1.3 Symmetrien der Elementarteilchen

Invarianz der Lagrange-Funktion bzw. Kovarianz der Bewegungsgleichungen unter Symmetrietransformationen führt zu Erhaltungssätzen und einer Klassifizierung der quantenmechanischen Teilchenzustände (Lösungen der Bewegungsgleichungen) nach Quantenzahlen, die zu Erhaltungsgrößen gehören (Teilchen-Multipletts).

Die Symmetrietransformationen bilden Symmetriegruppen.

Die für innere Symmetrien der Teilchen und Eichsymmetrien relevanten Symmetriegruppen sind die sog. Lie-Gruppen.

1.3.1 Symmetriegruppen: Lie-Gruppen

Gruppen von Transformationen $g(\alpha)$, die durch einen Satz kontinuierlicher Parameter α_a $(a = 1, ..., n)$ beschrieben werden und analytische Funktionen dieser Parameter sind.

Sie lassen sich aus infinitesimal kleinen Transformationen nahe der Einheitstransformation I,

$$\delta g = g(\delta\alpha) = I + i\delta\alpha^a T^a + \mathcal{O}(\delta\alpha^2),$$

zusammensetzen. T^a $(a = 1, ..., n)$ sind die Erzeugenden oder Generatoren der Gruppe.

Alle Gruppenelemente lassen sich in der Form

$$g(\alpha) = e^{i\alpha^a T^a}$$

darstellen (Phasentransformationen der Wellenfunktion).

Die Transformationen sind unitär, wenn die Erzeugenden hermitesch sind. Alle Darstellungen endlicher (endliche Zahl von Parametern) oder kompakter (beschränkter Parameterraum) Lie-Gruppen lassen sich darauf zurückführen (geeignete Parametrisierung).

Unitarität ist wegen der Erhaltung der Wahrscheinlichkeit eine Bedingung für Symmetrietransformationen von Zuständen in der Quantenmechanik.

Die hermiteschen Generatoren sind quantenmechanische Observable und Erhaltungsgrößen.

Sie spannen einen n-dimensionalen Vektorraum hermitescher Operatoren auf.

Jeder Satz von n linear unabhängigen Generatoren einer Lie-Gruppe erfüllt die Vertauschungsrelationen

$$[T^a, T^b] = T^a T^b - T^b T^a = i f^{abc} T^c$$

mit den i.a. komplexen Strukturkonstanten f^{abc} und $[T^a, T^b] = -[T^b, T^a]$.

Mit der Vertauschung als zusätzlicher Operation bilden die Generatoren eine sog. Lie-Algebra. Die Strukturkonstanten sind spezifisch für die Lie-Algebra. Sie hängen aber von der Wahl der unabhängigen Generatoren und damit der Parameter der Gruppe ab.
Verschiedene Lie-Gruppen können die gleiche Lie-Algebra besitzen (z.B. die Drehimpulsgruppen $SO(3)$ und $SU(2)$).

Aufgrund der Vertauschungsrelation und der Jacobi-Identität für Kommutatoren,

$$[T^a, [T^b, T^c]] + [T^b, [T^c, T^a]] + [T^c, [T^a, T^b]] \equiv 0,$$

muß für die Strukturkonstanten gelten:

$$f^{ade} f^{bcd} + f^{bde} f^{cad} + f^{cde} f^{abd} = 0.$$

Die Zahl der unabhängigen Parameter (Ladungen) bzw. der Generatoren ist die Ordnung n einer Lie-Gruppe.
Die maximale Anzahl der miteinander vertauschenden und damit simultan diagonalisierbaren Generatoren ist der Rang r der Gruppe.

Klassifizierung der Lie-Gruppen:

A) Die einzige kommutative oder Abelsche Lie-Gruppe ist die Gruppe U(1) der unitären 1-dimensionalen Phasentransformationen
$\psi \to e^{i\alpha}\psi$ (entspricht Drehungen in der Ebene $SO(2)$).

B) Allgemeine Lie-Algebren lassen sich als direkte Produkte aus einfachen Lie-Algebren, die nicht weiter in Produkte von Untergruppen zerlegt werden können, sowie der kommutativen Lie-Algebra $U(1)$ darstellen.

C) Die einfachen und kompakten (s.o.) Lie-Algebren lassen sich in 4 Klassen einteilen, die durch Transformationsgruppen definiert sind:

1. Spezielle unitäre Transformationen U N-dimensionaler Vektoren: $SU(N)$ $(N \geq 2)$

   mit $U^\dagger U = 1$ und $\mathrm{Det}(U) = 1$. Sie erhalten das komplexe Betragsquadrat der Vektoren.

   Die Generatoren $T = T^\dagger$ lassen sich darstellen als hermitesche $N \times N$-Matrizen mit $\mathrm{Spur}(T) = 0$, die auf einem N-dimensionalen Vektorraum transformieren.
   Dabei handelt es sich um eine fundamentale Darstellung, die die niedrigste Dimension N besitzt (s.u.).

   Es gibt $2N^2 - N^2 - 1 = N^2 - 1$ unabhängige Matrizen dieser Art und damit Generatoren und unabhängige Parameter der Gruppe. $SU(N)$ hat den Rang $N-1$.

2. Reelle orthogonale Transformationen O N-dimensionaler Vektoren: $SO(N)$

   mit $O^T O = 1$ und $\mathrm{Det}(O) = 1$. Sie erhalten das reelle Betragsquadrat der Vektoren.

   $SO(N)$ besitzt $N(N-1)/2$ Generatoren und hat den Rang $r = N/2$ bzw. $(N-1)/2$ (ganzzahlig).

3. Symplektische Transformationen $Sp(2N)$ $(N \geq 3)$: darstellbar durch reelle $2N \times 2N$ Matrizen, die die Matrix M mit $M_{i,i-1} = -M_{i-1,i}$ und sonst $M_{ij} = 0$ invariant lassen mit Ordnung $n = N(2N+1)$ und Rang $r = N$.

4. Exzeptionelle Lie-Algebren (n = Ordnung, r = Rang):

   G_2 $(n = 14,\ r = 2)$
   F_4 $(n = 52,\ r = 4)$
   E_6 $(n = 78,\ r = 6)$
   E_7 $(n = 133,\ r = 7)$
   E_8 $(n = 248,\ r = 8)$.

1.3.2 Darstellungen von Gruppen

Die Darstellung einer Gruppe G ist definiert als die Abbildung

$$\theta : G \longrightarrow T$$

auf eine Gruppe T linearer Transformationen auf einem N-dimensionalen Vektorraum V.

Mit den linearen Transformationen $D(s) \in T$ gilt:

$$s \cdot t \longrightarrow D(s) \cdot D(t)$$

und damit $D(e) = I$ und $D(s^{-1}) = D^{-1}(s)$.

Der Vektorraum V ist der Darstellungsraum. Seine Dimension N ist die Dimension der Darstellung.

Nach Wahl einer Basis im Darstellungsraum können die linearen Transformationen als $N \times N$-Matrizen dargestellt werden.

Die fundamentalen Darstellungen sind diejenigen mit der niedrigsten Dimension (> 1 für nicht-Abelsche Gruppen, da 1-dimensionale Matrizen immer kommutieren).

Bei reduziblen Darstellungen kann der Darstellungsraum in invariante Unterräume zerlegt werden, die zueinander orthonormale Basen besitzen.

Irreduzible Darstellungen transformieren auf invarianten Darstellungsräumen, die nicht in kleinere invariante Unterräume zerlegt werden können.

Die Suche nach Eigenvektoren und Eigenwerten der Symmetrieoperatoren entspricht der Konstruktion irreduzibler Darstellungen der Symmetriegruppen.

Die Teilchenfelder müssen nach unitären Darstellungen der Symmetriegruppen der Lagrangefunktion transformieren. Sie gehören sog. Multipletts an, den N-dimensionalen irreduziblen Eigenräumen der Symmetrietransformationen.

Der Rang der Gruppe gibt die Zahl der gleichzeitig diagonalisierbaren Symmetrieoperatoren (Generatoren) an und damit die Zahl der Parameter, die die Multipletts beschreiben, z.B. J_z für die Drehimpuls- oder Isospingruppe $SU(2)$ (Rang $r = 2 - 1 = 1$) und (I_3, $Y = 2(Q - I_3)$) für die $SU(3)$-Symmetrie der Quark-flavours u, d, s (Rang $r = 3 - 1 = 2$).

Für $SU(N)$ gilt: der Rang der Gruppe $= N - 1 =$ Zahl der fundamentalen Darstellungen.

Da der Hamilton-Operator mit dem Drehimpuls und den Operatoren für andere innere Symmetrien vertauscht, müssen alle Teilchenzustände eines Multipletts einer inneren Symmetrie die gleiche Masse und den gleichen Spin besitzen; andernfalls ist die Symmetrie mehr oder minder stark gebrochen.

1.3.3 Symmetrien in der Quantenmechanik

Symmetrietransformationen der Wellenfunktion lassen die Schrödingergleichung

$$i\frac{\partial\psi(\vec{x},t)}{\partial t} = \widehat{H}\psi(\vec{x},t)$$

invariant, d.h. die transformierten Zustände

$$\psi'(\vec{x},t) = \widehat{U}\psi(\vec{x},t)$$

erfüllen die gleiche Schrödingergleichung, wenn $\widehat{U}$ nicht von der Zeit abhängt und der Hamiltonoperator $\widehat{H}$ invariant ist unter den Transformationen:

$$\widehat{U}\widehat{H}\widehat{U}^\dagger \equiv \widehat{H},$$

d.h. Hamiltonoperator und Transformationsoperator $\widehat{U}$ vertauschen:

$$[\widehat{H},\widehat{U}] = 0.$$

Die Transformationsoperatoren auf dem Hilbertraum der Wellenfunktionen sind unitäre Transformationen, $UU^\dagger = U^\dagger U = 1$, damit die Erhaltung der Wahrscheinlichkeit gewährleistet ist, d.h. der Betrag der Wellenfunktion ändert sich nicht.

Beispiele für Symmetrietransformationen der Wellenfunktion ("Rotationen" im Hilbertraum: Phasentransformationen):

1. Zeittranslationen: $\widehat{U} = e^{-i\widehat{H}t}$

   Infinitesimal:
$$\psi'(\vec{x},t) = (1 - i\widehat{H}\delta t)\psi(\vec{x},t) = \psi(\vec{x},t) + \frac{\partial\psi(\vec{x},t)}{\partial t}\delta t.$$

2. Räumliche Translationen: $\widehat{U} = e^{-i\widehat{\vec{p}}\cdot\vec{x}}$

   Infinitesimal:
$$\psi'(\vec{x},t) = (1 - i\widehat{\vec{p}}\cdot\delta\vec{x})\psi(\vec{x},t) = \psi(\vec{x},t) - \delta\vec{x}\cdot\vec{\nabla}\psi(\vec{x},t).$$

3. Rotationen im Raum: $\widehat{U} = e^{-i\widehat{\vec{J}}\cdot\vec{\alpha}}$

   Infinitesimal:
$$\psi'_\beta(\vec{x},t) = (1 - i\widehat{\vec{J}}_{\beta\gamma}\cdot\delta\vec{\alpha})\psi_\gamma(\vec{x},t).$$

Die infinitesimalen (unitären) Transformationen werden durch die (hermiteschen) Operatoren der konjugierten Observablen (Energie$\leftrightarrow$ Zeit, Impuls$\leftrightarrow$ Ort, Drehimpuls$\leftrightarrow$ Drehwinkel) "erzeugt": Generatoren der Transformationen von (nicht-kompakten) Lie-Gruppen.

- Die unitären Symmetrietransformationen auf dem Hilbertraum (Phasentransformationen der Wellenfunktion) haben Gruppeneigenschaften mit der Hintereinanderausführung als Gruppenoperation.

  Sie sind spezielle Darstellungen der (kontinuierlichen) Symmetriegruppen der Raum- und Zeittranslationen, der räumlichen Rotationen usw.

- Operatoren $\widehat{O}$, die mit dem Hamiltonoperator vertauschen, sind Konstanten der Bewegung und entsprechen erhaltenen Observablen, d.h.

$$i\frac{d\widehat{O}}{dt} = [\widehat{H}, \widehat{O}] = 0.$$

- Observable, die mit dem Hamiltonoperator vertauschen, lassen sich gleichzeitig mit ihm diagonalisieren, d.h. die Eigenzustände von $\widehat{H}$ (stationäre Lösungen der Schrödingergleichung) sind gleichzeitig Eigenzustände von Impuls, Drehimpuls usw. mit festen Eigenwerten.

  Symmetrieoperationen, die mit dem Hamiltonoperator vertauschen, führen zur Entartung der Energieeigenzustände des Hamiltonoperators, d.h. die Eigenzustände zu festen Energieeigenwerten bilden unter den Symmetrietransformationen invariante Unterräume des Hilbertraums (Eigenräume zu den Darstellungen der Symmetrietransformationen mit bestimmter Dimension).

  Die Symmetrieeigenschaften des Hamiltonoperators und Erhaltungssätze erleichtern damit die Lösung der Schrödingergleichung und die Bestimmung der Eigenzustände.

Beispiel: Drehimpulserhaltung:

- $[\vec{J}, H] = 0$

- $\left.\begin{array}{l}[J_x, J_y] = iJ_z \\ [J_y, J_z] = iJ_x \\ [J_z, J_x] = iJ_y\end{array}\right\}\quad [J_i, J_j] = i\sum_k \varepsilon_{ijk} J_k \quad (i, j, k = x, y, z)$

mit den Strukturkonstanten

$$\varepsilon_{i,j,k} = \begin{cases} 0, & \text{2 gleiche Indizes} \\ +1, & \text{Indizes gerade Permutation von } x, y, z \\ \text{-1}, & \text{Indizes ungerade Permutation von } x, y, z. \end{cases}$$

Mit $\vec{J}^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$ gilt:

- $[\vec{J}, \vec{J}^2] = 0,$

d.h. gemeinsame Eigenzustände von J_i und $\vec{J}^2$. Spezielle Wahl: J_z und $\vec{J}^2$ bei Spinquantisierungsrichtung in z-Richtung.

J_x, J_y, J_z sind die Erzeugenden (Generatoren) der Drehgruppe $SO(3)$, d.h. der Gruppe aller Drehungen im dreidimensionalen Raum, die aus Drehungen um drei unabhängige Achsen zusammengesetzt werden können (3 Euler-Winkel).

Eine Darstellung (Realisierung) der Drehgruppe $SO(3)$ sind reelle orthogonale 3×3-Drehmatrizen, die die Vektoren im Raum drehen, ohne ihren Betrag zu ändern, und durch $9-6=3$ unabhängige Parameter (z.B. die Euler-Winkel) beschrieben werden.

Die Gruppe $SU(2)$ läßt sich auf die Gruppe $SO(3)$ im Verhältnis 2:1 abbilden. Beide Gruppen sind äquivalent in dem Sinne, daß die infinitesimalen Transformationen und die Generatoren identisch sind. $SU(2)$ besitzt im Gegensatz zu $SO(3)$ auch Darstellungen zu halbzahligen Spineigenwerten und damit geradzahligen Dimensionen.

Die definierende und fundamentale Darstellung der $SU(2)$-Gruppe sind die komplexen unitären 2×2-Matrizen mit Determinante $=1$, die ebenfalls durch $3=8-5$ unabhängige Parameter beschrieben werden.

Alternative Erzeugende der Drehimpulsgruppe:

- $J^+ = J_x + iJ_y, \quad J^- = J_x - iJ_y$

mit

- $[J_z, J^+] = J^+, \quad [J_z, J^-] = -J^-$
- $[J+, J^-] = 2J_z$

und damit

- $[\vec{J}^2, J^\pm] = 0.$

Es gilt: $\vec{J}^2 = \frac{1}{2}(J^+J^- + J^-J^+) + J_z^2.$

Eigenzustände der Drehimpulsoperatoren:

Simultane Diagonalisierung:

$$\begin{aligned} \vec{J}^2|j,m> &= j(j+1)|j,m>, \\ J_z|j,m> &= m|j,m>. \end{aligned}$$

Definiert $(2j+1)$-dimensionale Eigenräume des Drehimpulses (und damit auch des Hamiltonoperators) zu den Eigenwerten $j = 0, 1/2, 1, 3/2, ...$ und $m = -j, -j+1, ..., j-1, j$ von $\vec{J}^2$ und J_z (Singuletts, Dubletts, Tripletts usw.).

$J^\pm$ sind Auf- und Absteigeoperatoren in jedem Eigenraum:

$$\begin{aligned} J^+|j,m> &= |j,m+1> \quad (m<j), \\ &= 0 \quad (m=j), \\ J^-|j,m> &= |j,m-1> \quad (m>-j), \\ &= 0 \quad (m=-j). \end{aligned}$$

Beispiel:

Spin $\frac{1}{2}$-Zustände mit Eigenwerten $j = 1/2$, $m = \pm 1/2$.

3 unabhängige hermitesche 2×2-Spinmatrizen mit Spur $= 0$ (entspricht Determinante $= 1$ für die von ihnen erzeugten Rotationsmatrizen), die Pauli'schen Spinmatrizen:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{\sigma}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot I.$$

in der Pauli-Darstellung, in der die Eigenwerte (s.o.) zur Eigenvektorbasis

$$\begin{aligned} |\frac{1}{2}, +\frac{1}{2} > &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} > &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

evident sind, d.h. mit $\vec{J} \equiv \frac{1}{2}\vec{\sigma}$ gilt

$$\begin{aligned} \vec{J}^2\, |\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2} > &= \frac{3}{4}\, |\frac{1}{2}, +\frac{1}{2} >, \\ J_z\, |\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2} > &= \pm\frac{1}{2}\, |\frac{1}{2}, +\frac{1}{2} > . \end{aligned}$$

Die Auf- und Absteigeoperatoren reduzieren sich auf Projektionsoperatoren auf die beiden Zustände Spin up/down:

$$
\begin{aligned}
J^+ = \frac{1}{2}(\sigma_x + i\sigma_y) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
J^- = \frac{1}{2}(\sigma_x - i\sigma_y) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Addition von Drehimpulsen:

Die Drehimpulszustände von Teilchen mit Bahndrehimpuls und Spin oder von zusammengesetzten Teilchen mit mehreren Komponenten mit Spin entsprechen Produktdarstellungen aus den Drehimpulsdarstellungen der Komponenten, die im allgemeinen reduzibel sind.

Die Zustände des Gesamtdrehimpulses $\vec{J} = \vec{J_1} + \vec{J_2}$ mit $j = j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1, ..., |j_1 - j_2|$ und $j_z = j_{z1} + j_{z2}$ bilden $2j + 1$-dimensionale irreduzible Darstellungen der $SU(2)$-Gruppe, die man durch Zerlegung (Ausreduzieren) der reduziblen Produktdarstellungen erhält; z.B.:

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & & & & \\ \cdot & \cdot & & & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$$3_{j=1} \otimes 2_{j=1/2} = 2_{j=1/2} \oplus 4_{j=3/2}$$

$$2_{j=1/2} \otimes 2_{j=1/2} = 1_{j=0} \oplus 3_{j=1}$$

$$(2 \otimes 2) \otimes 2 = (1 \otimes 2) \oplus (3 \otimes 2) = 1 \oplus (2 \oplus 4)$$

Beispiele innerer Symmetrien:

1. $U(1)$-Phasentransformationen der Wellenfunktionen: führen zur Wahrscheinlichkeitserhaltung und Erhaltung der elektrischen Ladung (s.u.).

2. Isospinsymmetrie $SU(2)$ der starken Wechselwirkung, analog zur räumlichen Drehimpulssymmetrie.

   Fundamentale Dublettdarstellung:

$$\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \text{ bzw.} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}.$$

3. Schwache Isopsinsymmetrie $SU(2)_W$, Eichsymmetrie der schwachen Wechselwirkung:

Fundamentale Dublettdarstellung: Quark- und Lepton-Dubletts.

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}.$$

Fermionen und Antifermionen befinden sich in der gleichen Darstellung und besitzen daher die gleichen schwachen Ladungen.

Die Eichbosonen (W^+, Z^0, W^-) bilden ein Multiplett der 3-dimensionalen adjungierten Darstellung entsprechend den drei Generatoren (I^+, I^0, I^-) der $SU(2)$-Gruppe. Die Isospin-Triplett-Darstellung entspricht der Spin 1-Darstellung der räumlichen $SU(2)$-Gruppe.

4. $SU(3)$ flavour-Symmetrie der starken Wechselwirkung: das Quarkmodell

Es gibt zwei verschiedene fundamentale Triplett-Darstellungen: (u, d, s) und $(\bar{u}, \bar{d}, \bar{s})$.

Quarks und Antiquarks sind in verschiedenen (zueinander konjugierten) Multipletts.

Die Multipletts der Mesonen und Baryonen werden durch Produkte der fundamentalen Darstellungen und Zerlegen in irreduzible Unterräume (Ausreduzieren) gewonnen, z.B.

$$3 \otimes \bar{3} = 1 \oplus 8$$

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10$$

$$\bar{3} \otimes \bar{3} \otimes \bar{3} = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10$$

Baryonen und Antibaryonen (qqq) befinden sich in unterschiedlichen Multipletts, während Mesonen und Antimesonen $(q\bar{q})$ in den gleichen Multipletts auftreten.

1.3.4 Diskrete Symmetrien

Symmetrien der freien Teilchen (Beispiel: Fermionen) und der elektromagnetischen und starken, nicht der schwachen Wechselwirkung:

1. Parität P (Raumspiegelung):

   $\vec{x} \longrightarrow -\vec{x}$, $\vec{p} \longrightarrow -\vec{p}$.

$$\psi(t, \vec{x}) \longrightarrow \psi^P(t, -\vec{x}) = \eta_P \gamma^0 \psi(t, \vec{x})$$

   erfüllt die raumgespiegelte Dirac-Gleichung.

2. Zeitinversion T: $t \longrightarrow -t$.

$$\psi(t, \vec{x}) \longrightarrow \psi^T(-t, \vec{x}) = i\gamma^1\gamma^3\psi^*(t, \vec{x})$$

   erfüllt die zeitgespiegelte Dirac-Gleichung.

3. Ladungskonjugation C:

   Teilchen $\longrightarrow$ Antiteilchen, $Q_f \longrightarrow -Q_f$.

$$\psi(t, \vec{x}) \longrightarrow \psi^C(t, \vec{x}) = i\eta_C \gamma^2 \psi^*(t, \vec{x})$$

   erfüllt die konjugierte Dirac-Gleichung.

$\Longrightarrow$ CPT-Symmetrie,

$\Longrightarrow$ gleiche Lebensdauern und Massen von Teilchen und Antiteilchen.

CPT-Erhaltung gilt allgemein für jede lokale, lorentzinvariante Feldtheorie mit $\mathcal{L}^\dagger = \mathcal{L}$ und Spin-Statistik-Relation (und damit für alle Wechselwirkungen).

(Schwinger 1951, Pauli 1955, Lüders 1957).

Skalare wie $\overline{\psi}\psi$ sind invariant unter Raumspiegelung.

Pseudoskalare wie $\overline{\psi}\gamma^5\psi$ wechseln das Vorzeichen unter Raumspiegelung.

(4-) Vektoren wie $\overline{\psi}\gamma^\mu\psi$ (Strom): Zeitkomponente erhalten, Richtungsumkehr der Raumkomponente bei Raumspiegelung.

(4-) Axialvektoren wie $\overline{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi$: Raumkomponente erhalten, Vorzeichenwechsel der Zeitkomponente bei Raumspiegelung.

1.3.5 Symmetrien und Erhaltungssätze

Mit Hilfe des Lagrange-Formalismus kann man leicht die Verbindung zwischen Symmetrien der Feldgleichungen und erhaltenen physikalischen Observablen bzw. Quantenzahlen der Teilchen herstellen.

Das ist der Inhalt des Noether-Theorems (E. Noether, 1918):

Mit jeder kontinuierlichen Symmetrietransformation der Lagrangefunktion (Invarianz bis auf totale Ableitung) ist ein Erhaltungssatz verbunden.

Invarianz unter Zeittranslationen führt z.B. zur Impulserhaltung, Invarianz unter Drehungen zu Drehimpuls-erhaltung (Jacobi, 1842).

1.3.5.1 Der Energieerhaltungssatz in der klassischen Mechanik

folgt nach dem Noether-Theorem aus der Homogenität der Zeit, d.h. aus der Kovarianz der Bewegungsgleichungen und der Invarianz der Lagrange-Funktion unter Zeittranslationen (Schütz, 1897):

$$t \longrightarrow t' = t + \delta t.$$

Damit ist die Variation der Lagrange-Funktion für ein abgeschlossenes System ohne explizite Zeitabhängigkeit:

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dt} &= \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i \\ &= \sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right)\end{aligned}$$

unter Benutzung der Euler-Lagrange-Gleichungen.

Damit gilt der Erhaltungssatz

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L\right) = 0$$

für die Gesamtenergie

$$E = H = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = \sum_i p_i \dot{q}_i - L.$$

Da $L(q_i, \dot{q}_i) = T(q_i, \dot{q}_i) - V(q_i)$ für abgeschlossene Systeme und $T \sim \dot{q}_i^2$, gilt

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T$$

und damit

$$E = T + V = H.$$

1.3.5.2 Erhaltungssätze in der Feldtheorie

1) Phasentransformation der (komplexen) Felder:
U(1)-Eichsymmetrie:

$$\begin{aligned}
\phi(x) &\longrightarrow \phi'(x) = e^{iQ\alpha}\phi(x), \\
\phi^*(x) &\longrightarrow \phi^{*\prime}(x) = e^{-iQ\alpha}\phi^*(x).
\end{aligned}$$

Führt zu infinitesimalen Variationen der Felder

$$\begin{aligned}
\phi(x) &\longrightarrow \phi'(x) = \phi(x) + \delta\phi(x) = \phi(x) + iQ(\delta\alpha)\phi(x), \\
\phi^*(x) &\longrightarrow \phi^{*\prime}(x) = \phi^*(x) + \delta\phi^*(x) = \phi^*(x) - iQ(\delta\alpha)\phi^*(x)
\end{aligned}$$

und es gilt $\delta(\partial_\mu\phi) = iQ(\delta\alpha)\partial_\mu\phi$, da $\delta\alpha$ eine nicht ortsabhängige Konstante ist.

Falls die Lagrangedichte $\mathcal{L}(\phi, \phi^*, \partial_\mu\phi, \partial_\mu\phi^*)$ eichinvariant ist, gilt mit den Euler-Lagrange-Gleichungen für beliebige $\delta\alpha$:

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^*}\delta\phi^* + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^*)}\delta(\partial_\mu\phi^*) \\
&= \left[\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right] iQ(\delta\alpha)\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} iQ(\delta\alpha)\partial_\mu\phi + c.c. \\
&= iQ(\delta\alpha)\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\phi\right] - iQ(\delta\alpha)\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^*)}\phi^*\right] \equiv 0,
\end{aligned}$$

d.h. es gilt die Kontinuitätsgleichung für die 4-Stromdichte $j^\mu = (\rho, \vec{j})$ der Ladung $Q = \int d^3x\rho$

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{\partial}{\partial t}\rho + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0 \qquad (1)$$

mit

$$j^\mu \equiv -iQ\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\phi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)}\phi^*\right), \tag{2}$$

so daß die Ladung Q in einem abgeschlossenen System eine Erhaltungsgröße ist:

$$\frac{d}{dt}Q = 0.$$

Innere (globale) Eichsymmetrien der Teilchenfelder führen zu erhaltenen Ladungen, internen Quantenzahlen.

Erhaltene Quantenzahlen unter der elektromagnetischen und starken Wechselwirkung ($U(1)$-Eichsymmetrien):

- Leptonflavour,
- Quarkflavour,

und auch bei der schwachen Wechselwirkung:

- Leptonzahl,
- Leptongenerationenzahl (außer bei Neutrinooszillationen),
- Baryonenzahl (Quarks).

2) Raum-Zeit-Translation (o.E. infinitesimal):

$$x_\mu \longrightarrow x'_\mu = x_\mu + \delta x_\mu .$$

Falls $\mathcal{L}$ forminvariant unter der Transformation ist, ändert sich $\mathcal{L}$ um

$$\delta\mathcal{L} = \mathcal{L}[x'] - \mathcal{L}[x] = \delta x^\nu \frac{d\mathcal{L}}{dx^\nu} = \delta x^\nu \partial_\nu \mathcal{L} \equiv \delta x_\mu g^{\mu\nu} \partial_\nu \mathcal{L}. \quad (3)$$

Mit

$$\delta\phi = \phi(x') - \phi(x) = \delta x^\mu \partial_\mu \phi(x) \cdot$$

und

$$\delta(\partial_\mu \phi) = \partial_\mu \phi(x') - \partial_\mu \phi(x) = \delta x^\nu \partial_\nu \partial_\mu \phi(x)$$

gilt außerdem bei Abhängigkeit der Lagrangedichte von den Raum-Zeit-Koordinaten nur über die Felder $\phi(x)$:

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi).$$

Mit den Euler-Lagrange-Gleichungen kann man $\partial\mathcal{L}/\partial\phi$ eliminieren, so daß

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &= \left[\partial_\nu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi)}\right]\delta x^\mu \partial_\mu\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi)}\delta x^\mu \partial_\mu\partial_\nu\phi \qquad (4)\\ &= \partial_\nu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi)}\delta x^\mu\partial_\mu\phi\right]. \qquad (5)\end{aligned}$$

Nach Gleichsetzen der Ausdrücke (3) und (5) für $\delta\mathcal{L}$ gilt für beliebige δx^μ:

$$\delta x_\mu \partial_\nu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi)}\partial^\mu\phi - g^{\mu\nu}\mathcal{L}\right] = 0, \qquad (6)$$

d.h. es gilt die Kontinuitätsgleichung

$$\partial_\mu\Theta^{\mu\nu} = 0 \qquad (7)$$

für den Energie-Impuls-Spannungsdichte-Tensor (in eckigen Klammern in Gl.(6)):

$$\Theta^{\mu\nu} \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi)}\partial^\mu\phi - g^{\mu\nu}\mathcal{L}. \qquad (8)$$

Es folgt u.a. die Kontinuitätsgleichung für die Energieflußdichte:

$$\partial_\mu \Theta^{\mu 0} \equiv \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{H} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{P}} = 0, \tag{9}$$

wobei

$$\Theta^{00} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)}\partial^0 \phi - \mathcal{L} = 2\mathcal{T} - \mathcal{L} = \mathcal{T} + \mathcal{V} = \mathcal{H} \tag{10}$$

die Energiedichte $\mathcal{H}$ und entsprechend $\Theta^{0\nu} \equiv \mathcal{P}^\nu$ die 4-Impulsdichte sind.

Damit gelten nach (9) für die Gesamtenergie (Hamiltonfunktion) $H \equiv \int d^3x \Theta^{00}$ bzw. für den 4-Impuls $P^\nu \equiv \int d^3x \Theta^{0\nu}$ in einem abgeschlossenen System die Erhaltungssätze

$$\frac{d}{dt}H = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt}P^\nu = 0. \tag{11}$$

Auf analoge Weise führt die Rotationssymmetrie des Raums zur Drehimpulserhaltung und erhaltenen internen Spinquantenzahlen ($SO(3)$- bzw. $SU(2)$-Symmetrie des Raums).

Rotationen der Raum-Zeit entsprechen der Lorentz-Invarianz (Relativitätstheorie).

1.4 Eichsymmetrien und Wechselwirkungen

1.4.1 Globale Eichinvarianz

Für Quantenfelder können die Gesetze der elektromagnetischen Wechselwirkung aus einem Eichprinzip hergeleitet werden (H. Weyl 1921, 1929).

Die Erwartungswerte quantenmechanischer Observabler (einschließlich der Lagrangefunktion!)

$$< \mathcal{O} >= \int \psi^* \mathcal{O} \psi$$

sind invariant unter globalen Phasenrotationen der Wellenfunktion

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = e^{i\alpha}\psi(x).$$

Nur relative Phasen zwischen Zuständen sind meßbar.

Die Invarianz der Lagrangefunktion (Forminvarianz der Wellengleichung) unter Phasenrotationen entspricht einer globalen U(1)-Symmetrie, genannt "Eichsymmetrie", die nach dem Noether'schen Theorem zur Erhaltung der Wahrscheinlichkeit und von Ladungen führt.

U(1) ist die Gruppe der unitären Transformationen mit der niedrigsten Dimension 1; Phasenrotationen der komplexen Wellenfunktionnen sind eine Darstellung der Gruppe auf dem Hilbertraum.

1.4.2 Lokale Eichsymmetrie

Die quantenmechanischen Erwartungswerte sollen invariant sein unter lokaler Phasenwahl der Wellenfunktionen oder Felder, d.h. unabhängig an verschiedenen Raum-Zeit-Punkten:

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = e^{i\alpha(x)}\psi(x).$$

Ortsabhängige Phasentransformationen (lokale Eichtransformationen) bedeuten für die Ableitungen der Felder in den Wellengleichungen:

$$\partial_\mu\psi(x) \longrightarrow \partial_\mu\psi'(x) = e^{i\alpha(x)}[\partial_\mu\psi(x) + i(\partial_\mu\alpha(x))\psi(x)].$$

Invarianz der Lagrangedichte und Forminvarianz der Wellengleichungen kann erreicht werden, indem die gewöhnliche Ableitung durch eine eich-kovariante Ableitung ersetzt wird:

$$\partial_\mu \longrightarrow D_\mu \equiv \partial_\mu + iqA_\mu(x),$$

wobei q die elektrische Ladung des Feldes $\psi(x)$ ist und $A_\mu(x)$ das 4-Potential des elektromagnetischen Feldes, das sog. Eichvektorfeld zur Eichgruppe U(1), das unter den Phasenrotationen transformiert wie

$$A_\mu(x) \longrightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{q}\partial_\mu\alpha(x)$$

($\equiv$ Eichtransformation des elektromagnetischen Feldes).

Damit gilt

$$
\begin{aligned}
D_\mu \psi(x) &= \partial_\mu + iqA_\mu \longrightarrow \\
D'_\mu \psi'(x) &= (\partial_\mu + iqA'_\mu(x)) e^{i\alpha(x)} \psi(x) \\
&= e^{i\alpha(x)} [\partial_\mu + i\partial_\mu \alpha(x) + iqA_\mu(x) - i\partial_\mu \alpha(x)] \psi(x) \\
&= e^{i\alpha(x)} [\partial_\mu + iqA_\mu(x)] \psi(x) \equiv e^{i\alpha(x)} D_\mu \psi(x)
\end{aligned}
$$

und $\psi^* D_\mu \psi$ ist invariant unter lokalen Phasentransformationen.

Dies wurde durch die Einführung einer Wechselwirkung für das Feld ψ, der elektromagnetischen Wechselwirkung für die U(1)-Phasentransformationen, erreicht.

Die globale U(1)-Symmetrie der Feldgleichungen für $\psi(x)$ führt zur Erhaltung der elektrischen Ladung, der Quellen des Eichfeldes, auch bei Wechselwirkung mit dem elektromagnetischen Feld. Die Eichfeldgleichungen mit der zugehörigen Eichinvarianz enthalten automatisch Ladungserhaltung.

Die Wechselwirkung (Kopplungsterme zwischen Materiefeld $\psi(x)$ und Eichwechselwirkungsfeld $A_\mu(x)$) ist (eindeutig) festgelegt durch die Forderung der lokalen Phaseninvarianz, das lokale Eichprinzip, d.h. durch die kovariante Ableitung

$$D_\mu \psi(x) = \partial_\mu \psi(x) + iqA_\mu(x)\psi(x)$$

(minimale eichinvariante Kopplung).

Die Ersetzung

$$i\partial_\mu \longrightarrow iD_\mu = i\partial_\mu - qA_\mu$$

entspricht ($p_\mu \longrightarrow i\partial_\mu$) der Ersetzung

$$P_\mu \longrightarrow P_\mu - qA_\mu$$

für den kanonischen Impuls bei Einführung der Wechselwirkung mit dem elektromagnetischen Feld in der klassischen Mechanik.

Beispiel 1:

Elektromagnetische Wechselwirkung zwischen Fermionen (Elektronen) und dem Photonfeld (QED):

Die Lagrangedichte für das freie Dirac-Feld

$$\mathcal{L}_{\text{frei}} = \overline{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi$$

wird ersetzt durch die lokal eichinvariante Form mit minimaler Kopplung

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \overline{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi \\
&= \overline{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - qA_\mu \overline{\psi}\gamma^\mu\psi \\
&= \mathcal{L}_{\text{frei}} - j^\mu A_\mu
\end{aligned}$$

mit dem (erhaltenen) elektromagnetischen Strom $j^\mu = q\overline{\psi}\gamma^\mu\psi$.

Zusammen mit der Lagrangedichte für das freie elektromagnetische Feld ist die Lagrangedichte der Quantenelektrodynamik:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{QED} &= \mathcal{L}^{\text{Photon}}_{\text{frei}} + \mathcal{L}^{\text{Fermion}}_{\text{frei}} + \mathcal{L}_{\text{WW}} \\
&= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \overline{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - j^\mu A_\mu \\
&= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \overline{\psi}i\gamma^\mu \partial_\mu\psi - m\overline{\psi}\psi - j^\mu A_\mu \\
&= \mathcal{L}^{\text{Photon}}_{\text{kin}} + \mathcal{L}^{\text{Fermion}}_{\text{kin}} + \mathcal{L}^{\text{Fermion}}_{\text{Masse}} + \mathcal{L}_{\text{WW}} = T - V.
\end{aligned}$$

Die Beiträge zur gesamten Lagrangedichte sind additiv und erfüllen die U(1)-Eichinvarinz.

Beispiel 2:

Elektromagnetische Wechselwirkung zwischen geladenen Spin-0-Bosonen und dem Photonfeld:

Die Lagrangedichte für das freie Klein-Gordon-Feld

$$\mathcal{L}_{\text{frei}} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$$

wird ersetzt durch die lokal eichinvariante Form mit minimaler Kopplung

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (D_\mu \phi)^* D^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi \\
&= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi \\
&\quad -iq[\phi^* \partial^\mu \phi - (\partial^\mu \phi^*)\phi] A_\mu + q^2 A_\mu A^\mu \phi^* \phi \\
&= \mathcal{L}_{\text{frei}} - j^\mu A_\mu + q^2 A_\mu A^\mu \phi^* \phi \\
&= \mathcal{L}_{\text{kin}}^{\text{Photon}} + \mathcal{L}_{\text{kin}}^{\text{Boson}} + \mathcal{L}_{\text{Masse}}^{\text{Boson}} + \mathcal{L}_{\text{WW}}.
\end{aligned}$$

Dabei ist $j^\mu = iq[\phi^* \partial^\mu \phi - (\partial^\mu \phi^*)\phi]$ der erhaltene elektromagnetische Strom für die freien Bosonen.

Nach dem Noether-Theorem hat der erhaltene Strom für die an das Photonfeld koppelnden Bosonen eine andere Form. Der Wechselwirkungsterm erhält einen zusätzlichen Beitrag in der Form einer Kontaktwechselwirkung zwischen Photonen und Materie-Bosonen (eich- und lorentzinvariant).

1.4.3 Nicht-Abelsche Eichsymmetrien

Erweiterung der Isospinsymmetrie $SU(2)$ zu einer lokalen Eichsymmetrie
(Yang, Mills 1954):

Freie Lagrangefunktion für Nukleonen (Proton, Neutron):

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi} I (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi.$$

Proton und Neutron bilden dabei ein Isotopenspindublett (2-dimensionale Darstellung der Isospingruppe).

$$\psi = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}.$$

Beide Fermionfelder $p(x)$ und $n(x)$ sind jeweils 4-Spinoren.

Die freie Lagrangefunktion ohne Wechselwirkung ist diagonal im 2-dimensionalen Isospinraum (2-dim. Einheitsmatrix I) und invariant unter globalen Isospinrotationen

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = e^{i\vec{\alpha}\cdot\vec{I}}\psi(x) = e^{i\vec{\alpha}\cdot\vec{\tau}/2}\psi(x),$$

wobei $\vec{\tau}$ der 3-Isovektor der Pauli'schen 2×2 Spinmatrizen ist (die drei Generatoren der Isospingruppe $SU(2)$, $\vec{I} = \vec{\tau}/2$, in der fundamentalen 2-dimensionalen Darstellung; Bezeichnung $\vec{\tau}$ statt $\vec{\sigma}$ für den Isospin).

Wie bei der $U(1)$-Symmetrie der elektromagnetischen Wechselwirkung:

Übergang zu einer lokalen $SU(2)$-Eichsymmetrie, d.h. Forderung nach Invarianz der Lagrangefunktion und Feldgleichungen unter lokalen Eichtransformationen

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = e^{i\vec{\alpha}(x)\cdot\vec{\tau}/2}\psi(x) \equiv G(x)\psi(x).$$

Damit transformiert der 4-Gradient des Feldes wie

$$\partial_\mu\psi(x) \longrightarrow G(x)(\partial_\mu\psi(x)) + (\partial_\mu G(x))\psi(x).$$

$\Longrightarrow$ Einführen einer kovarianten Ableitung (kovariant unter den lokalen Eichtransformationen $G(x)$):

$$D_\mu(x) = I\partial_\mu + igB_\mu(x)$$

mit der 2×2-Einheitsmatrix I auf dem Isospinraum und einer Kopplungskonstanten g, die die Stärke der Eichwechselwirkung angibt.

Das Eichvektorfeld $B_\mu(x)$ ist eine 2×2-Matrix auf dem Isospinraum, definiert durch ($a = 1, 2, 3$):

$$\begin{aligned} B^\mu(x) &= \frac{1}{2}\vec{\tau} \cdot \vec{b}^\mu(x) = \frac{1}{2}\tau_a b_a^\mu(x) \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} b_3^\mu(x) & b_1^\mu(x) - ib_2^\mu(x) \\ b_1^\mu(x) + ib_2^\mu(x) & -b_3^\mu(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit dem Isovektor $\vec{b}_\mu = (b_1^\mu, b_2^\mu, b_3^\mu)$ der drei Eichvektorfelder $b_i(x)$, die den drei Generatoren (Ladungsoperatoren) der $SU(2)$-Eichsymmetrie $\vec{I} = \vec{\tau}/2$ entsprechen.

Um die lokale nicht-Abelsche $SU(2)$-Eichsymmetrie zu erhalten, müssen also 3 neue Eichvektorpotentiale eingeführt werden, die 3 Eichbosonfeldern entsprechen, die die Eichwechselwirkungen vermitteln.

(Dies erinnert an die 3 Austauschteilchen $W^\pm$ und Z^0 der schwachen Wechselwirkung, die ebenfalls globale $SU(2)$-Symmetrie besitzt, aber an Quark- und Leptonfelder koppelt.)

Die kovariante Ableitung soll unter lokalen Eichtransformationen ebenso transformieren wie die Felder, um die lokale Eichinvarianz der Lagrangefunktion zu gewährleisten, d.h.

$$D_\mu\psi \longrightarrow D'_\mu\psi' = G(x)(D_\mu\psi).$$

Diese Forderung definiert das Transformationsverhalten der Eichvektorfelder:

$$\begin{aligned} D'_\mu \psi' &= (\partial_\mu + igB'_\mu)\psi' \\ &= G(\partial_\mu \psi) + (\partial_\mu G)\psi + igB'_\mu (G\psi) \\ &\equiv G(\partial_\mu + igB_\mu)\psi \\ &= G(\partial_\mu \psi) + igG(B_\mu \psi) \end{aligned}$$

und damit

$$igB'_\mu (G\psi) = igG(B_\mu \psi) - (\partial_\mu G)\psi$$

für beliebige Werte des Nukleonfelds ψ, d.h. nach Multiplizieren mit G^{-1}:

$$\begin{aligned} B'_\mu &= GB_\mu G^{-1} + \frac{i}{g}(\partial_\mu G)G^{-1} \\ &= G\left[B_\mu + \frac{i}{g}G^{-1}(\partial_\mu G)\right]G^{-1}. \end{aligned}$$

Dies ist die nicht-Abelsche Verallgemeinerung der $U(1)$-Eichtransformation des elektromagnetischen Potentials (Isoskalar), die analog lautet:

$$\begin{aligned} A'_\mu &= G_{EM} A_\mu G_{EM}^{-1} + \frac{i}{q}(\partial_\mu G_{EM})G_{EM}^{-1} \\ &\equiv A_\mu - \partial_\mu \alpha(x) \end{aligned}$$

mit der lokalen $U(1)$-Eichtransformation

$$G_{EM}(x) = e^{iq\alpha(x)}.$$