1.5 Das Standardmodell der Teilchenphysik:

Die fundamentalen Wechselwirkungen und ihre Vereinheitlichung

Lokale Eichfeldtheorien (Yang-Mills-Theorien; Yang und Mills 1954) erlauben eine einheitliche Beschreibung aller bekannten Wechselwirkungen der fundamentalen Materiebausteine (Leptonen und Quarks) basierend auf einem Symmetrieprinzip.

Die Eichsymmetriegruppen legen die Eigenschaften der Wechselwirkungen vollständig fest. Die elementaren Fermionen (Spin $\frac{1}{2}$) besetzen die Multipletts der fundamentalen Darstellungen der Eichsymmetrien.

Die Generatoren der Eichsymmetriegruppen (Lie-Gruppen) sind die verallgemeinerten Ladungsoperatoren der Wechselwirkungen (hermitesch). Die Wechselwirkung wird vermittelt durch den Austausch von Vektorbosonen (Spin 1), den Eichfeldquanten.

Die elektromagnetische, die schwache und die starke Wechselwirkung lassen sich durch die einfachsten speziellen unitären Symmetriegruppen beschreiben:

Wechselwirkung	El. magn.	Schwach	Stark
Eichsymmetrie	$U(1)$	$SU(2)$	$SU(3)$
Theorie	QED	GSW	QCD
Ladungen	elektrische Ladung	3 schwache Ladungen	8 Farbladungen
Eichbosonen	Photon	$W^{\pm}$, Z^0	8 Gluonen

Die Zahl der unabhängigen Parameter und damit der Generatoren (verallgemeinerte Ladungen) der Gruppe $SU(N)$ ist $N^2 - 1$ (Ordnung der Gruppe).

Die Dimension der fundamentalen Darstellung ist N = Zahl der inneren Freiheitsgrade der Teilchenzustände.

Die Eichsymmetriegruppe des Standardmodells ist das Produkt der Lie-Gruppen

$$U(1) \otimes SU(2) \otimes SU(3)$$

Die freien Fermionenzustände des Standardmodells sind daher ($f = e, \mu, \tau, \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau, u, d, s, c, b, t$):

$$
\begin{aligned}
& . \quad \text{Teilchen :} \\
\psi_f^+(x; E > 0) &= u(p) e^{-ip_\mu x^\mu} \times e^{iQ_f \alpha} \times \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L \times \begin{pmatrix} r \\ g \\ b \end{pmatrix}_q \\
& . \quad \text{Antiteilchen :} \\
\psi_f^-(x; E < 0) &= v(p) e^{ip_\mu \cdot x^\mu} \times e^{-iQ_f \alpha} \times \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_R \times \begin{pmatrix} \bar{r} \\ \bar{g} \\ \bar{b} \end{pmatrix}_{\bar{q}}
\end{aligned}
$$

Vorbild für die moderne Beschreibung der Teilchenphysik durch Eichtheorien ist die Quantenelektrodynamik.

1.5.1 Die Quantenelektrodynamik (QED)

Eichfeldtheorie mit der Symmetriegruppe U(1) (elektrische Ladung).

Eichfeld (Photonfeld): 4-Vektorpotential $A_\mu(x)$.

Eichboson (Photon): Spin 1, masselos aufgrund der Eichsymmetrie.

Lagrangedichte für Kopplung an elementare Fermionen ($f = e, \mu, \tau, u, d, s, c, b, t$):

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad &+ \quad \sum_f \overline{\psi}_f(i\gamma^\mu D_\mu - m_f)\psi_f \\
= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad &+ \quad \sum_f \overline{\psi}_f(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_f)\psi_f \\
&- \quad e\left(\sum_f Q_f \overline{\psi}_f \gamma^\mu \psi_f\right) A_\mu \\
= \mathcal{L}_{\text{frei}} \quad &+ \quad \mathcal{L}_{WW}
\end{aligned}
$$

mit der kovarianten Ableitung

$$D_\mu = \partial_\mu + ieQ_f A_\mu(x)$$

und dem Feldtensor

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\nu A_\mu(x) - \partial_\mu A_\nu(x).$$

Strom-Eichfeld-Kopplung:

$$\mathcal{L}_{WW} = -e j^{\mu}_{\mathrm{el.magn.}} A_{\mu}$$

mit dem elektromagnetischen Strom

$$j^{\mu}_{\mathrm{el.magn.}} = \sum_{f} Q_f \overline{\psi}_f \gamma^{\mu} \psi_f .$$

Die Kopplungstärke ist gegeben durch die Elementarladung e.

Q_f ist Eigenwert des Ladungsoperators (Generator der $U(1)$-Eichsymmetriegruppe).

Lokale U(1)-Eichtransformationen:

$$\begin{array}{rcl}
\psi_f(x) & \longrightarrow & e^{ieQ_f\alpha(x)}\psi_f(x) \\
\overline{\psi}_f(x) & \longrightarrow & e^{-ieQ_f\alpha(x)}\overline{\psi}_f(x) \\
A_{\mu}(x) & \longrightarrow & A_{\mu}(x) - \partial_{\mu}\alpha(x) \\
D_{\mu}\psi_f(x) & \longrightarrow & e^{ieQ_f\alpha(x)}D_{\mu}\psi_f(x).
\end{array}$$

d.h. $\overline{\psi}_f\gamma_{\mu}\psi_f$ und $\overline{\psi}_f D_{\mu}\psi_f$ sind invariant.

Globale U(1)-Eichsymmetrie $\Longrightarrow$ Erhaltung der elektrischen Ladung (Noether-Theorem):

Kontinuitätsgleichung:

$$\partial_\mu j^\mu_{el.magn.} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0.$$

$$\Longrightarrow \frac{dQ}{dt} = \int d^3x \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\int d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\oint d\vec{\sigma} \cdot \vec{j} = 0.$$

Die Eichinvarianz verlangt $m_\gamma = 0.$

Experimentell: $m_\gamma < 2 \cdot 10^{-16}$ eV aus der Vermessung des Magnetfelds des Jupiter durch die Pioneer 10-Sonde.

Weitere Symmetrien der QED:

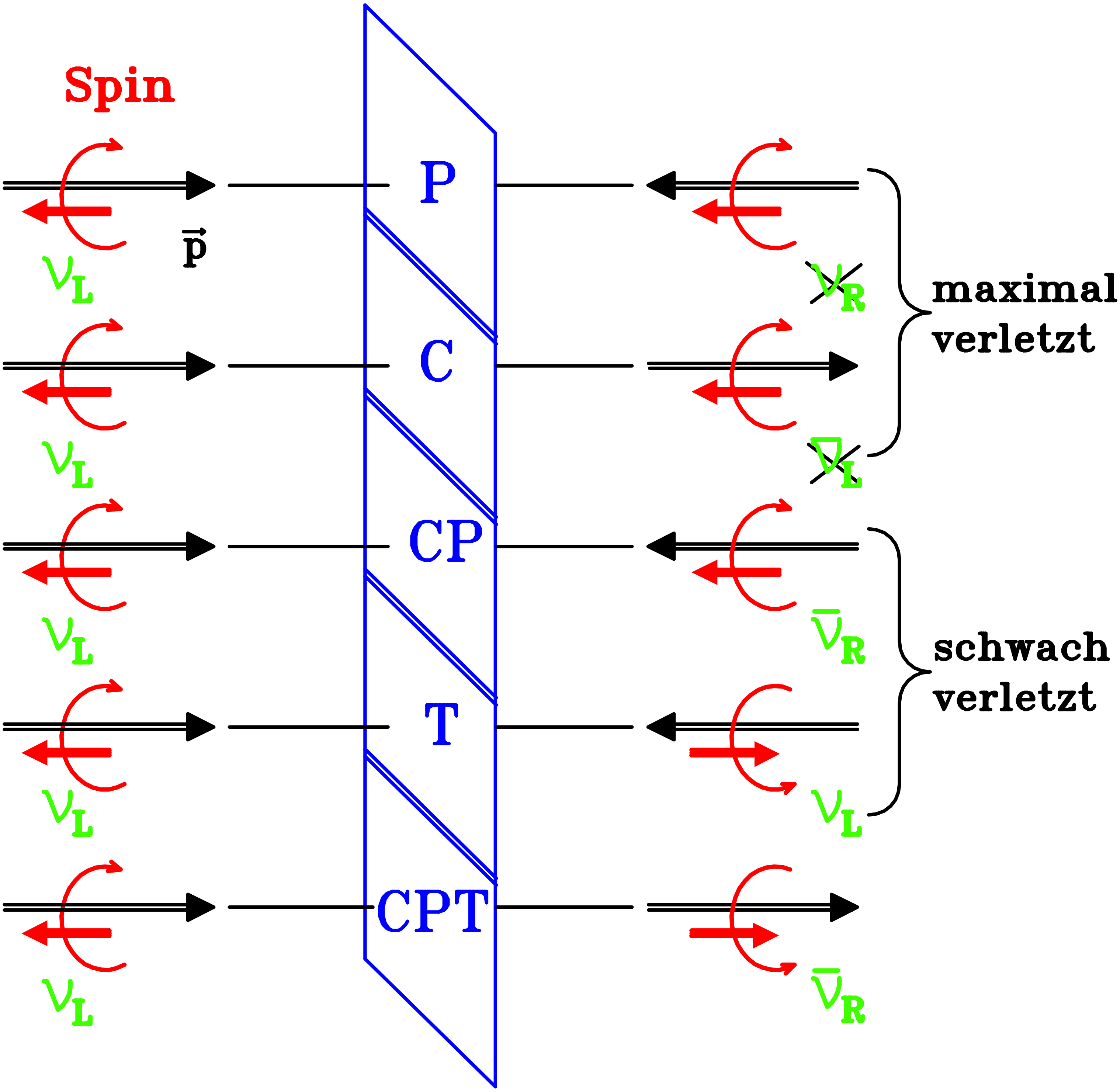
- Lorentzinvarianz + Invarianz unter Raum-Zeit-Translationen (Homogenität und Isotropie der Raum-Zeit)

  $\Longrightarrow$ Energie-Impuls- und Drehimpulserhaltung (Noether-Theorem).

- Diskrete Symmetrien:

  1. Lepton- und Quarkflavour-Erhaltung.

  2. Parität P (Raumspiegelung): $\vec{x} \longrightarrow -\vec{x}$, $\vec{p} \longrightarrow -\vec{p}$.
  3. Zeitinversion T: $t \longrightarrow -t$.
  4. Ladungskonjugation C: $Q_f \longrightarrow -Q_f$.



Spin
$\vec{p}$
P
C
CP
T
CPT
ν_L
ν_L
ν_L
ν_L
ν_L
ν_R
$\bar{\nu}_L$
$\bar{\nu}_R$
ν_L
$\bar{\nu}_R$
maximal verletzt
schwach verletzt

1.5.2 Die Schwache Wechselwirkung

Beschreibung in Analogie zur QED mit Kopplung schwacher Ströme an massive, elektrisch geladene Feldquanten $W^{\pm}$:

$$j^{\mu -} W_{\mu}^{+} + j^{\mu +} W_{\mu}^{-}$$

Kurzreichweitige Wechselwirkung mit Änderung der Lepton- und Quark-Flavour.

Nuklearer β-Zerfall: $n \longrightarrow p e^{-} \overline{\nu}_e$

Myonzerfall: $\mu^{+} \longrightarrow e^{+} \nu_e \overline{\nu}_{\mu}$

Schwache Übergänge legen Paarung der elementaren Fermionen in Dubletts nahe, der fundamentalen Darstellung der SU(2)-Gruppe (in Analogie zu Spin und Isospin).

Linkshändige Zustände in SU(2)-Dubletts:

$$
\begin{array}{lccccccc}
 & & & & Q_f & Y_f & I_f^0 \\
L_\ell : & \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L & \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}_L & \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix}_L & \begin{array}{r} 0 \\ -1 \end{array} & \begin{array}{r} -1 \\ -1 \end{array} & \begin{array}{r} +\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{array} \\
 & & & & & & \\
L_q : & \begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}_L & \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix}_L & \begin{pmatrix} t \\ b' \end{pmatrix}_L & \begin{array}{r} +\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{array} & \begin{array}{r} +\frac{1}{3} \\ +\frac{1}{3} \end{array} & \begin{array}{r} +\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{array}
\end{array}
$$

$$\mathrm{Rechtshändige\ Zustände\ in\ SU(2)-Singuletts:}$$

$$
\begin{array}{lllrrr}
\nu_{eR} & \nu_{\mu R} & \nu_{\tau R} & 0 & 0 & 0 \\
e_R^- & \mu_R^- & \tau_R^- & -1 & -2 & 0 \\
u_R & c_R & t_R & +\frac{2}{3} & +\frac{4}{3} & 0 \\
d_R & s_R & b_R & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0
\end{array}
$$

$$Q = I^0 + Y/2$$

Die schwache Wechselwirkung bewirkt flavour-ändernde Übergänge innnerhalb der Fermion-Dubletts L_ℓ (Leptonen) und L_q (Quarks).

Nur linkshändige Fermionen ψ_L bzw. rechtshändige Anti-Fermionen $\overline{\psi}_R$ nehmen an der schwachen WW teil.

$\Longleftrightarrow$ beobachtete maximale Paritätsverletzung durch die schwache WW ($V - A$-Form der schwachen Ströme).

Paritätsverletzung in der schwachen Wechselwirkung:

- $K^+ \to \pi^+\pi^0$ und $K^+ \to \pi^+\pi^-\pi^+$ (Lee, Yang 1956).
- Elektronpolarisation im Kern-β-Zerfall (Wu 1957).

Projektion der Chiralitätszustände:

$$
\begin{aligned}
\psi_L &= P_L\psi = \left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\psi \\
\psi_R &= P_R\psi = \left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\psi \\
\overline{\psi}_L &= (P_L\psi)^\dagger\gamma^0 = \overline{\psi}P_R \\
\overline{\psi}_R &= (P_R\psi)^\dagger\gamma^0 = \overline{\psi}P_L
\end{aligned}
$$

mit $P_L + P_L = 1$, $P_L^2 = P_L$, $P_R^2 = P_R$, $\gamma^\mu P_L = P_R\gamma^\mu$.

Chiralität $\gamma_5 = \gamma_5^\dagger$:

$$\begin{aligned} \gamma_5 \psi_L &= -\psi_L \\ \gamma_5 \psi_R &= \psi_R \end{aligned}$$

für masselose Teilchen.

Die Helizität $h = \frac{\vec{s}\cdot\vec{p}}{|\vec{s}\cdot\vec{p}|}$ ist abhängig vom Bezugssystem (Impulsrichtung), außer für masselose Teilchen. Für masselose Teilchen haben Helizität und Chiralität den gleichen Wert.

Schwache Fermion-Ströme:

$$\begin{aligned} j^\mu_{\mathrm{schwach}} &= \underline{\overline{\psi}_L \gamma^\mu \psi_L} \\ &= (P_L\psi)^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu P_L \psi = \psi^\dagger P_L \gamma^0 \gamma^\mu P_L \psi \\ &= \overline{\psi} \gamma^\mu P_L \psi = \underline{\frac{1}{2} \overline{\psi} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi} \end{aligned}$$

d.h. Vektor (γ^μ)–Axialvektor ($\gamma^\mu\gamma_5$)-, $V - A$-Strom.

Lokale schwache Isospin-Eichsymmetrie $SU(2)_L$:

SU(2)-Dubletts (L): $L_f \longrightarrow e^{i\vec{I}\cdot\vec{\beta}(x)} L_f$.

SU(2)-Singuletts (R): $\psi_R \longrightarrow \psi_R$.

3 Parameter (z.B. Euler-Winkel), 3 Generatoren (Ladungen):

- Isospinvektor $\vec{I} = \begin{pmatrix} I_x \\ I_y \\ I_z \end{pmatrix}$
- Lie-Algebra: $[I_i, I_j] = i\varepsilon_{ijk} I_k$
  mit Strukturkonstanten ε_{ijk}.
- Auf- und Absteigeoperatoren: $I^{\pm} = \frac{1}{2}(I_x \pm iI_y)$; $I^0 = I_z$.

Fundamentale SU(2)-Darstellung (2-dimensional):

- Fermion-Dubletts mit $|\vec{I}| = \frac{1}{2}$, $I_z = \pm\frac{1}{2}$.
- $\vec{I} = \frac{\vec{\tau}}{2}$ mit Pauli'schen Spin-Matrizen τ_i $(i = 1, 2, 3)$.

  $[\tau_i, \tau_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\tau_k, \qquad \tau^{\pm} = \frac{1}{2}(\tau_1 \pm i\tau_2).$

$$\tau^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \tau^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.5.2.1 Die Elektroschwache Wechselwirkung (Glashow-Salam-Weinberg-Theorie)

Gemeinsamer Ansatz mit lokaler $SU(2)_L$- und $U(1)_Y$-Eichsymmetrie
(Glashow 1961, Salam 1968, Weinberg 1967).

Die elektromagnetische Wechselwirkung muß wegen der elektrisch geladenen schwachen Eichbosonen $W^\pm$ miteingeschlossen werden.

Y ist die schwache Hyperladung mit $[I_z, Y] = 0$ (direktes Produkt der Symmetriegruppen).

Deshalb is Y_f gleich für die beiden Mitglieder eines $SU(2)_L$-Dubletts und $Q \neq Y$.

Die elektromagnetischen Ladungen in den Multipletts ergeben sich konsistent aus der Beziehung $Q = I_3 + Y/2$.

Damit entsteht eine vereinheitlichte Eichtheorie der schwachen und der elektromagnetischen Wechselwirkung, die aber noch zwei verschiedene Kopplungskonstanten g (schwacher Isospin) und g' (schwache Hyperladung) enthält:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{SU(2)\times U(1)} = -\frac{1}{4} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} \quad &- \quad \frac{1}{4} F^i_{\mu\nu} F^{i\mu\nu} \\ + \sum_f \overline{\psi}_{fR}(i\gamma^\mu D_{\mu R})\psi_{fR} \quad &+ \quad \sum_L \overline{L}_f (i\gamma^\mu D_{\mu L}) L_f\end{aligned}$$

mit den linkshändigen $SU(2)$-Dubletts L_f, den $SU(2)$-Singuletts ψ_f und den kovarianten Ableitungen:

$$\begin{aligned}
D_{\mu L} &= \partial_\mu \cdot 1 + ig'\frac{Y_{fL}}{2}B_\mu(x)\cdot 1 + ig\vec{I}\cdot\vec{W}_\mu(x) \\
&= \partial_\mu \cdot 1 + i\frac{g'}{2}Y_{fL}B_\mu(x)\cdot 1 + i\frac{g}{2}\vec{\tau}\cdot\vec{W}_\mu(x) \\
D_{\mu R} &= \partial_\mu + ig'\frac{Y_{fR}}{2}B_\mu(x),
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ minimale eichinvariante Kopplung an 4 masselose Eichfelder für $U(1)_Y$ und $SU(2)_L$:

$$B_\mu(x) \;\text{ und }\; \vec{W}_\mu(x) = \begin{pmatrix} W_\mu^x(x) \\ W_\mu^y(x) \\ W_\mu^z(x) \end{pmatrix}$$

mit den Definitionen der Feldtensoren

$$\begin{aligned}
f_{\mu\nu} &= \partial_\nu B_\mu(x) - \partial_\mu B_\nu(x) \\
F^i_{\mu\nu} &= \partial_\nu W^i_\mu(x) - \partial_\mu W^i_\nu(x) + g\varepsilon^{ijk}W^j_\mu(x)W^k_\nu(x).
\end{aligned}$$

so daß die Form der Lagrangedichte für die freien Eichfelder wie für die QED ist (s.o.).

Alle Fermion-Massen $= 0$ wegen globaler $SU(2)_L$-Invarianz:

Unterschiedliche Massen in den Fermion-Dubletts verletzen die SU(2)-Symmetrie. Ein Dirac-Massenterm $m\overline{\psi}\psi = m(\overline{\psi}_L\psi_R + \overline{\psi}_R\psi_L)$ ist nicht invariant.

$\Longrightarrow$ Massen der elektroschwachen Eichbosonen (außer γ) und der Fermionen durch spontane Brechung der lokalen $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$-Eichsymmetrie (Higgs-Mechanismus, s.u.).

Lokale SU(2)-Eichtransformationen U(x):

$$L \longrightarrow L' = U(x) \cdot L = e^{ig\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\beta}(x)} L$$

Damit die Lagrange-Dichte invariant bleibt, ist die die Transformation der kovarianten Ableitung nach Definition:

$$D'_\mu L' = (\partial_\mu + ig\frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{W}'_\mu) L' \equiv U(D_\mu L)$$

(d.h. $D'_\mu = U D_\mu U^{-1}$).

$$\begin{aligned} \Longrightarrow U(\partial_\mu L) \quad &+ \quad \left(\partial_\mu U\right) L + ig\frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{W}'_\mu (U \cdot L) \\ &\equiv \quad U(\partial_\mu L) + igU\left(\frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{W}_\mu\right) L \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{W}'_\mu (U \cdot L) = U\left(\frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{W}_\mu\right) L - \frac{1}{ig}(\partial_\mu U) L.$$

Damit ist die Eichtransformation der nicht-Abelschen Eichfelder definiert durch:

$$\vec{\tau} \cdot \vec{W}_\mu \longrightarrow \vec{\tau} \cdot \vec{W}'_\mu = U(\vec{\tau} \cdot \vec{W}_\mu) U^{-1} + \frac{i}{g}(\partial_\mu U) U^{-1}$$

Für infinitesimale Eichtransformationen,

$$U(x) = 1 + ig\frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{\beta}(x),$$

gilt:

$$W_\mu^i(x) \longrightarrow W_\mu^{i\prime}(x) = W_\mu^i(x) - \frac{1}{g}\partial_\mu \beta^i(x) - \varepsilon^{ijk}\beta^j(x) W_\mu^k(x)$$

Für Abelsche $U(1)_Y$-Eichtransformationen,

$$U_Y(x) = e^{i\frac{Y}{2}\alpha(x)},$$

gilt allgemein:

$$\begin{aligned} B_\mu(x) \longrightarrow B'_\mu(x) &= U_Y B_\mu U_Y^{-1} + \frac{2i}{Y}(\partial_\mu U_Y) U_Y^{-1} \\ &\equiv B_\mu(x) - \partial_\mu \alpha(x) \end{aligned}$$

Umformung der Lagrange-Funktion:

unter Benutzung von

$$\begin{aligned}
\underline{\overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi} &= \overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu(P_L^2+P_R^2)\psi \\
&= \overline{\psi}P_R\gamma^\mu\partial_\mu P_L\psi + \overline{\psi}P_L\gamma^\mu\partial_\mu P_R\psi \\
&= \underline{\overline{\psi}_L\gamma^\mu\partial_\mu\psi_L + \overline{\psi}_R\gamma^\mu\partial_\mu\psi_R}
\end{aligned}$$

mit $\gamma^\mu P_{L,R} = P_{R,L}\gamma^\mu$, $\overline{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$
und $\overline{\psi}_L = (P_L\psi)^\dagger\gamma^0 = \psi^\dagger P_L\gamma^0 = \overline{\psi}P_R$.

$$\begin{aligned}
\cdot\quad & \mathcal{L}_{SU(2)\times U(1)} = \\
- \quad & \frac{1}{4}f_{\mu\nu}f^{\mu\nu} - \frac{1}{4}F^i_{\mu\nu}F^{i\mu\nu} + \sum_f \overline{\psi}_f(i\gamma^\mu\partial_\mu)\psi_f \\
- \quad & g'\sum_f\left(\overline{\psi}_f\gamma^\mu\frac{Y_f}{2}\psi_f\right)B_\mu - g\sum_L\left(\overline{L}_f\gamma^\mu\frac{\vec{\tau}}{2}\cdot L_f\right)\vec{W}_\mu \\
= \quad & \mathcal{L}_{\text{frei}} + \mathcal{L}_{\text{WW}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{WW} &= -g' j_Y^\mu B_\mu - g\vec{j}_I^\mu\cdot\vec{W}_\mu \\
&= -g' j_Y^\mu B_\mu - g j_I^{\mu 0}W_\mu^0 - \frac{g}{\sqrt{2}}(j_I^{\mu-}W_\mu^+ + j_I^{\mu+}W_\mu^-) \\
&= \mathcal{L}_{NC} + \mathcal{L}_{CC}
\end{aligned}$$

mit dem flavour-ändernden geladenen schwachen Strom (CC):

$$j_I^{\mu\pm} = \sum_L \overline{L}_f \gamma^\mu \tau^\pm L_f = j_I^{\mu 1} \pm i j_i^{\mu 2}$$

und den geladenen schwachen Eichbosonen (siehe β-Zerfälle):

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 \pm i W_\mu^2)$$

Denn es gilt:

$$\begin{aligned}
. \quad & (j_I^{\mu -} W_\mu^+ + j_I^{\mu +} W_\mu^-) = \\
= \quad & (j_I^1 - i j_I^2)\frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 + i W_\mu^2) + (j_I^{\mu 1} + i j_I^{\mu 2})\frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 - i W_\mu^2) \\
= \quad & \sqrt{2}(j_I^{\mu 1} W_\mu^1 + j_I^{\mu 2} W_\mu^2).
\end{aligned}$$

Die flavour-erhaltenden neutralen elektroschwachen Ströme j_Y^μ und $j_I^{\mu 0}$ koppeln an die neutralen Eichbosonfelder $B_\mu(x)$ und W_μ^0.

Fragen:

Wie läßt sich der elektromagnetische Strom der QED identifizieren?

Gibt es einen neutralen schwachen Strom?

Die erhaltenen Ladungen aufgrund der globalen SU(2)-Eichsymmetrie sind:

$$I^i = \int d^3x \overline{L} \gamma^0 \frac{\tau^i}{2} L; \frac{dI^i}{dt} = 0$$

mit $[I^i, I^j] = i\varepsilon^{ijk} I^k$.

Beispiel:

Die erste Lepton-Familie $L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L$:

$$
\begin{aligned}
. \quad & \mathcal{L}_{WW}(SU(2)) = -g\overline{L}\left(\gamma^\mu \frac{\tau^i}{2} W_\mu^i\right) L \\
= \quad & -\frac{g}{2}(\overline{\nu}_{eL}, \overline{e}_L)\gamma^\mu \begin{pmatrix} W_\mu^3 & W_\mu^1 - iW_\mu^2 \\ W_\mu^1 + iW_\mu^2 & -W_\mu^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix} \\
= \quad & -\frac{g}{2}(\overline{\nu}_{eL}, \overline{e}_L)\gamma^\mu \begin{pmatrix} W_\mu^0 & \sqrt{2}W_\mu^- \\ \sqrt{2}W_\mu^+ & -W_\mu^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix} \\
= \quad & -\frac{g}{2}[\overline{\nu}_e \gamma^\mu (1-\gamma_5)\nu_e W_\mu^0 - \overline{e}\gamma^\mu(1-\gamma_5)eW_\mu^0] \\
. \quad & -\frac{g}{\sqrt{2}}[\overline{\nu}_e \gamma^\mu (1-\gamma_5) e W_\mu^- + \overline{e}\gamma^\mu (1-\gamma_5)\nu_e W_\mu^+].
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{WW}(U(1)) \quad = \quad & -g' \sum_f \overline{\psi}_f \left(\gamma^\mu \frac{Y_f}{2} \psi_f\right) B_\mu \\
= \quad & -\frac{g'}{2} Y_L [\overline{\nu}_{eL}\gamma^\mu \nu_{eL} + \overline{e}_L \gamma^\mu e_L] B_\mu \\
. \quad & -\frac{g'}{2}[Y_{\nu R}\overline{\nu}_{eR}\gamma^\mu \nu_{eR} + Y_{eR}\overline{e}_R \gamma^\mu e_R] B_\mu.
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow$ Neutrale Ströme:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{NC} = & - & \frac{1}{2}(gW^0_\mu + g'Y_L B_\mu)\overline{\nu}_{eL}\gamma^\mu\nu_{eL} - \frac{g'}{2}Y_{\nu R}B_\mu\overline{\nu}_{eR}\gamma^\mu\nu_{eR} \\ & + & \frac{1}{2}(gW^0_\mu - g'Y_L B_\mu)\overline{e}_L\gamma^\mu e_L - \frac{g'}{2}Y_{eR}B_\mu\overline{e}_R\gamma^\mu e_R.\end{aligned}$$

Neutrale Ströme der ungeladenen Neutrinos können nur durch die schwache Wechselwirkung vermittelt werden.

Sie wurden 1973 am CERN entdeckt in der Reaktion: $\nu_\mu p \to \nu_\mu p$ (kein Myon im Endzustand).

Nach orthonormaler Transformation (Rotation) der neutralen Eichbosonfelder

$$\begin{pmatrix} B_\mu \\ W^0_\mu \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} A_\mu \\ Z^0_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_W & \sin\theta_W \\ -\sin\theta_W & \cos\theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_\mu \\ W^0_\mu \end{pmatrix}$$

mit dem sog. Weinberg-Winkel θ_W und

$$\cos\theta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2 Y_L^2}}; \qquad \sin\theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2 Y_L^2}}$$

erhält man das Photonfeld

$$A_\mu = \frac{gB_\mu - g'Y_L W_\mu^0}{\sqrt{g^2 + g'^2 Y_L^2}}$$

und ein neues neutrales schwaches Eichbosonfeld (orthogonal zum el.magn. Feld):

$$Z_\mu^0 = \frac{gW_\mu^0 + g'Y_L B_\mu}{\sqrt{g^2 + g'^2 Y_L^2}}.$$

Sowohl das Z^0-Boson als auch die $W^\pm$-Bosonen wurden 1983 am CERN in $p\bar{p}$-Reaktionen direkt erzeugt und nachgewiesen (s.u.).

Die neutrale schwache Wechselwirkung, Kopplung neutraler schwacher Fermionströme an das Z^0-Eichboson, wird durch die GSW-Theorie vorhergesagt (schon früher vermutet) und wurde 1973 in Neutrinostreuung an Protonen in einem Blasenkammerexperimnent am CERN nachgewiesen (s.u.).

Durch Invertieren der Transformation,

$$
\begin{aligned}
B_\mu &= \frac{gA_\mu + g'Y_L Z^0_\mu}{\sqrt{g^2 + g'^2 Y_L^2}}, \\
W^0_\mu &= \frac{gZ^0_\mu - g'Y_L A_\mu}{\sqrt{g^2 + g'^2 Y_L^2}},
\end{aligned}
$$

und Einsetzen in $\mathcal{L}_{NC}$ ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
. \quad & \mathcal{L}_{NC} = \\
- \quad & \frac{\sqrt{g^2 + g'^2 Y_L^2}}{2} Z^0_\mu (\overline{\nu}_{eL} \gamma^\mu \nu_{eL}) \\
- \quad & \frac{gg'Y_L}{\sqrt{g^2 + g'^2 Y_L^2}} A_\mu (\overline{e}_L \gamma^\mu e_L) - \frac{gg'Y_R}{2\sqrt{g^2 + g'^2 Y_L^2}} A_\mu (\overline{e}_R \gamma^\mu e_R) \\
- \quad & \frac{g'^2 Y_L^2 - g^2}{2\sqrt{g^2 + g'^2 Y_L^2}} Z_\mu (\overline{e}_L \gamma^\mu e_L) - \frac{g'^2 Y_L Y_R}{2\sqrt{g^2 + g'^2 Y_L^2}} Z_\mu (\overline{e}_R \gamma^\mu e_R)
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow$ Neutrinos koppeln nicht an das elektromagnetische Feld A_μ.

Nur die linkshändigen Neutrinos wechselwirken durch die neutrale schwache Kraft über Z^0_μ.

Rechtshändige Neutrinos haben keine Wechselwirkung, da auch ihre schwache Ladung $Y(\nu_R) = 0$.

Die elektromagnetische WW wird identifizert durch die Festlegung:

$$Y_L = -e\frac{\sqrt{g^2 + g'^2 Y_L^2}}{gg'} = -1 \quad \text{und} \quad Y_R = 2Y_L.$$

Damit ist

$$\sqrt{g^2 + g'^2} = \frac{e}{\cos\theta_W \sin\theta_W}$$

$$e = \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} = g' \cos\theta_W = g \sin\theta_W$$

$$\frac{g'^2 - g^2}{2\sqrt{g^2 + g'^2}} = \frac{e}{\cos\theta_W \sin\theta_W}\left(-\frac{1}{2} + \sin^2\theta_W\right)$$

$$-\frac{g'^2}{\sqrt{g^2 + g'^2}} = \frac{e}{\cos\theta_W \sin\theta_W}\left(-\sin^2\theta_W\right)$$

und die neutrale Stromwechselwirkung erhält die Form:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{NC} = \quad & - \quad \frac{g}{2\cos\theta_W}\overline{\nu}_{eL}\gamma^\mu\nu_{eL}Z^0_\mu \\
& - \quad \frac{e}{\cos\theta_W\sin\theta_W}\left[\left(-\frac{1}{2}+\sin^2\theta_W\right)\overline{e}_L\gamma^\mu e_L\right. \\
& + \quad \left.(-\sin^2\theta_W)\overline{e}_R\gamma^\mu e_R\right]Z^0_\mu \\
& - \quad e\sum_f(Q_f\overline{\psi}_f\gamma^\mu\psi_f)A_\mu
\end{aligned}
$$

Allgemein gilt:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{NC} = \quad & - \quad \frac{e}{\cos\theta_W\sin\theta_W}\cdot \\
& \cdot \quad \sum_{f_R,f_L}[(I^3_{fL,R}-Q_{fL,R}\sin^2\theta_W)\overline{\psi}_{fL,R}\gamma^\mu\psi_{fL,R}]Z^0_\mu \\
& - \quad e\sum_f(Q_f\overline{\psi}_f\gamma^\mu\psi_f)A_\mu.
\end{aligned}
$$

$$
\frac{e}{\cos\theta_W\sin\theta_W}(I^3_f-Q_f\sin^2\theta_W)
$$

ist die schwache neutrale Kopplung aller links- und rechtshändigen Fermionzustände an das Z^0-Boson.

1.5.3 Die Starke Wechselwirkung: Quantenchromodynamik (QCD)

SU(3)-Eichfeldtheorie der starken Wechselwirkung zwischen Quarks mit 8 Ladungen (Generatoren) λ^a ($a = 1, ..., 8$):

$$[\lambda^a, \lambda^b] = 2if^{abc}\lambda^c$$

mit den Strukturkonstanten f_{abc} der $SU(3)$-Lie-Algebra.

Lokale Eichtransformation:

$$\Psi_q(x) \longrightarrow \Psi_q'(x) = U(x)\Psi_q(x) = e^{ig_s\frac{\lambda^a}{2}\gamma^a(x)}\Psi_q(x).$$

Lagrange-Funktion:

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} + \sum_q \overline{\Psi}_q(i\gamma^\mu D_\mu - m_q)\Psi_q$$

mit der kovarianten Ableitung (mit $D'_\mu\Psi' = U(D_\mu\Psi)$):

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_s\frac{\lambda^a}{2}G^a_\mu,$$

den 8 masselosen Eichbosonfeldern $G^a_\mu(x)$ $(a = 1, ..., 8)$

und den Feldtensoren (mit $\lambda^a F^{a\prime}_{\mu\nu} = U\lambda^a F^a_{\mu\nu} U^\dagger$):

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\nu G^a_\mu - \partial_\mu G^a_\nu + g_s f^{abc} G^b_\mu G^c_\nu.$$

In der fundamentalen SU(3)-Darstellung bilden die Quarkfelder Tripletts mit einer neuen inneren Quantenzahl "Farbe" oder Colour (r̲ot, g̲rün, b̲lau): $\Psi_q = \psi_q \cdot \chi_C$:

$$\chi_C = \begin{pmatrix} q_\mathrm{r} \\ q_\mathrm{g} \\ q_\mathrm{b} \end{pmatrix}; \quad \chi_r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \chi_g = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \chi_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Antiquarks befinden sich in der konjugierten fundamentalen Darstellung und besitzen Antifarben
$(\bar{r}, \bar{g}, \bar{b})$.

Einführung von Schiebeoperatoren in den $SU(3)_C$ Farb-Tripletts:

$$\begin{aligned}
I^\pm_C &= \frac{1}{2}(\lambda_1 \pm i\lambda_2); \quad (\text{Transformation } \; g \longleftrightarrow r), \\
V^\pm_C &= \frac{1}{2}(\lambda_4 \mp i\lambda_5); \quad (\text{Transformation } \; r \longleftrightarrow b), \\
U^\pm_C &= \frac{1}{2}(\lambda_6 \pm i\lambda_7); \quad (\text{Transformation } \; b \longleftrightarrow g).
\end{aligned}$$

Ihre Funktion in Analogie zu $\tau^{\pm}$ für $SU(2)$ ist offensichtlich mit der 3-dim. Darstellung der λ-Matrizen (Gell-Mann-Matrizen):

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \; \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (g \longleftrightarrow r)$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \; \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (r \longleftrightarrow b)$$

$$\lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \; \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad (b \longleftrightarrow g)$$

$$\lambda_3 = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} r & g & b \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \bar{r} \\ \bar{g} \\ \bar{b} \end{array} \end{array} \quad (\text{koppelt} \;\; r\bar{r}, -g\bar{g})$$

$$\lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} r & g & b \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \bar{r} \\ \bar{g} \\ \bar{b} \end{array} \end{array} \quad (\text{koppelt} \;\; r\bar{r}, g\bar{g}, -2b\bar{b}).$$

$\Longrightarrow$ Wechselwirkungsterm der QCD-Lagrangedichte:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{WW}(SU(3)_C) &= -g_s \overline{\Psi} \gamma^\mu \frac{\lambda^a}{2} \Psi G^a_\mu \\
= -\frac{g_s}{\sqrt{2}} & \Big[\quad \overline{\Psi}\gamma^\mu I_C^+ \Psi (g\bar{r})_\mu + \overline{\Psi}\gamma^\mu I_C^- \Psi (r\bar{g})_\mu \\
&+ \quad \overline{\Psi}\gamma^\mu V_C^+ \Psi (r\bar{b})_\mu + \overline{\Psi}\gamma^\mu V_C^- \Psi (b\bar{r})_\mu \\
&+ \quad \overline{\Psi}\gamma^\mu U_C^+ \Psi (b\bar{g})_\mu + \overline{\Psi}\gamma^\mu U_C^- \Psi (g\bar{b})_\mu \\
&+ \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \overline{\Psi}\gamma^\mu \lambda^3 \Psi G^3_\mu + \frac{1}{\sqrt{2}} \overline{\Psi}\gamma^\mu \lambda^8 \Psi G^8_\mu \Big]
\end{aligned}$$

mit den 8 Gluonfeldern

$$\begin{aligned}
g_{\mu 1} &= (g\bar{r})_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(G^1_\mu - iG^2_\mu), \\
g_{\mu 2} &= (r\bar{g})_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(G^1_\mu + iG^2_\mu) = \overline{g}_{\mu 1}, \\
g_{\mu 4} &= (r\bar{b})_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(G^4_\mu + iG^5_\mu), \\
g_{\mu 5} &= (b\bar{r})_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(G^4_\mu - iG^5_\mu) = \overline{g}_{\mu 4}, \\
g_{\mu 6} &= (b\bar{g})_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(G^6_\mu - iG^7_\mu), \\
g_{\mu 7} &= (g\bar{b})_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(G^6_\mu + iG^7_\mu) = \overline{g}_{\mu 6}, \\
g_{\mu 3} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(r\bar{r} - g\bar{g}) = G^3_\mu \quad \text{(farbneutral)}, \\
g_{\mu 8} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(r\bar{r} + g\bar{g} - 2b\bar{b}) = G^8_\mu \quad \text{(farbneutral)}.
\end{aligned}$$

zu 8 erhaltenen Farbladungsoperatoren, die sich in der $N^2 - 1 = 8$-dim. adjungierten Darstellung befinden:

$3_C \otimes \overline{3}_C = 1_C + 8_C.$

Gluonaustausch ändert die Farb-, nicht die Flavour-Quantenzahlen der Quarks.

Keine colour-Singulett-Gluonen in $SU(3)_C$ mit $\det U = 1$ (im Gegensatz zu $U(3)$):

würden an farbneutrale Zustände, Mesonen und Baryonen, koppeln und starke Kernkräfte mit langer Reichweite, wie elektromagnetische Felder, hervorrufen.

"Farbige" Teilchen (Quarks und Gluonen) sind in farbneutralen colour-Singulett-Zuständen (Mesonen $q\bar{q}$ und Baryonen qqq) gebunden und treten nicht als freie Zustände auf (Confinement-Hypothese).

Beispiel:

$$\pi^+ = \frac{1}{\sqrt{3}}(u_r \bar{d}_{\bar{r}} + u_g \bar{d}_{\bar{g}} + u_b \bar{d}_{\bar{b}}).$$

(Farbsingulettzustand 1_C aus der Darstellung

$3_C \otimes \overline{3}_C = 1_C + 8_C$).

Kernkräfte sind Van-der-Waalssche Restwechselwirkung zur Farbwechselwirkung der Quarks und Gluonen.

Motivation der Farbquantenzahl:

1. Die neuen inneren Freiheitsgrade der $SU(3)_C$-Farbsymmetrie erlauben die Konstruktion einer antisymmetrischen Wellenfunktion für das Baryon $\Delta^{++} = (u\uparrow u\uparrow u\uparrow)$ mit $J^P = \frac{3}{2}^+$ und $L = 0$:

$$\chi_C(\Delta^{++}) = \frac{1}{\sqrt{6}}\varepsilon_{ijk} u_i\, u_j\, u_k$$

   (Farbsingulettzustand 1_c aus der Darstellung

   $3_C \otimes 3_C \otimes 3_C = 1_C + 8_C + 8_C + 10_C$).

2. Hadronischer Wirkungsquerschnitt in der e^+e^--Vernichtung:

$$\begin{aligned} R &= \sigma(e^+e^- \to \sum_{q(E_{CM}>2m_q)} q\bar{q})/\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-) \\ &= N_C \cdot \sum_{q(E_{CM}>2m_q)} Q_q^2 \end{aligned}$$

   mit $N_C = 3 =$ Zahl der Farbfreiheitsgrade der Quarks im Gegensatz zu Leptonen.

3. $\Gamma(\pi^0 \to \gamma\gamma) \sim N_C^2$.

4. Renormierbarkeit der GSW-Eichfeldtheorie der elektroschwachen Wechselwirkung:

   Aufhebung divergenter Terme in höherer Ordnung der Störungstheorie, bei denen 2 Vektorströme und 1 Axialvektorstrom koppeln (sog. Dreiecks-Anomalien), zwischen Lepton- und Quark-Beiträgen, falls gilt:

$$\sum_f Q_f(\mathrm{L-Dubletts}) = 0.$$

   Dies ist möglich, wenn Lepton- und Quark-Dubletts der schwachen WW in jeder Familie gepaart sind, d.h. gleiche Anzahl, und die Quarks jeweils in 3 Farben auftreten:

$$\sum_f Q_f = \sum_\ell Q_\ell + N_C \cdot \sum_q Q_q = 3 \cdot (-1 + N_C \cdot \frac{1}{3}) = 0.$$

   D.h. Verknüpfung zwischen Leptonen und Quarks und zwischen den Eichtheorien der elektroschwachen und der starken WW: $SU(2)_L$ und $SU(3)_C$!

1.6 Ursprung der Massen der Elementarteilchen

- Nur ein masseloses Spin-1 Teilchen beobachtet: Photon $\longrightarrow U(1)_Q$-Eichsymmetrie.

- Die schwache Wechselwirkung ist kurzreichweitig. $\Longrightarrow$ schwere Feldquanten.

- Explizite Massenterme für Eichbosonen (Proca-Gleichung) verletzen die lokale Eichsymmetrie der Lagrange-Funktion, explizite Massenterme für die Fermionen (Dirac-Gleichung) brechen die globale $SU(2)_L$-Eichsymmetrie.

- Die Eichsymmetrie ist aber verantwortlich und notwendig für die Aufhebung von Divergenzen in jeder Ordnung der Störungstheorie, d.h. die Renormierbarkeit der elektroschwachen Theorie (wie in der QED).

Ausweg:

Sog. spontane Brechung der Symmetrie des Grundzustands (des Vakuums der Feldtheorie),

während die volle Eichsymmetrie der Lagrange-Funktion und der Feldgleichungen erhalten bleibt:

$$SU(2)_L \otimes U(1)_Y \xrightarrow{SSB} U(1)_Q$$

("verborgene Eichsymmetrie").

Motivation:

Konstruktion in Analogie zu Phasenübergängen 2. Ordnung in der Festkörperphysik: SSB unterhalb der kritischen Temperatur.

Ordnungsparameter (z.B. Magnetisierung) nimmt spontan und diskontinuierlich einen von Null verschiedenen Wert im Grundzustand an.

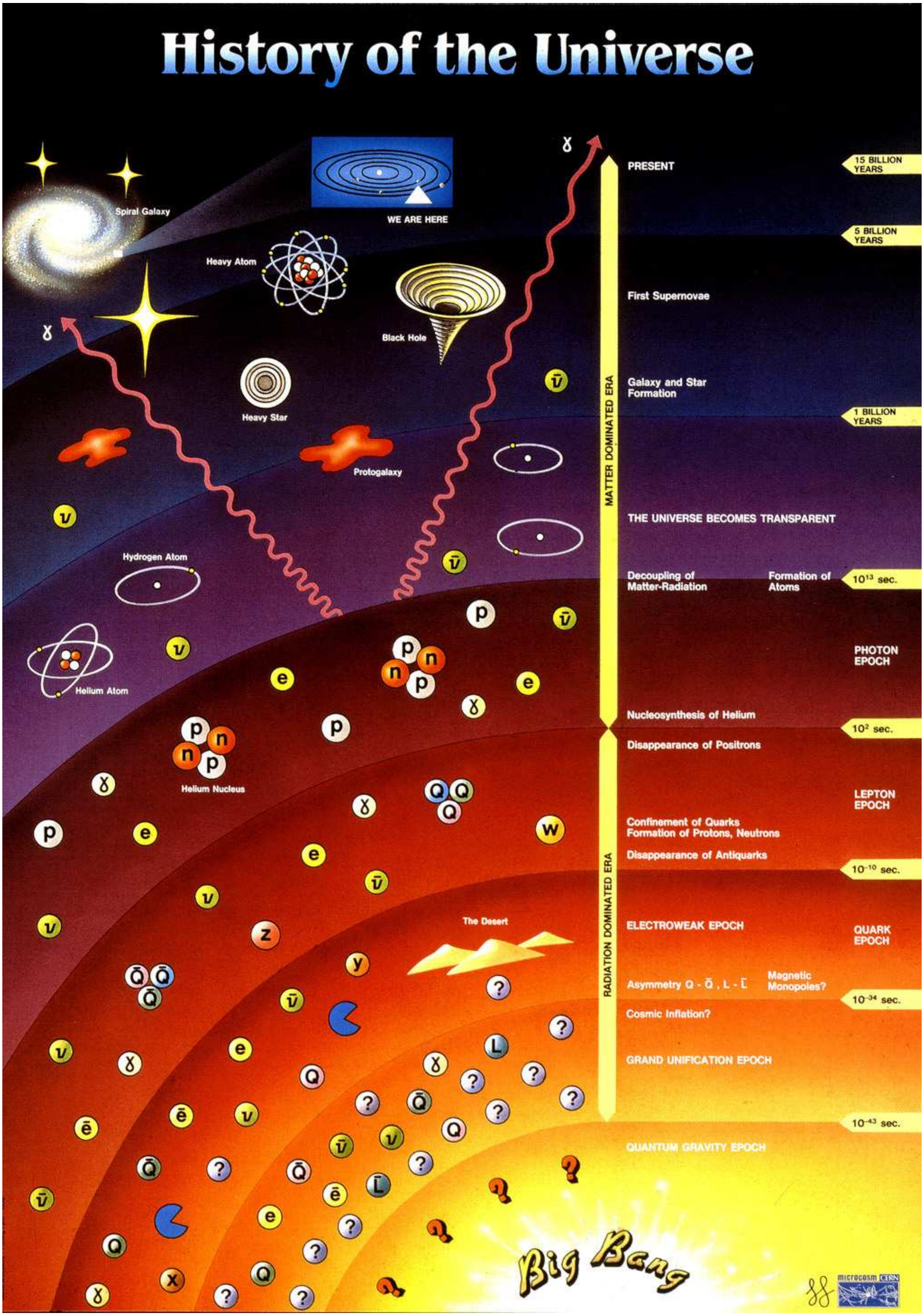
In der Teilchenphysik: Volle Symmetrie des Vakuums wiederhergestellt bei hohen Energien,

d.h. Phasenübergänge mit spontaner Symmetriebrechung bei Abkühlung des expandierenden frühen Universums.

In der Theorie der Phasenübergänge (Ginzburg-Landau-Theorie) entspricht der Ordnungsparameter einem selbstwechselwirkenden skalaren Feld, das im Grundzustand einen von Null verschiedenen Erwartungswert annimmt.

Goldstone-Theorem:

Für jeden Generator einer globalen kontinuierlichen Symmetrie der Bewegungsgleichungen, die im Grundzustand gebrochen ist, tritt ein masseloses skalares Teilchen (Goldstone-Boson) auf.


History of the Universe
WE ARE HERE
Spiral Galaxy
Heavy Atom
Black Hole
Heavy Star
Protogalaxy
Hydrogen Atom
Helium Atom
Helium Nucleus
The Desert
PRESENT
First Supernovae
Galaxy and Star Formation
THE UNIVERSE BECOMES TRANSPARENT
Decoupling of Matter-Radiation
Formation of Atoms
Nucleosynthesis of Helium
Disappearance of Positrons
Confinement of Quarks
Formation of Protons, Neutrons
Disappearance of Antiquarks
ELECTROWEAK EPOCH
Asymmetry Q - Q̄ , L - L̄
Magnetic Monopoles?
Cosmic Inflation?
GRAND UNIFICATION EPOCH
QUANTUM GRAVITY EPOCH
MATTER DOMINATED ERA
RADIATION DOMINATED ERA
15 BILLION YEARS
5 BILLION YEARS
1 BILLION YEARS
10^{13} sec.
PHOTON EPOCH
10^{2} sec.
LEPTON EPOCH
10^{-10} sec.
QUARK EPOCH
10^{-34} sec.
10^{-43} sec.
Big Bang
microcosm CERN

Goldstone-Bosonen sind (wegen der Eichsymmetrie) energielose Anregungen, die die durch die gebrochenen Symmetrie-Generatoren erreichbaren (ineinander transformierbaren) Grundzustände verbinden (Quasiteilchenanregungen in der Festkörperphysik, z.B. Phononen).

Als Elementarteilchen wurden sie nicht beobachtet.

Bei lokaler Eichsymmetrie transformieren die Goldstone-Bosonen mittels Eichtransformationen zu den gebrochenen Generatoren als longitudinale Polarisationsfreiheitsgrade der Eichbosonen, die dadurch eine Masse erhalten (Higgs-Mechanismus).

Analogie zum Supraleiter im Magnetfeld:

Durch lokal eichinvariante, elektromagnetische Wechselwirkung mit den Cooper-Paarkondensat im kohärenten supraleitenden Grundzustand (Ordnungsparameterfeld) wird das Photonfeld aus dem Supraleiter abgeschirmt und erhält eine effektive Masse (endliche Reichweite, Eindringtiefe).

Die lokale $U(1)$-Phasensymmetrie (Teilchenzahlerhaltung) wird im kohärenten Grundzustand gebrochen.

1.6.1 Higgs-Mechanismus im Standardmodell

Minimaler Higgs-Mechanismus:
Zusätzliches komplexes, skalares Feld, $SU(2)_L$-Dublett,

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi^+ \\ \Phi^0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{ccc} Q & I^0 & Y = 2(Q - I^0) \\ +1 & +\frac{1}{2} & +1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & +1 \end{array}$$

mit schwacher und elektromagnetischer Wechselwirkung (4 Freiheitsgrade).

Erfüllt die Klein-Gordon-Gleichung mit $SU(2)_L \times U(1)_Y$-eichinvarianter Lagrange-Dichte:

$$\mathcal{L}_{\text{Skalar}} = (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - V(\Phi^\dagger \Phi) = T - V$$

mit

$$D_\mu = \partial_\mu \cdot 1 + i\frac{g'}{2} Y B_\mu \cdot 1 + i\frac{g}{2} \vec{\tau} \cdot \vec{W}_\mu$$

und dem Selbstwechselwirkungspotential ($\lambda > 0$):

$$V(\Phi^\dagger \Phi) = \mu^2 (\Phi^\dagger \Phi) + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2.$$

$|\Phi|$ ist der Ordnungsparameter in Analogie zur Ginzburg-Landau-Theorie (freie Energie ersetzt Lagrangedichte).

Für $\mu^2 < 0$ ist der Grundzustand (kin. Energie $T = 0$, $V = V_{\mathrm{min.}}$) bei einem von Null verschiedenen Betrag des Skalarfelds (Vakuumerwartungswert $|\Phi_0| = v/\sqrt{2}$):

$$\frac{\partial V}{\partial|\Phi|} = 2\mu^2|\Phi_0| + 4\lambda|\Phi_0|^3 = 0.$$

$$\Longrightarrow |\Phi_0| = \sqrt{\frac{-\mu^2}{2\lambda}} =: \frac{v}{\sqrt{2}}.$$

Die Mannigfaltigkeit (Unterraum) im Φ-Raum, auf der $V(\Phi^\dagger\Phi)$ minimal wird, ist $SU(2)_L \times U(1)_Y$-invariant.

Durch Auswahl eines der möglichen Grundzustände,

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

wird die $SU(2)_L \times U(1)_Y$-Symmetrie spontan gebrochen.

Eine $U(1)_Q$-Phasensymmetrie des Vakuums, entsprechend der Erhaltung der elektrische Ladung bleibt, wie beobachtet, ungebrochen zurück:

$$SU(2)_L \otimes U(1)_Y \stackrel{SSB}{\longrightarrow} U(1)_Q.$$

Generatoren T, die den Grundzustand Φ_0 invariant lassen:

$$e^{iT\alpha}\Phi_0 = \Phi_0 \Longrightarrow T\Phi_0 = 0.$$

Für die gebrochenen $SU(2)_L \times U(1)_Y$-Generatoren gilt:

$$
\begin{aligned}
\tau_1 \Phi_0 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{v}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0; \\
\tau_2 \Phi_0 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\frac{v}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0; \\
\tau_3 \Phi_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{v}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0; \\
Y \Phi_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \neq 0; \\
\frac{(\tau_3 - Y)}{2} \Phi_0 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \neq 0;
\end{aligned}
$$

während die elektrische Ladung erhalten bleibt:

$$Q\Phi_0 = \frac{1}{2}(\tau_3 + Y)\Phi_0 = 0.$$

(orthogonal zum Generator $(\tau_3 - Y)/2$, der dem Z^0_μ-Eichfeld entspricht).

Eine Parametrisierung von Feldanregungen aus dem Grundzustand Φ_0 (Quasiteilchenanregungen):

$$\Phi(x) = e^{i\frac{\vec{\tau}\vec{\zeta}(x)}{2v}} \begin{pmatrix} 0 \\ (v + H(x))/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

mit der reellen radialen Anregung $H(x)$ (skalares Higgs-Boson: massiv, gegen die Rückstellkraft des Potentials V) und den reellen Winkelanregungen $\zeta_i(x)$ $(i = 1, ..., 3)$, die die verschiedenen Grundzustände verbinden.

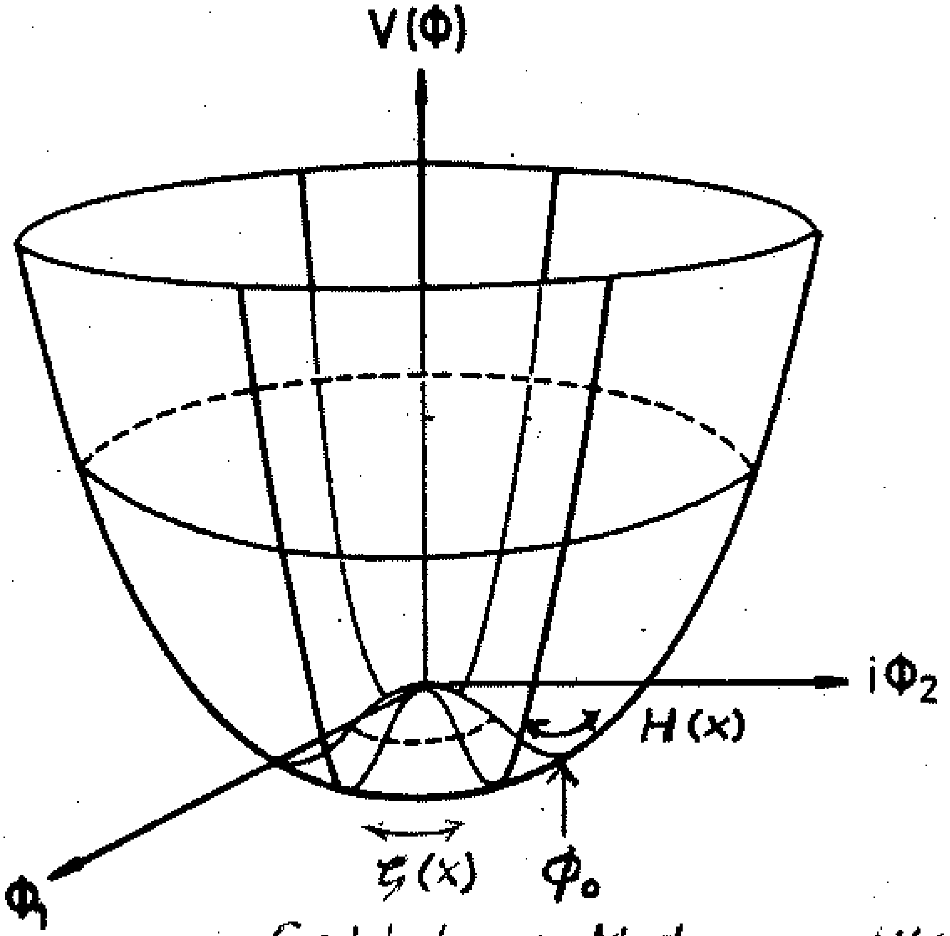
Die masselosen Goldstone-Moden ζ_i werden von den Eichbosonen "absorbiert", die den gebrochenen Generatoren entsprechen.

Dies geschieht durch die lokale $SU(2)_L$-Eichtransformation:

$$\begin{aligned}
\Phi(x) &\longrightarrow \Phi'(x) = e^{-i\frac{\vec{\tau}\vec{\zeta}(x)}{2v}}\Phi(x), \\
L_f(x) &\longrightarrow L'_f(x), \\
R_f(x) &\longrightarrow R_f(x), \\
\vec{W}_\mu(x) &\longrightarrow \vec{W}'_\mu(x), \\
B_\mu(x) &\longrightarrow B_\mu(x)
\end{aligned}$$

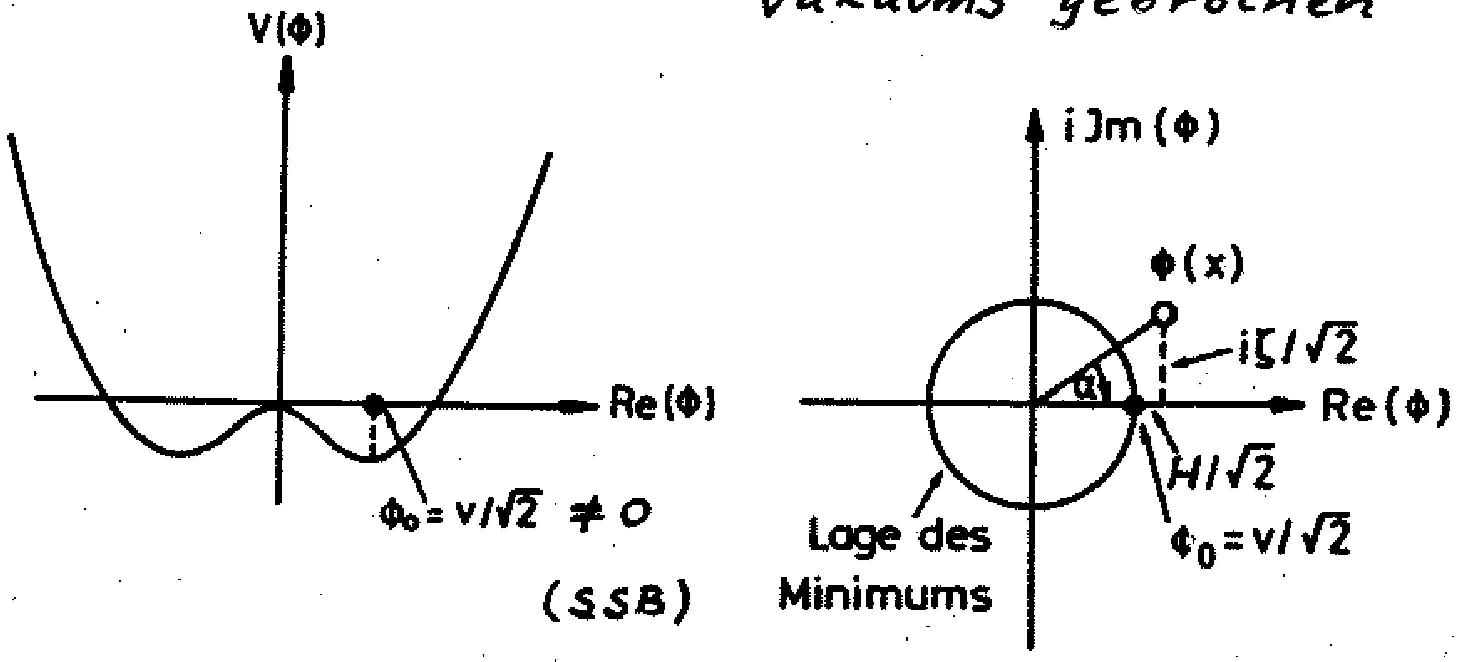
(sog. "unitäre Eichung").

Higgs - Potential:



Goldstone Moden $\leftrightarrow$ U(1)-Transf

Beispiel: U(1) - Symmetrie des Vakuums gebrochen



Mit $Y_\Phi = +1$ gilt danach:

$$
\begin{aligned}
(D_\mu \Phi)' &= (\partial_\mu 1 + ig\frac{\vec{\tau}}{2}\cdot \vec{W}'_\mu + ig' B_\mu 1)\frac{1}{\sqrt{2}}(v+H)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ \partial_\mu H \end{pmatrix} + \frac{ig}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} (W_\mu^{1\prime} - iW_\mu^{2\prime})(v+H) \\ 0 \end{pmatrix} \\
&+ \frac{i}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ (g' B_\mu - g W_\mu^{3\prime})(v+H) \end{pmatrix} .
\end{aligned}
$$

Einsetzen von $\Phi'(x)$ und $(D_\mu\Phi)'$ in $\mathcal{L}_{\text{Skalar}} = T - V$ ergibt:

$$\begin{aligned}
T &= (D^\mu\Phi)'^\dagger (D_\mu\Phi)' \\
&= \frac{1}{2}\partial^\mu H \partial_\mu H + \frac{g^2(v+H)^2}{8}|W_\mu^{1\prime} - iW_\mu^{2\prime}|^2 \\
&+ \frac{(v+H)^2}{8}|g' B_\mu - g W_\mu^{3\prime}|^2 \\
&= \frac{1}{2}\partial^\mu H \partial_\mu H + \frac{g^2 v^2}{8}(W_\mu^+ W^{\mu+} + W_\mu^- W^{\mu-}) \\
&+ \frac{g^2 v^2}{8\cos^2\theta_W} Z_\mu^0 Z^{0\mu} \\
&+ \frac{g^2}{4}(H^2 + 2vH)\left[W_\mu^+ W^{\mu-} + \frac{1}{2\cos^2\theta_W} Z_\mu^0 Z^{0\mu}\right]. \\
V &= \mu^2 \Phi^\dagger\Phi + \lambda(\Phi^\dagger\Phi)^2 \\
&= \frac{\mu^2}{2}(v+H)^2 + \frac{\lambda}{4}(v+H)^4 = -\mu^2 H^2 + \lambda v H^3 + \frac{\lambda}{4}H^4.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{mit } (\mathrm{W}_\mu^{1\prime} &+ iW_\mu^{2\prime})(W^{1\prime\mu} - iW^{2\prime\mu}) \equiv 2W_\mu^+ W^{-\mu} \\
&= W_\mu^+ W^{\mu+} + W_\mu^- W^{\mu-}
\end{aligned}$$

und Rotation mit Weinberg-Winkel θ_W wie beim neutralen Strom (Diagonalisierung der Massenmatrix der neutralen Eichbosonen):

$$Z_\mu^0 = \frac{g' B_\mu - g W_\mu^{3\prime}}{\sqrt{g^2 + g'^2}} = \frac{g}{\cos\theta_W}(g' B_\mu - g W_\mu^{3\prime}).$$

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{L}_{\text{Skalar}} = \frac{1}{2}\Big(\partial^\mu H \partial_\mu H - M_H^2 H^2\Big) - \lambda v H^3 - \frac{\lambda}{4} H^4$$
$$+ \quad \frac{g^2}{4}(H^2 + 2vH)\left[W_\mu^+ W^{-\mu} + \frac{1}{2\cos^2\theta_W} Z_\mu^0 Z^{0\mu}\right.$$
$$+ \quad \frac{1}{2} M_W^2 (W_\mu^+ W^{\mu+} + W_\mu^- W^{\mu-}) + \frac{1}{2} M_Z^2 Z_\mu^0 Z^{0\mu}.$$

mit

$$\text{Eichbosonen}: M_W = \frac{gv}{2}; \quad M_Z = \frac{gv}{2\cos\theta_W} = \frac{M_W}{\cos\theta_W};$$
$$\text{Higgsboson}: \quad M_H = \sqrt{-2\mu^2} = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} v.$$

$$\text{und} \quad \sin^2\theta_W = 1 - \cos^2\theta_W = 1 - \frac{M_W^2}{M_Z^2}.$$

Alle Wechselwirklungsterme werden genau so benötigt, damit die elektroschwache Theorie störungstheoretisch berechenbar (“renormierbar”) ist (durch Eichsymmetrie!).

1.6.2 Massen der Fermionen

Eichinvariante Kopplung der links- und rechtshändigen Fermionen an das Skalarfeld $\Phi(x)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{WW}^{\text{Yukawa}} = & - \sum_{f(\text{up})} g_f \left[\left(\overline{L}_f \overline{\Phi}^* \right) \psi_{fR} + \overline{\psi}_{fR} \left(\overline{\Phi}^T L_f \right) \right] \\
& - \sum_{f(\text{down})} g_f \left[\left(\overline{L}_f \Phi \right) \psi_{fR} + \overline{\psi}_{fR} \left(\Phi^\dagger L_f \right) \right]
\end{aligned}$$

(Yukawa-Kopplung vom Typ $-g(\overline{\psi}\psi)\phi$ zuerst für Nukleon-Pion-Kernwechselwirkung eingeführt.)

mit dem $SU(2)_L$-Dublett ($Y_{\overline{\Phi}} = 2(Q - I^0) = -1 = -Y_\Phi$):

$$\overline{\Phi} := i\tau_2 \Phi^* = \begin{pmatrix} \overline{\Phi}^0 \\ -\Phi^- \end{pmatrix} \xrightarrow{SSB} \begin{pmatrix} (v+H)/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wegen der speziellen Eigenschaft der $SU(2)$-Gruppe, daß $\tau_2 \vec{\tau}^* = -\vec{\tau}\tau_2$, gilt unter $SU(2)_L \times U(1)_Y$-Eichtransformationen:

$$\begin{aligned}
\overline{\Phi} &= i\tau_2 \Phi^* \longrightarrow (i\tau_2 \Phi^*)' = i\tau_2 (U\Phi)^* \\
&= i\tau_2 e^{-i\frac{\vec{\tau}^*}{2}\cdot\vec{\beta}} e^{-i\frac{Y_\Phi}{2}\alpha} \Phi^* \\
&= e^{i\frac{\vec{\tau}}{2}\cdot\vec{\beta}} e^{i\frac{Y_{\overline{\Phi}}}{2}\alpha} (i\tau_2 \Phi^*) = U\overline{\Phi}.
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ <u>$SU(2)_L$-Invarianz von $\mathcal{L}_{WW}^{\text{Yukawa}}$:</u>

$$\begin{array}{rcl} (\overline{L}\Phi)\psi_R & \longrightarrow & (\overline{L}U^\dagger U\Phi)\psi_R = (\overline{L}\Phi)\psi_R, \\ \overline{\psi}_R(\Phi^\dagger L) & \longrightarrow & \overline{\psi}_R(\Phi^\dagger U^\dagger U L) = \overline{\psi}_R(\Phi^\dagger L). \end{array}$$

(und ebenso für die 'up'-Terme mit $\overline{\Phi}$),

wobei

$L \longrightarrow UL$, $\overline{L} \longrightarrow \overline{L}U^\dagger$, $\psi_R \longrightarrow \psi_R$, $\Phi \longrightarrow U\Phi$ und

$\overline{\Phi} \longrightarrow U\overline{\Phi}$.

<u>$U(1)_Y$-Invarianz von $\mathcal{L}_{WW}^{\text{Yukawa}}$:</u>

durch Aufhebung der Phasenfaktoren der L-und R-Fermionen und des Skalarfelds wegen

$$\begin{array}{rcll} Y_{\overline{L}} & + & Y_{\overline{\Phi}} + Y_R = +1 - 1 + 0 = 0 & (\mathrm{up-Leptonen}) \\ Y_{\overline{L}} & + & Y_{\Phi} + Y_R = +1 + 1 - 2 = 0 & (\mathrm{down-Leptonen}). \end{array}$$

Einsetzen von $\Phi'(x)$ ergibt:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{WW}^{\text{Yukawa}} &= -\sum_f g_f \frac{v+H}{\sqrt{2}} \left(\overline{\psi}_{fL}\psi_{fR} + \overline{\psi}_{fR}\psi_{fL} \right) \\
&\equiv -\sum_f \frac{g_f v}{\sqrt{2}} \overline{\psi}_f \psi_f - \sum_f \frac{g_f}{\sqrt{2}} (\overline{\psi}_f \psi_f) H.
\end{aligned}
$$

Damit Dirac-Massenterm mit

$$
m_f = \frac{g_f v}{\sqrt{2}}
$$

und Yukawa-Kopplung der Fermionen an das Higgsfeld H

$$
\frac{g_f}{\sqrt{2}} = \frac{m_f}{v} \sim m_f.
$$

Damit $H \to f\bar{f}$ bevorzugt in schwerste Fermionen mit $2m_f \leq M_H$.

Beachte: für Quarks gilt:

Massen- (und flavour-) Eigenzustände $\neq$ schwache Eigenzustände von $SU(2)_L$.

1.6.3 Schwache Wechselwirkung und Massen der Quarks

Experimentelle Beobachtung (schwache Zerfälle von K-, D-, B-Mesonen mit s-, c-, b-Quarks):

Die Masseneigenzustände der Quarks (Massenoperator diagonal; feste Massen) sind <u>verschieden</u> von den schwachen Eigenzuständen der Quarks, den linkshändigen $SU(2)$-Dubletts und den rechtshändigen $SU(2)$-Singuletts (schwache Ladungsoperatoren, $SU(2)$-Generatoren diagonal; feste schwache Ladungen).

Deshalb ist der Quark-Massenterm in der elektroschwachen Lagrange-Funktion nach der spontanen Symmetriebrechung statt

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{Masse}} &= -\sum_q \frac{g_q v}{\sqrt{2}}(\overline{\psi}_{qL}\psi_{qR} + \overline{\psi}_{qR}\psi_{qL}) \\
&\equiv -\sum_q \frac{g_q v}{\sqrt{2}}\overline{\psi}_q\psi_q = -\sum_q m_q\overline{\psi}_q\psi_q
\end{aligned}$$

(vereinfacht durch Annahme einer diagonalen Massenmatrix) allgemeiner von der Form

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{Masse}} &= -\frac{v}{\sqrt{2}}\sum_{i,j}\left[\Gamma_{ij}\overline{u}_{iL}u_{jR} + \Gamma^*_{ji}\overline{u}_{jR}u_{iL}\right. \\
&\qquad \left. + \Gamma_{ij}\overline{d}_{iL}d_{jR} + \Gamma^*_{ji}\overline{d}_{jR}d_{iL}\right] \\
&= -\sum_{i,j}\left[M^{(u)}_{ij}\overline{u}_{iL}u_{jR} + M^{(u)*}_{ji}\overline{u}_{jR}u_{iL}\right. \\
&\qquad \left. + M^{(d)}_{ij}\overline{d}_{iL}d_{jR} + M^{(d)*}_{ji}\overline{d}_{jR}d_{iL}\right]
\end{aligned}$$

mit den allgemeinen komplexen Massenmatrizen

$$M_{ij}^{(d)} = \Gamma_{ij}\frac{v}{\sqrt{2}} \text{ und } M_{ij}^{(u)} = \overline{\Gamma}_{ij}\frac{v}{\sqrt{2}}$$

Oder mit der Definition für die up (u)- und down (d)-artigen Quark-Eigenzustände des schwachen Isospins

$$D = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} \text{ und } U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix}$$

in Matrixschreibweise:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Masse}}^{\text{Quarks}} = & - \overline{D}_L M^{(d)} D_R - \overline{D}_R M^{(d)\dagger} D_L \\ & - \overline{U}_L M^{(u)} U_R - \overline{U}_R M^{(u)\dagger} U_L . \end{aligned}$$

(Es gilt $\mathcal{L}^\dagger = \mathcal{L}$ wie verlangt fuer eine Observable.)

Die separaten Massenmatrizen für up- und down-artige Quarks lassen sich diagonalisieren durch separate unitäre Transformationen jeweils für die links- und die rechtshändigen Quark-Zustände:

$$
\begin{aligned}
U_d^\dagger M^{(d)}\, V_d &= M^{(d)}_{\text{diag.}}; \quad U_u^\dagger M^{(u)} V_u = M^{(u)}_{\text{diag.}}; \\
V_d^\dagger M^{(d)\dagger} U_d &= (U_d^\dagger M^{(d)} V_d)^\dagger = M^{(d)*}_{\text{diag.}}; \\
V_u^\dagger M^{(u)\dagger} U_u &= (U_u^\dagger M^{(u)} V_u)^\dagger = M^{(u)*}_{\text{diag.}};
\end{aligned}
$$

mit

$$
\begin{aligned}
D'_L &= U_d^\dagger D_L; \quad U'_L = U_u^\dagger U_L; \\
D'_R &= V_d^\dagger D_R; \quad U'_R = V_u^\dagger U_R.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & \mathcal{L}^{\text{Quarks}}_{\text{Masse}} = \\
- \quad & \overline{D}_L \overbrace{U_d U_d^\dagger}^{=1} M^{(d)} \overbrace{V_d V_d^\dagger}^{=1} D_R - \overline{D}_R \overbrace{V_d V_d^\dagger}^{=1} M^{(d)\dagger} \overbrace{U_d U_d^\dagger}^{=1} D_L \\
- \quad & \overline{U}_L U_u \underbrace{U_u^\dagger M^{(u)} V_u} V_u^\dagger U_R - \overline{U}_R V_u \underbrace{V_u^\dagger M^{(u)\dagger} U_u} U_u^\dagger U_L \\
= \quad & -\overline{D}'_L M^{(d)}_{\text{diag.}} D'_R - \overline{D}'_R M^{(d)*}_{\text{diag.}} D'_L \\
& -\overline{U}'_L M^{(u)}_{\text{diag.}} U'_R - \overline{U}'_R M^{(u)*}_{\text{diag.}} U'_L \\
= \quad & -\overline{D}' M^{(d)}_{\text{diag.}} D' - \overline{U}' M^{(u)}_{\text{diag.}} U'.
\end{aligned}
$$

Die letzte Zeile gilt nach einer $U(1)$-Phasentransformation der Quarkfelder, so daß die Masseneigenwerte reell werden.

Die Lagrange-Funktion für die schwache geladene Stromwechselwirkung der Quarks läßt sich folgendermaßen durch die Masseneigenzustände ausdrücken:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}_{CC}^{\text{Quarks}} = \\
= \quad & -\frac{g}{\sqrt{2}}[j_{CC}^{\mu+}W_\mu^- + j_{CC}^{\mu-}W_\mu^+] \\
= \quad & -\frac{g}{\sqrt{2}}\sum_{i=1}^{3}\Big[(\overline{U}_{Li}\gamma^\mu D_{Li})W_\mu^- + (\overline{D}_{Li}\gamma^\mu U_{Li})W_\mu^+\Big] \\
= \quad & -\frac{g}{\sqrt{2}}\Big[(\overline{U}_L\gamma^\mu 1 D_L)W_\mu^- + (\overline{D}_L\gamma^\mu 1 U_L)W_\mu^+\Big] \\
\equiv \quad & -\frac{g}{\sqrt{2}}\Big[(\overline{U}'_L U_u^\dagger\gamma^\mu U_d D'_L)W_\mu^- + (\overline{D}'_L U_d^\dagger\gamma^\mu U_u U'_L)W_\mu^+\Big] \\
\equiv \quad & -\frac{g}{\sqrt{2}}\Big[\underbrace{(\overline{U}'_L\gamma^\mu V_{CKM}D'_L)}_{=j_{CC}^{\mu+}}W_\mu^- \\
& \qquad + \underbrace{(\overline{D}'_L V_{CKM}^\dagger\gamma^\mu U'_L)}_{=j_{CC}^{\mu-}}W_\mu^+\Big]
\end{aligned}
$$

mit der unitären Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM)-Matrix $V_{CKM} = U_u^\dagger U_d$.

1.7 Mischung der Quark-Flavours

Die "Quark-Mischungsmatrix" V_{CKM} führt zu geladenen schwachen Übergängen zwischen den Quarkgenerationen, definiert als die Masseneigenzustände der Quarks, die an die elektromagnetische und starke Wechselwirkung koppeln, und gibt verschiedene Gewichte für die Wahrscheinlichkeit der schwachen CC-Übergänge zwischen den up- und down-artigen Masseneigenzuständen der Quarks:

$$\begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} d_C \\ s_C \\ b_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} .$$

Z.B.: $u \longleftrightarrow d_C = V_{ud} d + V_{us} s + V_{ub} b.$

Die Elemente der CKM-Matrix werden vom Standardmodell nicht vorhergesagt, sondern müssen experimentell bestimmt werden. Dies ist ein aktiver Forschungszweig, insbesondere für die Übergänge mit schweren Quarks (c, b, t).

Zahl der unabhängigen Parameter der CKM-Matrix:

Für $n = 2$ Generationen:

Bis zur Entdeckung des bottom-Quarks.

Reelle orthogonale 2×2 Matrix mit 1 reellen Parameter, keine komplexe Phase:

$$\mathrm{Cabibbo-Matrix}: V = \begin{pmatrix} \cos\theta_c & \sin\theta_c \\ -\sin\theta_c & \cos\theta_c \end{pmatrix}.$$

θ_c ist der Cabibbo-Winkel mit $\sin\theta_c \approx 0.23$ und $\cos\theta_c \approx 0.95$.

Für $n = 3$ Generationen:

CKM-Matrix mit 3 reellen Parametern und 1 komplexen Phase: $V^* \neq V$ (möglich nur für ≥ 3 Generationen):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -s_{23}c_{12} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}$$

Mit den 3 Mischungswinkeln θ_{ij} $(i, j = 1, 2, 3; i > j)$, $c_{ij} = \cos\theta_{ij} > 0$, $s_{ij} = \sin\theta_{ij} > 0$, und dem Phasenfaktor $e^{i\delta}$.

Allgemeine Herleitung:

Komplexe $n \times n$-Matrix: $2n^2$ Parameter.

Unitäre Matrix mit n^2 Nebenbedingungen ($V^\dagger V = 1$): n^2 Parameter.

Davon sind $\underline{n(n-1)/2}$ Parameter reell; die übrigen $n^2 - n(n-1)/2 = \overline{n(n+1)/2}$ Parameter sind komplexe Phasenfaktoren.

Denn eine reelle unitäre Matrix (orthogonale Matrix) mit $n + n(n-1)/2$ Nebenbedingungen ($V^T V = 1$) hat $n^2 - n - n(n-1)/2 = n(n-1)/2$ unabhängige reelle Parameter.

n Phasenfaktoren können in den n U-Feldern durch Neudefinition ihrer Phase absorbiert werden (aus der 1. Spalte der Mischungsmatrix):

$$U_{Lj} \longrightarrow e^{-i\alpha_j^{(u)}} U_{Lj} \quad (j = 1, ..., n).$$

$n-1$ weitere Phasenfaktoren können aus der 1. Reihe der Mischungsmatrix in den $n-1$ D-Feldern absorbiert werden:

$$D_{Lj} \longrightarrow e^{-i\alpha_j^{(d)}} D_{Lj} \quad (j = 2, ..., n),$$

d.h. insgesamt werden $2n-1$ Phasenfaktoren eliminiert.

Danach bleiben $n(n+1)/2 - (2n-1) = \underline{(n-1)(n-2)/2}$ unabhängige Phasenfaktoren übrig.

Die aktuellen Meßwerte für die CKM-Matrixelemente sind:

$\lvert V_{ud}\rvert = 0.9736 \pm 0.0010$	aus nuklearem β- und μ-Zerfall
$\lvert V_{us}\rvert = 0.2205 \pm 0.0018$	aus semilept. Kaon-Zerfällen $K \to \pi e \nu_e$
$\lvert V_{ub}\rvert = (3.6 \pm 0.5) \cdot 10^{-3}$	aus semileptonischen Zerfällen $B \to X_u \ell \nu_\ell$
$\lvert V_{cd}\rvert = 0.224 \quad \pm 0.016$	charm-Quark-Produktionsrate in $\nu(\bar{\nu})$-Kern-Streuung
$\lvert V_{cs}\rvert = 1.01 \quad \pm 0.18$	semileptonische charm-Quark Zerfälle $D \to K e \nu_e$ $(c \to s)$
$\lvert V_{cb}\rvert = 0.040 \quad \pm 0.002$	aus semilept. B-Mesonzerfällen
$\lvert V_{td}\rvert = 0.009 \pm 0.002$	von $B_d^0\overline{B}_d^0$-Mischung
$\lvert V_{td}\rvert < 0.009$ (95% C.L.)	von $B_s^0\overline{B}_s^0$-Mischung
$\lvert V_{td}/V_{ts}\rvert < 0.29$ (95 % C.L.)	von $B_d^0\overline{B}_d^0$- und $B_s^0\overline{B}_s^0$-Mischung
$\lvert V_{td}/V_{ts}\rvert < 0.56$ (90 % C.L.)	von $b \to s\gamma$ Zerfällen
$\lvert V_{ts}/V_{cb}\rvert = 1.1 \pm 0.4$	von $b \to s\gamma$ Zerfállen
$\lvert V_{tb}\rvert > 0.016$ (95 % C.L.)	aus top-Quark-Zerfällen $t \to W^+ b$

$$\begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix}$$

Die Hierarchie der Übergangswahrscheinlichkeiten und der Quarkmassen läßt eine Erklärung durch eine dem Standardmodell übergeordnete Theorie erwarten.

u **c** **t**

d **s** **b**

Die näherungsweise Wolfenstein-Parametrisierung macht die Rangordnung der Übergänge zwischen den Quark-Generationen (Massen/flavour-Eigenzustände) deutlich:

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} 1-\frac{\lambda^2}{2} & \lambda & A\lambda^3(\rho - i\eta) \\ -\lambda & 1-\frac{\lambda^2}{2} & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1-\rho-i\eta) & -A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\lambda^4),$$

bei der die Matrixelemente nach dem kleinen Parameter λ entwickelt werden.

Die 4 Wolfenstein-Parameter haben die gemessenen Werte:

$$\begin{aligned} \lambda &\equiv s_{12} = 0.2205 \pm 0.0018, \\ A &\equiv s_{23}/\lambda^2 = 0.82 \pm 0.06, \\ \sqrt{\rho^2+\eta^2} &\equiv |V_{ub}|/A\lambda^3 = 0.36 \pm 0.09. \end{aligned}$$

Eine komplexe CKM-Matrix ermöglicht eine Beschreibung der beobachteten schwachen Verletzung der CP-Symmetrie im Rahmen des Standardmodells (mit 6 Quarks in 3 Generationen), hervorgerufen wiederum durch die schwache Wechselwirkung und mit Ursprung in der Fermion-Higgs-Boson-Kopplung bzw. der Quark-Massenmatrix:

Vorschlag von Kobayahi und Maskawa 1973 noch vor der Entdeckung der dritten Fermion-Generation (τ-Lepton 1975, bottom-Quark 1977, top-Quark 1994) und vor der Entdeckung des charm-Quarks 1974.

Denn mit

$$\begin{aligned} j^{\mu+}_{CC} &= \overline{U}_L \gamma^\mu V_{CKM} D_L \xrightarrow{CP} -\overline{D}_L V^T_{CKM} \gamma^\mu U_L; \\ j^{\mu-}_{CC} &= \overline{D}_L V^\dagger_{CKM} \gamma^\mu U_L \xrightarrow{CP} -\overline{U}_L \gamma^\mu V^*_{CKM} D_L; \end{aligned}$$

und

$$W^\pm_\mu \xrightarrow{CP} -W^\mp_\mu .$$

verhält sich $\mathcal{L}^{\text{Quarks}}_{CC}$ unter CP-Transformationen wie

$$\begin{aligned} & (\overline{U}_L \gamma^\mu V_{CKM} D_L) W^-_\mu + (\overline{D}_L V^\dagger_{CKM} \gamma^\mu U_L) W^+_\mu \\ \xrightarrow{CP} \quad & (\overline{D}_L V^T_{CKM} \gamma^\mu U_L) W^+_\mu + (\overline{U}_L \gamma^\mu V^*_{CKM} D_L) W^-_\mu , \end{aligned}$$

d.h. $\mathcal{L}^{\text{Quarks}}_{CC}$ ist nur CP-invariant, wenn $V^* = V$.

1.7.1 Neutrale Ströme der Quarks

$$\mathcal{L}_{NC} = -e j^{\mu}_{\text{el.magn.}} A_\mu - \frac{e}{\sin\theta_W \cos\theta_W} \left[j^{\mu 3} - j^{\mu}_{\text{el.magn.}} \sin^2\theta_W \right] Z_\mu$$

mit dem elektromagnetischen Strom

$$\begin{aligned} j^{\mu}_{\text{el.magn.}} &= Q_u(\overline{U}\gamma^\mu U) + Q_d(\overline{D}\gamma^\mu D) \\ &= Q_u(\overline{U}'\gamma^\mu U') + Q_d(\overline{D}'\gamma^\mu D') \end{aligned}$$

und dem Strom der dritten Komponente des schwachen Isospins

$$\begin{aligned} j^{\mu 3} &= I^3_u(\overline{U}\gamma^\mu U) + I^3_d(\overline{D}\gamma^\mu D) \\ &= \frac{1}{2}(\overline{U}\gamma^\mu U) - \frac{1}{2}(\overline{D}\gamma^\mu D) \\ &= \frac{1}{2}(\overline{U}'\gamma^\mu U') - \frac{1}{2}(\overline{D}'\gamma^\mu D'). \end{aligned}$$

Die neutralen Ströme bleiben flavour-erhaltend für die Masseneigenzustände U', D' wie für die schwachen Eigenzustände U, D wegen der Unitarität der Transformation,

$$U^\dagger_{u,d} U_{u,d} = 1; \quad V^\dagger_{u,d} V_{u,d} = 1,$$

so daß z.B. gilt

$$\begin{aligned}\overline{U}\gamma_\mu U &= \overline{U}_L\gamma_\mu U_L + \overline{U}_R\gamma_\mu U_R \\ &= \overline{U}'_L U_u^\dagger \gamma_\mu U_u U'_L + \overline{U}'_R V_u^\dagger \gamma_\mu V_u U'_R \\ &= \overline{U}'_L\gamma_\mu U'_L + \overline{U}'_R\gamma_\mu U'_R = \overline{U}'\gamma_\mu U'.\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Keine CP-Verletzung in der schwachen neutralen und der elektromagnetischen WW.

Die kinetischen Terme bleiben ebenfalls unverändert.

$\Longrightarrow$ Keine flavour-ändernden Prozesse mit neutralen Strömen (FCNC-Prozesse) in 1. Ordnung im Standardmodell.

Unterdrückung von FCNC-Prozessen auch in höherer Ordnung der schwachen WW: durch den

"**GIM-Mechanismus**" (Glashow, Illiopoulos, Maiani).

Experimentell sind FCNC-Prozesse sehr klein, z.B. ist das Verzweigungsverhältnis

$$BR(K_L^0 \to \mu^+\mu^-) = \frac{\Gamma(K_L^0 \to \mu^+\mu^-)}{\Gamma^{\text{tot}}_{K_L^0}} \approx 9 \cdot 10^{-7}\%$$

während $BR(K^+ \to \mu^+\nu_\mu) = 63.5\%$ (typischer schwacher CC-Zerfall).

(NB: Schwacher Zerfall in Myonpaar bevorzugt gegenüber Zerfall in Elektronpaar wegen Drehimpulserhaltung und Paritätsverletzung!)

In 2. Ordnung der schwachen Wechselwirkung ist der Prozeß für den Zerfall $K_L^0 \to \mu^+\mu^-$:

Gegenseitige Aufhebung der Amplituden für up- und charm-Quark-Austausch wegen der Unitariät der CKM-Matrix (Orthogonalität der Cabibbo-Matrix für 2 Generationen):

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_u &\sim \quad g^4 \sin\theta_C \cos\theta_C; \\ \mathcal{M}_c &\sim -g^4 \sin\theta_C \cos\theta_C; \end{aligned}$$

Details abhängig vom Wert der charm-Quark-Masse $m_c \gg m_u$.

$\Longrightarrow$ Vorhersage für die Masse des charm-Quarks: > 1 GeV.

Konsequenzen der Quark-Flavour-Mischung in der schwachen Wechselwirkung:

1. Quark-Flavour-Oszillationen.

2. Verletzung der CP-Symmetrie.