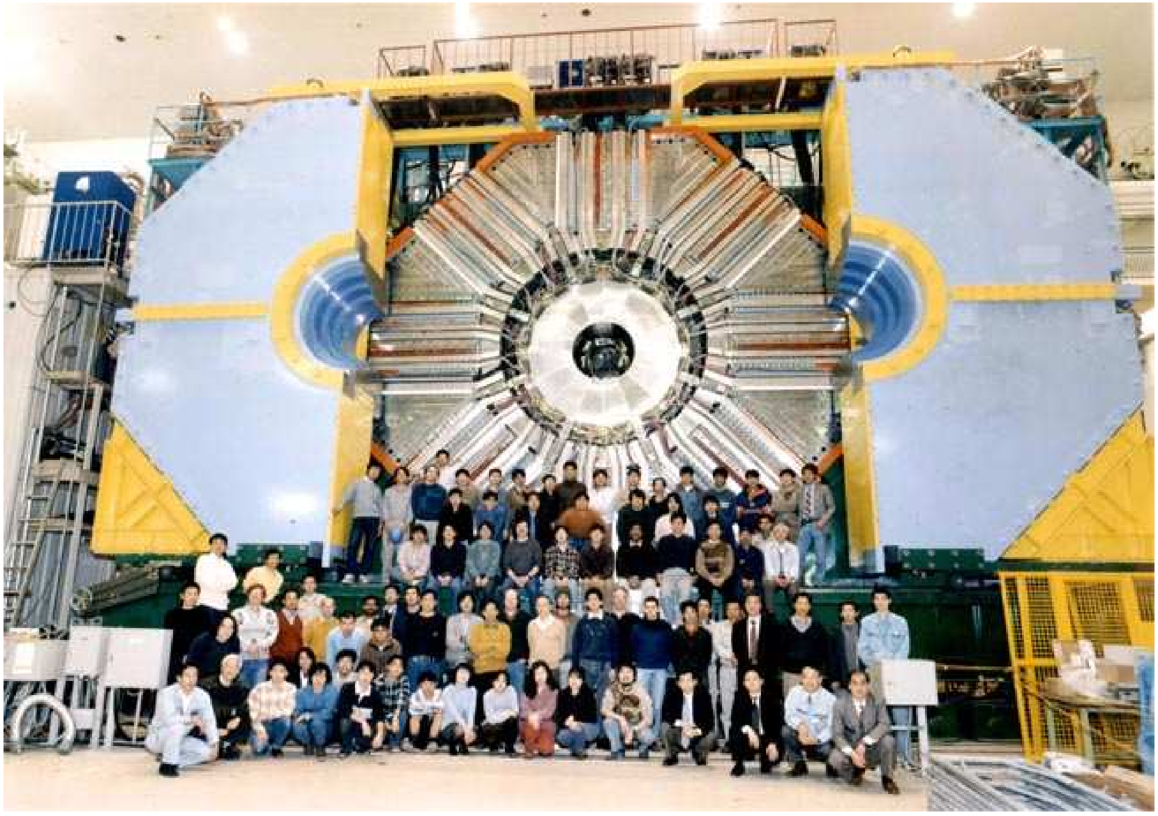
Exp.	$\sigma(b\bar{b})$	$N_{B\overline{B}}$	Reaktion
LEP	7 nb	10^6/Exp.	$e^+e^- \xrightarrow{91\ \mathrm{GeV}} Z^0 \xrightarrow{4.5\%} b\bar{b} \to B\overline{B}' + X$
CLEO	1 nb	$1.0 \cdot 10^7$	$e^+e^- \xrightarrow{10.6\ \mathrm{GeV}} \Upsilon(4S) \xrightarrow{100\%} B_d^0\overline{B_d^0}, B^+B^-$
BaBar	1 nb	$1.5 \cdot 10^7$	$e^+e^- \xrightarrow{10.6\ \mathrm{GeV}} \Upsilon(4S) \xrightarrow{100\%} B_d^0\overline{B_d^0}, B^+B^-$
BELLE	1 nb	$0.6 \cdot 10^7$	$e^+e^- \xrightarrow{10.6\ \mathrm{GeV}} \Upsilon(4S) \xrightarrow{100\%} B_d^0\overline{B_d^0}, B^+B^-$
CDF	0.1 mb		$p\bar{p} \xrightarrow{1.8\ \mathrm{TeV}} b\bar{b} + X$

B-Meson-Fabriken

BaBar-Detektor am PEP II-Speicherring am SLAC, Kalifornien



BELLE-Detektor am KEK-B-Speicherring am KEK-Beschleunigerzentrum, Japan



Die Orthogonalitätsbedingungen für die Spaltenvektoren der unitären CKM-Matrix,

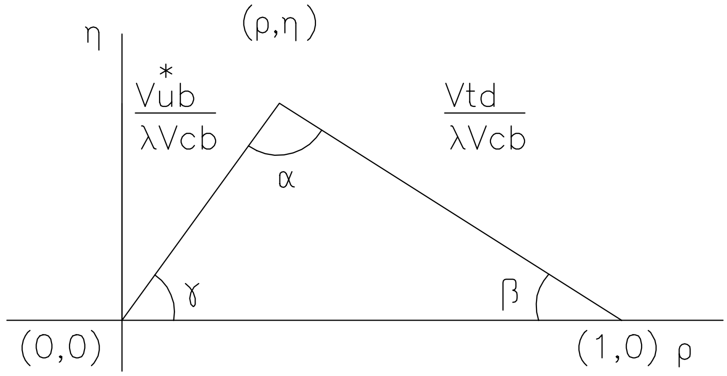
$$\begin{aligned} V_{ud}^* V_{us} + V_{cd}^* V_{cs} + V_{td}^* V_{ts} &= 0, \\ V_{us}^* V_{ub} + V_{cs}^* V_{cb} + V_{ts}^* V_{tb} &= 0, \\ V_{ub}^* V_{ud} + V_{cb}^* V_{cd} + V_{tb}^* V_{td} &= 0, \end{aligned}$$

beschreiben Dreiecke in der komplexen $\rho - \eta-$Ebene.

Die Dreiecke haben eine nichtverschwindende Fläche, wenn die Phase $\delta \neq 0$ bzw. $V_{ub} \neq 0$, d.h. CP-Verletzung.
Am nützlichsten für den Test der Unitarität der CKM-Matrix ist das durch die letzte Gleichung,

$$\frac{V_{ub}^*}{\lambda V_{cb}} + \frac{V_{td}}{\lambda V_{cb}} = 1,$$

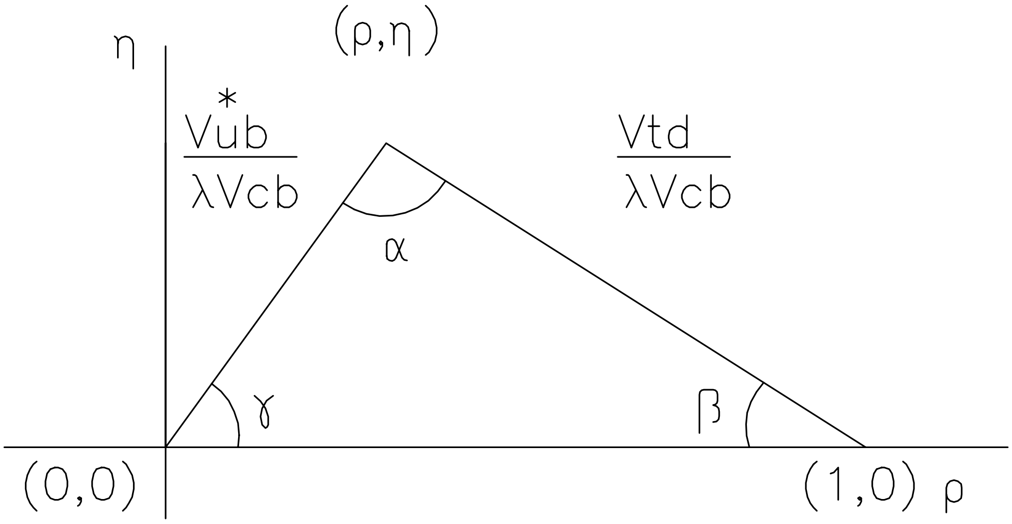
definierte Dreieck, das CP-Verletzung in B-Meson-Zerfällen (mit bottom-Quarks) beschreibt (sog. Unitaritätsdreieck):

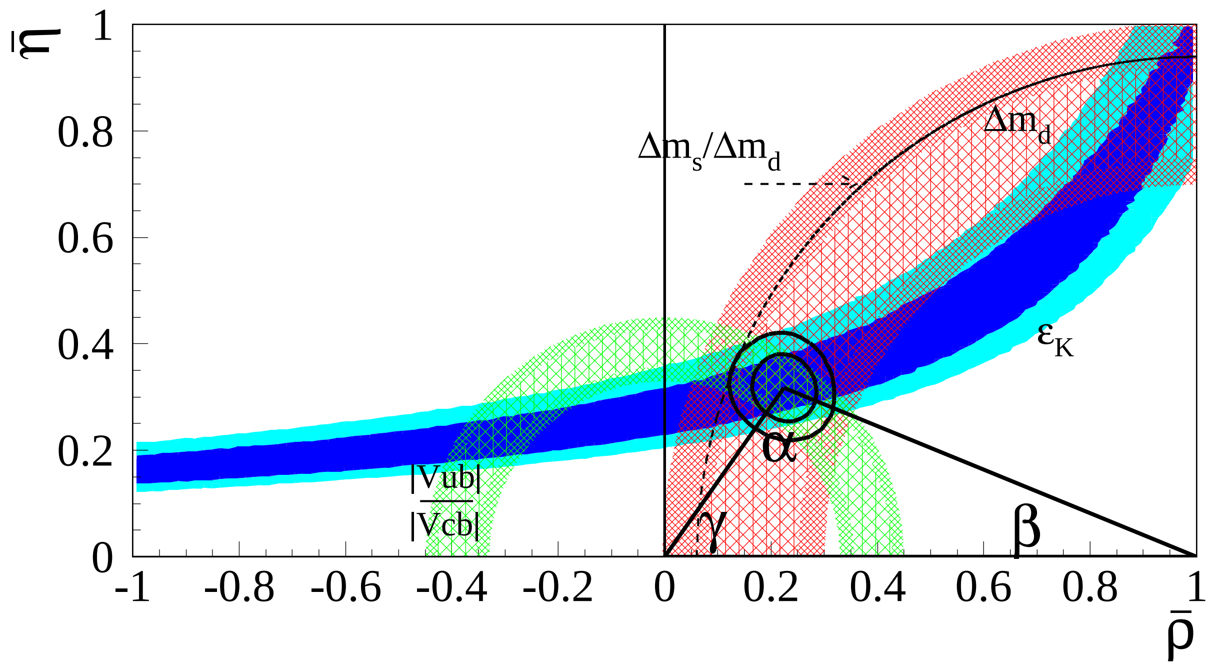


Es gilt: $V_{td} = |V_{td}| e^{-i\beta}$, $V_{ub} = |V_{ub}| e^{-i\gamma}$.

$B^0\overline{B}^0$-Mischungsrate groß , V_{ub}/V_{cb} groß
$\Longleftrightarrow$ große Fläche des Unitaritätsdreiecks
$\Longleftrightarrow$ starke CP-Verletzung in B-Mesonzerfällen.

Bestimmung des Unitaritätsdreiecks





$\Longrightarrow$ Randbedingungen für die Winkel:

$$\boxed{\begin{aligned} \sin 2\beta &= 0.70 \pm 0.07 \\ \sin 2\alpha &= -0.42 \pm 0.24 \\ \gamma &= (55 \pm 6)^\circ \end{aligned}}$$

$\Longrightarrow$ **CP-Verletzung**

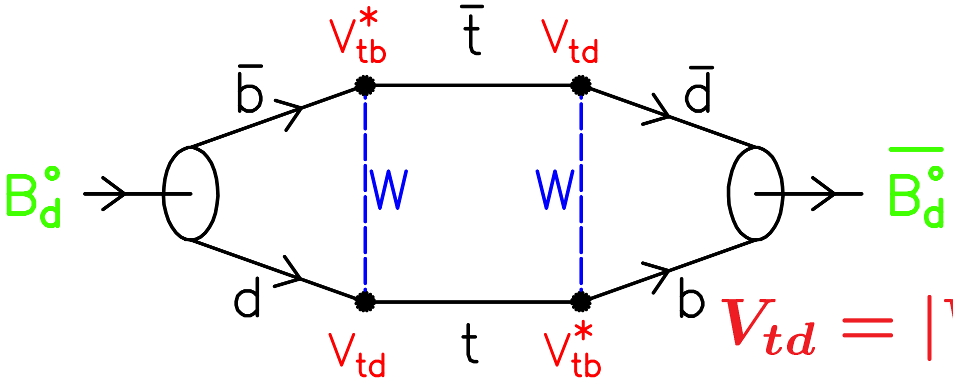
(Ann: Unitarität,
d.h. $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$**)**

$\Longrightarrow$ **$15 < \Delta m_s < 20$ ps^{-1}** $(95\%\ CL)$

CP-Verletzung bei $B_d^0\overline{B_d^0}$ -Mischung

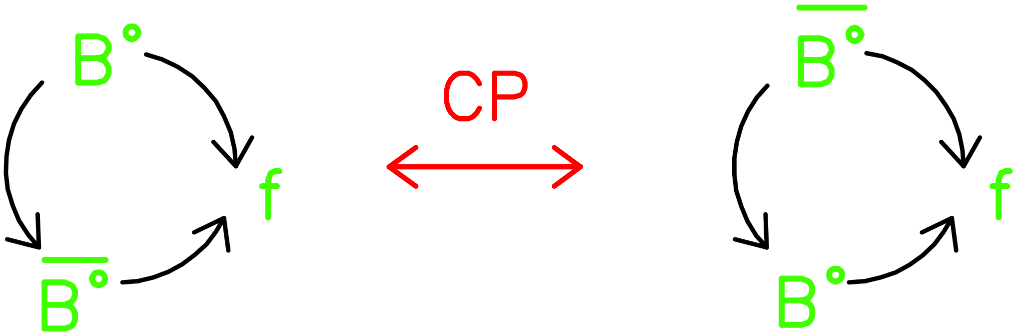
(wie bei $K^0\overline{K^0}$ -Mischung, 1964)

$$\boxed{\begin{aligned} B_1^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}[B^0 + e^{-2i\beta}\overline{B^0}] \\ B_2^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}[B^0 - e^{-2i\beta}\overline{B^0}] \end{aligned}}$$



$$V_{td} = |V_{td}|e^{-i\beta}$$

Wichtiger Spezialfall: B_d^0 -Zerfälle in CP-Eigenzustände f:



$$\Gamma(B^0 \to \overline{B^0} \to f) = \frac{A_f^2}{2\tau}e^{-t/\tau}(1 - \sin 2(\beta + \phi_f)\sin \Delta m\, t)$$

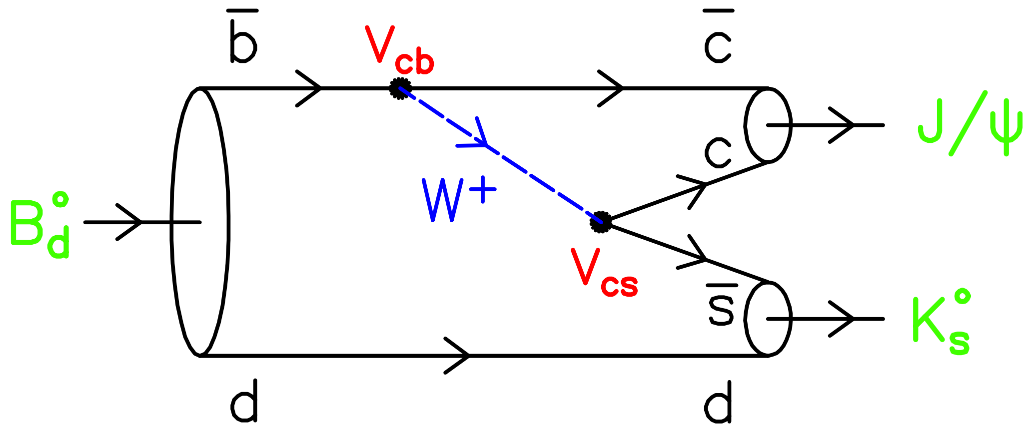
$$\neq \overline{\Gamma}(\overline{B^0} \to B^0 \to f) = \frac{A_f^2}{2\tau}e^{-t/\tau}(1 + \sin 2(\beta + \phi_f)\sin \Delta m\, t)$$

$\Longrightarrow$ **CP-verletzende Asymmetrie:**

$$\boxed{a_{CP}(t) = \frac{\overline{\Gamma}-\Gamma}{\overline{\Gamma}+\Gamma} = \sin 2(\beta + \phi_f)\sin \Delta m\, t}$$

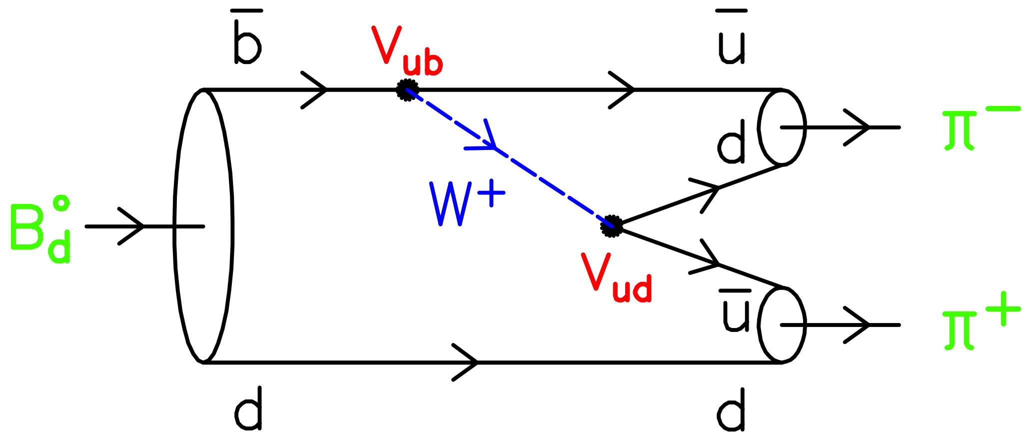
B_d^0–Zerfälle in CP-Eigenzustände

$B_d^0 \rightarrow J/\psi K_s^0$: $\phi_f = 0$



$$\boxed{a_{CP}(t) = \sin 2\beta \sin \Delta m\, t}$$

$B_d^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$: $\phi_f = \gamma$, $V_{ub} = |V_{ub}|e^{-i\gamma}$



$$\boxed{\begin{aligned} a_{CP}(t) &= \sin 2(\beta + \gamma) \sin \Delta m\, t \\ &= \sin 2\alpha \quad \sin \Delta m\, t \end{aligned}}$$

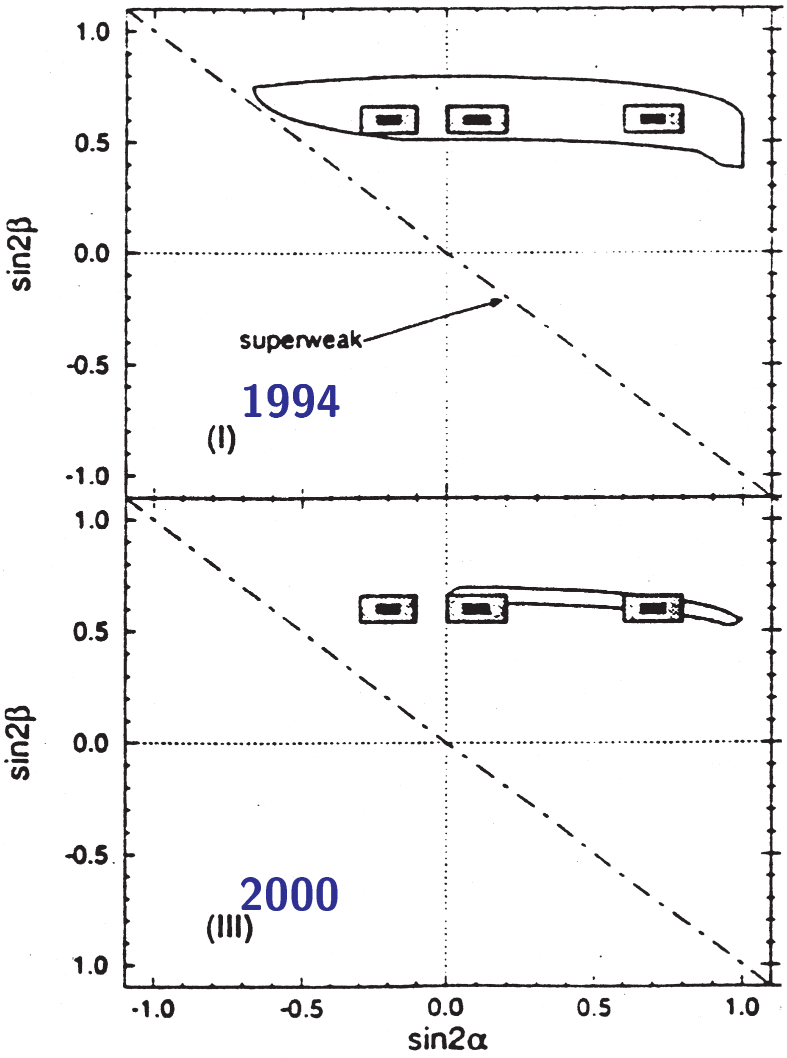
$\Longrightarrow$ **Direkte Messung der Winkel des Unitaritätsdreiecks.**

$\Longrightarrow$ **Test der Unitarität:** $\alpha + \beta + \gamma = 180°?$

B-Meson-Fabriken

Experiment		$N(B\overline{B})^\dagger$	$\Delta \sin 2\beta$	$\Delta \sin 2\alpha$	Δm_s^{max}
BaBar	e^+e^-	$3 \cdot 10^7$	0.10	0.20	
BELLE	e^+e^-	$1 \cdot 10^8$	0.08	0.15	
CDF/D0	$p\overline{p}$	$2 \cdot 10^{11}$	0.08	0.08	25 ps^{-1}
BTeV	$p\overline{p}$	$2 \cdot 10^{11}$	0.02	0.08	40 ps^{-1}
LHC-b	pp	$7.5 \cdot 10^{11}$	0.02	0.05	50 ps^{-1}
ATLAS/CMS	pp	$5 \cdot 10^{12}$	0.02	0.05	32 ps^{-1}

† pro Jahr



Messungen von $\sin 2\beta$:

CDF 1999:

$0.91^{+0.32}_{-0.18}$

ALEPH 2000:

$0.84^{+0.82}_{-1.00}$

BaBar 2002:

0.75 ± 0.10

BELLE 2002:

0.82 ± 0.13

Mittel: 0.78 ± 0.08

Indirekt: 0.70 ± 0.07