1.2.4.5 Massive Vektorfelder

Durch Einführung eines lorentzinvarianten Masseterms in der Lagrangedichte analog zur Klein-Gordon-Gleichung,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} M^2 A^\nu A_\nu$$

erhält man die Wellengleichung (Proca-Gleichung) für Spin-1 Bosonen mit Masse M (z.B. $W^\pm$, Z^0):

$$\begin{aligned} \partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + M^2 A^\nu &= 0, \\ \Box A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) + M^2 A^\nu &= 0. \end{aligned}$$

Die 4-Divergenz des ersten Terms der Gleichung verschwindet, so daß für massive Vektorfelder immer gilt $\partial_\mu A^\mu \equiv 0$, d.h. die Eichfreiheit ist durch Fixierung der Eichung verloren. Damit gilt für jede Komponente des Feldes $A^\nu(x)$ die Klein-Gordon-Gleichung mit Masse:

$$[\Box + M^2] A^\nu = 0$$

mit der Nebenbedingung $\partial_\mu A^\mu = 0$. Der Massenterm in $\mathcal{L}$ ist offensichtlich nicht invariant unter der Eichtransformation des 4-Potentials.

Um die Eichinvarianz auch für massive Vektorbosonen zu retten, wird der Higgs-Mechanismus mit spontaner Brechung der Eichsymmetrie benötigt.

Die ebenen Wellenlösungen für freie massive Vektorbosonen besitzen im Gegensatz zum Photon 3 Polarisationfreiheitsgrade mit zusätzlicher longitudinaler Polarisation bzw. transversaler Helizität $\lambda = 0$:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_\mu(k; \lambda = \pm 1) &= \mp \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, \pm i, 0); \\
\varepsilon_\mu(k; \lambda = 0) &= \mp \frac{1}{M}(k, 0, 0, E).
\end{aligned}
$$

mit $k_\mu = (E, 0, 0, k)$, $k_\mu k^\mu = E^2 - k^2 = M^2$

und $k_\mu \varepsilon^\mu = 0$.