1.8 Störungstheorie und Feynman-Diagramme

Zur Berechnung von Übergangsamplituden $\langle f|\psi(t)\rangle$ für Zerfallswahrscheinlichkeiten und Wirkungsquerschnitte.

Einfachste Methode (nach Feynman):

Iterative Lösung der klassischen Feldgleichungen, mit Wechselwirkungsterm als Störung zu den freien Feldgleichungen, unter Benutzung der Methode der Greenschen Funktion.

1.8.1 Bekanntes Beispiel: Elektrostatik:

Poisson-Gleichung für skalares elektrostatisches Potential $\phi(\vec{x})$:

$$\vec{\nabla}^2\Phi(\vec{x}) = -\rho(\vec{x}).$$

Lösung für Punktladung am Ort $\vec{x}'$: $\rho(\vec{x}) = q\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}')$:

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|} \quad (\mathrm{Coulomb-Potential}).$$

Für eine allgemeine Ladungsverteilung $\rho(\vec{x}')$ ist die Lösung offensichtlich:

$$\Phi(\vec{x}) = \int \frac{\rho(\vec{x}')}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|}d^3x' =: \int G(\vec{x}-\vec{x}')\rho(\vec{x}')d^3x'$$

mit der sog. Greenschen Funktion

$$G(\vec{x},\vec{x}') = G(\vec{x}-\vec{x}') = \frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

die eine Lösung der Poisson-Gleichung ist für eine Einheitspunktladung am Ort $\vec{x}'$ (Definition):

$$\vec{\nabla}_x^2 G(\vec{x},\vec{x}') = -\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}').$$

1.8.2 Anwendung auf Eichfeldtheorien:

1.8.2.1 Elektromagnetische WW von Fermionen (QED):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{QED}_{\text{Fermion}} &= \overline{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi \\ &= \overline{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - eQ\overline{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \\ &= \overline{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - ej^\mu A_\mu.\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Feldgleichung nach dem Lagrange-Formalismus:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\overline{\psi}} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\overline{\psi})}\right) = 0$$

ist die Dirac-Gleichung

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) = eQ\gamma^\mu A_\mu(x)\psi(x)$$

mit elektromagnetischem Kopplungsterm:

eine inhomogene Differentialgleichung, die i.a. nicht analytisch lösbar ist, d.h. iterative Lösung mit inhomogenem Wechselwirkungsterm als Störung.

Ansatz für die Greensche Funktion:

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)K(x - x') = \delta^{(4)}(x - x')\cdot 1.$$

Mit der Lösung $\psi^{(0)}(x)$ der homogenen freien Dirac-Gleichung, $(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi^{(0)}(x) = 0$

ist damit die allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl.:

$$\underline{\psi(x)} = \psi^{(0)}(x) + eQ\int d^4x' K(x-x')\gamma^\mu A_\mu(x')\underline{\psi(x')}.$$

Die Integralgleichung kann iterativ gelöst werden:

0. Näherung: $\psi^{(0)}(x) \longrightarrow$ einsetzen in RS.

1. Näherung:

$$\psi^{(1)}(x) = \psi^{(0)}(x) + eQ\int d^4x\prime K(x-x')\gamma^\mu A_\mu(x')\underline{\psi^{(0)}(x')};$$

$\longrightarrow$ einsetzn in RS.

2. Näherung:

$$\psi^{(2)}(x) = \psi^{(0)}(x) + eQ\int d^4x\prime K(x-x')\gamma^\mu A_\mu(x')\psi^{(0)}(x')$$

$$+e^2Q^2\int\int d^4x''d^4x' \quad K(x-x'') \quad \gamma^\mu A_\mu(x'')$$
$$K(x''-x') \quad \gamma^\mu A_\mu(x')\psi^{(0)}(x').$$

Störungsentwicklung nach Potenzen des WW-Terms $\sim e$.

Fouriertransformation der Greenschen Funktion,

$$K(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \widehat{K}(p) e^{-ip(x-x')},$$

ergibt bei Einsetzen in die Dirac-Gleichung:

$$\begin{aligned}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)K(x-x') &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p (\not{p} - m)\widehat{K}(p) e^{-ip(x-x')} \\ \equiv \delta^{(4)}(x-x') \cdot 1 &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ip(x-x')} \cdot 1,\end{aligned}$$

d.h. $(\not{p} - m)\widehat{K}(p) = 1$, mit $\not{p} := \gamma^\mu p_\mu = \gamma^0 p_0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{p}$ etc.

$$\Longrightarrow (\not{p} + m)(\not{p} - m)\widehat{K}(p) = (p^2 - m^2)\widehat{K}(p) \equiv (\not{p} + m) \cdot 1$$

$\Longrightarrow$ "Fermion-Propagator"

$$\boxed{\widehat{K}(p) = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}}$$

mit Integrationsregel für das Fourierintegral der räumlichen Greenschen Funktion in der komplexen Ebene:

Konvergente Lösungen für Wellen mit positiver Energie (Teilchen), die sich in positiver Zeitrichtung ($t > t'$) ausbreiten und für Wellen mit negativer Energie (Antiteilchen), die sich in negativer Zeitrichtung ausbreiten ($t < t'$). $\longrightarrow$ Feynman-Bild.

1.8.2.2 Photon-Propagator

Lösung der Wellengleichung:

$$\partial_\nu \partial^\nu A^\mu(x) = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \right) A^\mu(x) = -e j^\mu_{\text{el.magn.}}(x).$$

Lösungen der freien Wellengleichung sind ebene Wellen mit 2 transversalen Polarisationsfreiheitsgraden (s.o.).

Lösungsansatz für die inhomogenen Feldgleichungen mit Greenscher Funktion:

$$\partial_\lambda \partial^\lambda D^{\mu\nu}(x - x') = g^{\mu\nu} \delta^{(4)}(x - x')$$

mit der Minkowsky-Metrik $g^{\mu\nu}$.

Damit ist die allgemeine Lösung der inhomogenen Wellengleichung (einsetzen!):

$$A_\mu(x) = -e \int d^4x' D^{\mu\nu}(x - x') j_\nu(x').$$

Die Fouriertransformation der Greenschen Funktion,

$$D^{\mu\nu}(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4q \widehat{D}^{\mu\nu}(q) e^{-iq(x-x')},$$

eingesetzt in die Wellengleichung, ergibt:

$$\begin{aligned}\partial_\lambda\partial^\lambda D^{\mu\nu}(x-x') &= \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4q \widehat{D}^{\mu\nu}(q)(-iq)^2 e^{-iq(x-x')} \\ &= g^{\mu\nu}\delta^{(4)}(x-x').\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ "Photon-Propagator":

$$\boxed{\widehat{D}^{\mu\nu}(q) = \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{-g^{\mu\nu}}{q^2+i\varepsilon}}$$

(Integrationsvorschrift und Zeitentwicklung für Teilchen- und Antiteilchen wie für Fermionen).

1.8.2.3 Propagator für massive Eichbosonen: $W_\mu^\pm$, Z_μ^0

Elektromagnetische Wellengleichung ersetzt durch Proca-Gleichung mit Masseterm (nicht eichinvariant):

$$\begin{aligned}(\partial_\nu\partial^\nu + M^2)W^{\pm\mu} - \partial^\mu(\partial_\nu W^{\pm\nu}) &= -\frac{g}{\sqrt{2}} j_{CC}^{\mp\mu} \\ \Big[(\partial_\nu\partial^\nu + M^2)g^{\mu\nu} - \partial^\mu\partial^\nu\Big] W_\nu^\pm &= -\frac{g}{\sqrt{2}} j_{CC}^{\mp\mu}\end{aligned}$$

mit zusätzlichem Masseterm $\mathcal{L}_{\mathrm{M}} = \frac{1}{2}M^2 W^{\pm\mu}W_\mu^\pm$ in der Lagrange-Funktion von SSB (Eichinvarianz wiederhergestellt durch kompensierende zusätzliche WW-Terme mit dem Higgs-Feld).

Feldgleichung ohne die Selbstwechselwirkungsbeiträge für nicht-Abelsche Eichbosonen; nur WW mit Fermionen als Quellterm betrachtet. Der freie Propagator ist davon unabhängig, jede einzelne WW ist separate Störung in erster Näherung.

Ansatz für Greensche Funktion:

$$\Big[(\partial_\nu\partial^\nu + M^2)g^{\mu\nu} - \partial^\mu\partial^\nu\Big] D_{\nu\lambda}^{(\pm)}(x-x') = \delta_\lambda^\mu \delta^{(4)}(x-x').$$

$\Longrightarrow$ Lösung der inhomogenen Wellengleichung (einsetzen!):

$$W_\nu^\pm(x) = -\frac{g}{\sqrt{2}} \int d^4x' D_{\nu\lambda}^{(\pm)}(x-x') j^{\mp\lambda}(x').$$

Für die Fouriertransformierte der Greenschen Funktion gilt nach Einsetzen in die Wellengleichung:

$$\left[(-q^2 + M^2)g^{\mu\nu} + q^\mu q^\nu\right] \widehat{D}_{\nu\lambda}(q) = \delta^\mu_\lambda.$$

Ansatz zur Lösung der Matrixgleichung:

$$\widehat{D}_{\nu\lambda}(q) = A \cdot g_{\nu\lambda} + B \cdot q_\nu q_\lambda.$$

$$\Longrightarrow A \cdot \left[\delta^\mu_\lambda(-q^2 + M^2) + q^\mu q_\lambda\right] + B \cdot M^2 q^\mu q_\lambda = \delta^\mu_\lambda$$

mit $g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = \delta^\mu_\lambda$.

$$\Longrightarrow A = \frac{-1}{q^2 - M^2}; \quad B = -\frac{A}{M^2} = \frac{1}{(q^2 - M^2)M^2}.$$

$\Longrightarrow$ Propagator für massive Vektorbosonen:

$$\boxed{\widehat{D}^{\mu\nu}(q) = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{-[g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu / M^2]}{q^2 - M^2 + i\varepsilon}}$$

$$\widehat{D}^{\mu\nu} \longmapsto \begin{cases} \dfrac{g^{\mu\nu}}{M^2}; & |q^2| \ll M^2 \\ \dfrac{g^{\mu\nu}}{-q^2}; & |q^2| \gg M^2 \end{cases}.$$

1.8.2.4 Propagator für skalare Spin-0 Bosonen: Higgs-Boson

o.E.: reelles Feld; beschrieben durch die Klein-Gordon-Gleichung:

$$\left(\partial_\mu \partial^\mu + m^2\right) \Phi(x) = -g_f \overline{\psi} \psi$$

mit Yukawa-Wechselwirkung mit Fermionfeld.

Gleichung wie für eine Komponente des elektromagnetischen Feldes, aber mit Masse.

$$\left(\partial_\mu \partial^\mu + m^2\right) G(x - x') = -\delta^{(4)}(x - x');$$

$$\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}(-q^2 + m^2)\widehat{G}(q)e^{-iq(x-x')} = -\frac{d^4q}{(2\pi)^4}e^{-iq(x-x')}.$$

$\Longrightarrow$ Skalarer (Higgs-) Propagator:

$$\boxed{\widehat{G}(q) = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{q^2 - m^2 + i\varepsilon}}$$

1.8.2.5 Berechnung der Übergangsmatrixelemente

mit der Streumatrix S,

$$\psi_s(x) = S \cdot \psi_i(x),$$

ist das Streumatrixelement

$$\begin{aligned}
\langle \psi_f | \psi_s \rangle &= \langle \psi_f | S | \psi_i \rangle =: S_{fi} \equiv \mathcal{M}_{fi} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i) \\
&= \int d^3x \psi_f^\dagger(x) S \psi_i(x) = \int d^3x \psi_f^\dagger(x) \psi_s(x) \\
&= S_{fi}^{(0)} + S_{fi}^{(1)} + S_{fi}^{(2)} + \ldots
\end{aligned}$$

wobei für die gestreute Welle $\psi_s(x)$ die obige Störungsentwicklung durchgeführt wird (einsetzen!).

Im Anfangs (i)- und Endzustand (f) befinden sich wechselwirkungsfreie Zustände (ebene Wellen).

1.8.2.6 Anleitung zum selbst Nachrechnen

Durch Einsetzen der Störungsentwicklung für $\psi_s(x)$ ist mit $\psi_i(x) = \psi^{(0)}(x)$ die Störungsentwicklung für die Streumatrix S_{fi} und damit für das Streumatrixelement (Abkürzung: $\not{A}(x) := \gamma^\mu A_\mu(x)$):

$$
\begin{aligned}
S_{fi}^{(0)} &= \int d^3x \psi_f^\dagger(x)\psi_i(x) = \frac{2E_i}{V}\delta_{fi}\int d^3x = 2E_i\delta_{fi},\\
S_{fi}^{(1)} &= eQ\int d^3x\psi_f^\dagger(x)\int d^4x' K(x-x')\gamma^\mu A_\mu(x')\psi_i(x')\\
&= eQ\int d^4x'\Bigg(\underbrace{\int d^3x\psi_f^\dagger(x)K(x-x')}_{=-i\overline{\psi}_f(x')\ \text{(Rückwärtspropagator)}}\Bigg)\ \not{A}(x')\psi_i(x')\\
&= -ieQ\int d^4x'\overline{\psi}_f(x')\ \not{A}(x')\psi_i(x'),\\
S_{fi}^{(2)} &= e^2Q^2\int d^3x\psi_f^\dagger(x)\\
&\quad .\int\int d^4x''d^4x' K(x-x')\ \not{A}(x'')K(x''-x')\ \not{A}(x')\psi_i(x')\\
&= e^2Q^2\int\int d^4x''d^4x'\\
&\quad \Bigg(\underbrace{\int d^3x\psi_f^\dagger(x)K(x-x'')}_{=-i\overline{\psi}_f(x'')}\Bigg)\ \not{A}(x'')K(x''-x')\ \not{A}(x')\psi_i(x')\\
&= -ie^2Q^2\int\int d^4x''d^4x'\\
&\quad .\ \overline{\psi}_f(x'')\ \not{A}(x'')K(x''-x')\ \not{A}(x')\psi_i(x').
\end{aligned}
$$

1.8.2.7 Wechselwirkung zwischen Fermionen und Photonen

Einlaufende Fermionen (1: Elektron e^-, 2: Fermion f):

$\psi_{i1}(x) = u(p_1)e^{-ip_1x}\ (Q)$, $\psi_{i2}(x) = u(p_2)e^{-ip_2x}\ (Q_f)$.

Auslaufende Fermionen (1: Elektron e^-, 2: Fermion f):

$\overline{\psi}_{f1}(x) = \overline{u}(p_3)e^{ip_3x}\ (Q)$, $\overline{\psi}_{f2}(x) = \overline{u}(p_4)e^{ip_4x}\ (Q_f)$.

Lösung der elektromagnetischen Wellengleichung mit Qellen:

$$A_\mu(x) = -e\int d^4x' D_{\mu\nu}(x-x')j^\nu_{\text{el.magn.}}(x').$$

Der elektromagnetische Strom der Photonen emittierenden Fermionen f (Quelle des auf die Elektronen wirkenden el.magn. Feldes) ist in niedrigster Ordnung (freie Fermionen):

$$j^\mu_{el.magn.}(x) = Q_f\overline{\psi}_{f2}(x)\gamma^\mu\psi_{i2}(x) = Q_f\overline{u}(p_4)\gamma^\mu u(p_2)e^{i(p_4-p_2)x}.$$

Mit dem Photonpropagator erhält man:

$$\begin{aligned}
&. \quad A_\mu(x) = \\
&= -eQ_f\int d^4x'\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{-g_{\mu\nu}}{q^2+i\varepsilon}e^{i(p_4-p_2+q)x'}e^{-iqx}\overline{u}(p_4)\gamma^\nu u(p_2) \\
&= -eQ_f\int d^4q\,\delta^{(4)}(p_4-p_2+q)\frac{-g_{\mu\nu}}{q^2+i\varepsilon}e^{-iqx}\overline{u}(p_4)\gamma^\nu u(p_2)
\end{aligned}$$

Elektromagnetische Fermion-Fermion-WW mit Photonaustausch in niedrigster Störungsordnung:

Einsetzen der Näherung für das Photon-Feld in

$$
\begin{aligned}
S_{fi}^{(1)} &= -ieQ \int d^4x' \overline{\psi}_{f1}(x') \gamma^\mu \psi_{i1}(x') A_\mu(x') \\
&= ie^2 Q Q_f \int d^4x' \overline{u}(p_3) \gamma^\mu u(p_1) e^{i(p_3 - p_1 - q)x} \\
&\cdot \left(\int d^4q \delta^{(4)}(p_4 - p_2 + q) \frac{-g_{\mu\nu}}{q^2 + i\varepsilon} \right) \overline{u}(p_4) \gamma^\nu u(p_2) \\
&= ie^2 Q Q_f (2\pi)^4 \int d^4q \overline{u}(p_3) \gamma^\mu u(p_1) \delta^{(4)}(p_4 - p_2 + q) \\
&\cdot \frac{-g_{\mu\nu}}{q^2 + i\varepsilon} \overline{u}(p_4) \gamma^\nu u(p_2) \underbrace{\int \frac{d^4x'}{(2\pi)^4} e^{i(p_3 - p_1 - q)x}}_{= \delta^{(4)}(p_3 - p_1 - q)} \\
S_{fi}^{(1)} &= ie^2 Q Q_f (2\pi)^4 \int d^4q \delta^{(4)}(p_4 - p_2 + q) \delta^{(4)}(p_3 - p_1 - q) \\
&\cdot \overline{u}(p_3) \gamma^\mu u(p_1) \frac{-g_{\mu\nu}}{q^2 + i\varepsilon} \overline{u}(p_4) \gamma^\nu u(p_2) \\
&= -ie^2 Q Q_f (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_4 - p_2 + p_3 - p_1) \\
&\cdot \overline{u}(p_3) \gamma^\mu u(p_1) \frac{1}{q^2} \overline{u}(p_4) \gamma_\mu u(p_2) \\
&= \mathcal{M}_{fi} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_4 - p_2 + p_3 - p_1)
\end{aligned}
$$

mit dem Impulsübertrag $q^2 = (p_3 - p_1)^2$ (Impulserhaltung).

1.8.2.8 Fermion-Fermion-Streuung:

Das Übergangsmatrixelement $\mathcal{M}_{fi}$ für elektromagnetische Fermion (Elektron e)-Fermion (f)-Streuung unter Austausch eines ("virtuellen") Photons ist demnach:

$$\mathcal{M}_{fi} = -ie^2 Q_e Q_f \overline{u}_e(p_3)\gamma_\mu u_e(p_1)\frac{1}{q^2}\overline{u}_f(p_4)\gamma^\mu u_f(p_2)$$

in 1. Ordnung der Störungsrechnung, 2. Ordnung in eQ bzw. 1. Ordnung in der Feinstrukturkonstanten $\alpha \equiv e^2/4\pi \approx 1/137$

$(\sigma(e^- f \to e^- f) \sim |\mathcal{M}_{fi}|^2 \sim e^4 Q_e^2 Q_f^2 \sim \alpha^2)$

und mit $q^2 = (p_3 - p_1)^2 \approx -2p_1 p_3 = -4E_1 E_3 \sin^2(\theta/2)$ bei Vernachlässigung der Fermion-Massen; θ = Streuwinkel.

1.8.2.9 Elektron-Positron-Vernichtung

Nach den Feynman-Regeln ist das QED-Übergangsmatrixelement für die Elektron-Positron-Vernichtung unter Erzeugung eines Fermion-Antifermion-Paars (Erzeugung neuer Materie an e^+e^--Speicherringen):

$$\mathcal{M} = -ie^2 Q_e Q_f \overline{v}_e(p_2)\gamma_\mu u_e(p_1)\frac{1}{q^2}\overline{u}_f(p_3)\gamma^\mu v_f(p_4)$$

mit $q^2 = (p_1 + p_2)^2 =: s = E^2_{CMS}$ (Schwerpunktsenergie).

Im Schwerpunktsystem gilt: $\sqrt{s} = 2E_e$.

1.8.3 Wirkungsquerschnitte und Zerfallswahrscheinlichkeiten (Formelsammlung)

Übergangswahrscheinlichkeit pro Raum- und Zeiteinheit ("Goldene Regel"):

$$dw = |S_{fi}|^2 \rho(E_f) dE_f/(V_0 \cdot T).$$

Dabei ist bei Begrenzung der WW auf V_0, T:

$$|S_{fi}|^2 = |M_{fi}|^2 \cdot V_0 \cdot T \cdot (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i)$$

und $\rho(E_f)$ die Zustandsdichte im Endzustand.

Differentieller Wirkungsquerschnitt für die 2-Körper-Reaktion $a+b \to c+d$ (mit $p_1+p_2 = p_3+p_4$, $s := (p_1+p_2)^2 = E^2_{CMS}$):

$$d\sigma = dw/j_{\text{ein}}$$

mit der einlaufenden Teilchenstromdichte (Lorentz-invariant):

$$\begin{aligned} j_{\text{ein}} &= |\vec{v}_{ab}| \frac{2E_1}{V}\frac{2E_2}{V} = \frac{4}{V^2}[(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{4}{V^2} E_{CMS} |\vec{p}_a^{\,CMS}|. \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \boxed{d\sigma = \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{j_{\text{ein}}} d\text{Lips}}$$

mit dem Lorentz-invarianten Phasenraumelement (Zustandsdichte im Endzustand):

$$d\text{Lips} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_3 + p_4 - p_1 - p_2) \frac{V}{2E_3} \frac{d^3p_3}{(2\pi)^3} \frac{V}{2E_4} \frac{d^3p_4}{(2\pi)^3}.$$

Zerfallsbreite für n-Körperzerfall $a \to 1, ..., n$:

$$\boxed{d\Gamma = \frac{|\mathcal{M}|^2}{2E_a} d\text{Lips}}$$

mit

$$d\text{Lips} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i) \prod_{j=1}^{n} \frac{V}{2E_j} \frac{d^3p_j}{(2\pi)^3}.$$

$\Gamma = \int d\Gamma = \frac{1}{\tau}$.

Das Normierungsvolumen V kürzt sich!

1.8.4 Wechselwirkungsprozesse im Standardmodell

1.8.4.1 Feynman-Regeln

Regeln zur Berechnung der Streumatrixelemente $\mathcal{M}$ in der Stöhrungstheorie, die sich durch die sog. Feynman-Diagramme veranschaulichen lassen.

Faktoren im Streumatrixelement $\mathcal{M}$ für beliebige Streuprozesse bzw. Teichenzerfälle: mit Integration über die 4-Impulse der virtuellen Teilchen ($p^2 \neq m^2$) im Zwischenzustand:

QED:

Ein- (auslaufendes) Fermion: $u_s(p)$ $(\overline{u}_s(p))$

Ein- (auslaufendes) Anti-Fermion: $v_s(p)$ $(\overline{v}_s(p))$

Ein- (auslaufendes) reelles Photon: $\varepsilon_\mu(k;\lambda)$ $(\varepsilon^*_\mu(k;\lambda))$

Virtuelles (intermediäres) Photon: $-i\dfrac{g_{\mu\nu}}{q^2+i\varepsilon}$

Virtuelles Fermion (Propagator): $i\dfrac{\not{p}+m}{p^2-m^2+i\varepsilon}$

Fermion-Photon-Vertex: $-ieQ_f\gamma^\mu(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_f-p_i-q)$

QCD:

Quark-Gluon-Vertex: $-i\frac{g_s}{2}\lambda^a_{\alpha\beta}\gamma^\mu(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_f-p_i-q)$

Elektroschwache Wechselwirkung:

Ein- (auslaufendes) Z^0-, $W^\pm$-Boson: $\varepsilon_\mu(k;\lambda)$ $(\varepsilon^*_\mu(k;\lambda))$

Virtuelles Z^0-, $W^\pm$-Boson: $$-i\frac{g_{\mu\nu}-q_\mu q_\nu/M^2}{q^2-M^2+i\varepsilon}$$

Virtuelles Higgs–Boson: $$\frac{i}{q^2-M_H^2+i\varepsilon}$$

Fermion-Higgs-Boson-Vertex:

$$-i\frac{m_f}{v}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_f-p_i-q)$$

Fermion-$W^\pm$-Vertex:

$$-i\frac{g}{2\sqrt{2}}\gamma^\mu(1-\gamma_5)(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_f-p_i-q)$$

Fermion-Z^0-Vertex:

$$-i\frac{g}{2\cos\theta_W}\gamma^\mu[c_L^f(1-\gamma_5)+c_R^f(1+\gamma_5)](2\pi)^4\delta^{(4)}(p_f-p_i-q)$$

Schwache NC-Kopplungskonstanten:

$$\text{Links}: \ \mathrm{c_L^f}=\mathrm{I_f^3}-\mathrm{Q_f}\sin^2\theta_\mathrm{W}; \quad \text{rechts}: \mathrm{c_R^f}=-\mathrm{Q_f}\sin^2\theta_\mathrm{W};$$

$$\text{Vektor}: \ \mathrm{v_f}=\mathrm{c_L^f}+\mathrm{c_R^f}=\mathrm{I_f^3}-2\mathrm{Q_f}\sin^2\theta_\mathrm{W};$$

$$\text{Axialvektor}: \ \mathrm{a_f}=\mathrm{c_L^f}-\mathrm{c_R^f}=\mathrm{I_f^3}.$$

$$\overline{u}\gamma^\mu c_L^f(1-\gamma_5)+c_R^f(1+\gamma_5)u=\overline{u}\gamma^\mu(v_f-a_f\gamma_5)u.$$

1.8.4.2 Selbstwechselwirkung der Eichbosonen

Freie nicht-Abelsche $SU(2) \times U(1)$-Eichfelder:

$$\vec{W}_\mu, B_\mu \longrightarrow W^\pm_\mu, Z^0_\mu, A_\mu$$

mit der Lagrangedichte $(i = 1, ..., 3)$

$$\mathcal{L}^{\text{frei}}_{SU(2)} = -\frac{1}{4} F^i_{\mu\nu} F^{i\mu\nu}$$

mit

$$F^i_{\mu\nu} = \partial_\nu W^i_\mu - \partial_\mu W^i_\nu + g\varepsilon^{ijk} W^j_\mu W^k_\nu$$

oder kurz:

$$\vec{F}_{\mu\nu} = \partial_\nu \vec{W}_\mu - \partial_\mu \vec{W}_\nu + g\vec{W}_\mu \times \vec{W}_\nu.$$

Die zugehörige Bewegungsgleichung nach dem Lagrange-Formalismus ist:

$$\partial_\mu \partial^\mu \vec{W}_\nu - \partial_\nu (\partial^\mu \vec{W}_\mu) = \vec{J}_\nu,$$

eine Wellengleichung für jede Komponente (ohne Lorentz-Eichung) mit neuem Selbstwechselwirkungsterm (Quellterm)

$$\begin{aligned} \vec{J}_\nu &= -g\vec{W}^\mu \times \vec{F}_{\mu\nu} \\ &= -g\left[\vec{W}^\mu \times \partial_\mu \vec{W}_\nu - \vec{W}^\mu \times \partial_\nu \vec{W}_\mu\right] + g^2 \vec{W}^\mu \times \left(\vec{W}_\mu \times \vec{W}_\nu\right), \end{aligned}$$

d.h. $\mathcal{L}_{\text{Selbst}-\text{WW}} = \vec{J}_\mu \vec{W}^\mu$.

$\Longrightarrow$ 3- und 4-Eichbosonkopplung ($\sim g$ bzw. $\sim g^2$).

Ebenso die Selbstwechselwirkung der Gluonen (QCD), die für das Confinement der Quarks in den Hadronen verantwortlich ist:

1.8.4.3 Higgs-Eichboson-Wechselwirkung

$$\mathcal{L}_{WW} = \frac{g^2}{8} \cdot (H^2 + 2vH)\left[2W_\mu^+ W^{\mu-} + \frac{1}{\cos^2\theta_W} Z_\mu^0 Z^{\mu 0}\right]$$

1.8.4.4 Selbstwechselwirkung des Higgs-Bosons

$$\mathcal{L}_{WW} = -\lambda v H^3 - \frac{\lambda}{4} H^4$$

1.8.4.5 Prozesse höherer Ordnung in der Störungstheorie

1.8.4.5.1 QED-Prozesse

1.8.4.5.2 QCD-Prozesse (Quark-Wechselwirkung)

1.8.4.5.3 Strahlungskorrekturen

1.8.4.5.4 QCD-Korrekturen

1.8.4.5.5 Schwache Prozesse

1.8.5 Prozesse der schwachen Wechselwirkung
Beispiel: Schwache Neutrino-Elektron-Streuung:

CC-Prozeß: $\nu_\mu e^- \longrightarrow \mu^- \nu_e$

(verwandt mit dem schwachen Myonzerfall: $\mu^- \to e^- \nu_\mu \overline{\nu_e}$):

Das Übergangsmatrixelement ist:

$$\mathcal{M} = i\frac{g^2}{2} \cdot [\overline{u}_\mu(p_3)\gamma^\mu \frac{1-\gamma_5}{2} u_{\nu_\mu}(p_1)] \underbrace{\frac{-g_{\mu\nu} + q_\mu q_\nu / M_w^2}{q^2 - M_W^2}}_{\longrightarrow \frac{1}{M_W^2} \text{ f.} |q|^2 \ll M_W^2}$$

$$\cdot [\overline{u}_{\nu_e}(p_4)\gamma^\nu \frac{1-\gamma_5}{2} u_e(p_2)]$$

geht in der Näherung kleiner Impulsüberträge $|q|^2 \ll M_W^2$ (wie beim Myonzerfall), d.h. sehr kurze Reichweite der Feldquanten, über in das Matrixelement für die Fermi'sche 4-Fermion-Punktwechselwirkung oder schwache Strom-Strom-Wechselwirkung (kein Propagator für Austauschteilchen):

$$\mathcal{M} = i\frac{G_F}{\sqrt{2}}[\overline{u}_\mu(p_3)\gamma^\mu(1-\gamma_5)u_{\nu_\mu}(p_1)][\overline{u}_{\nu_e}(p_4)\gamma_\mu(1-\gamma_5)u_e(p_2)]$$

mit der schwachen Fermi-Kopplungskonstanten G_F.

Präzisionmessung der Fermi-Konstanten aus der Myon-Lebensdauer

$$\tau_\mu = \frac{1}{\Gamma_\mu} = \frac{192\pi^3}{G_F^2 m_\mu^5} :$$

$$\Longrightarrow G_F = (1.16639 \pm 0.00002) \cdot 10^{-5}\ \mathrm{GeV}^{-2}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{g^2}{8M_W^2} = \frac{G_F}{\sqrt{2}}}$$

Erklärt die Schwachheit der schwachen Wechselwirkung bei niedrigen Energien trotz

$$g = \frac{e}{\sin\theta_W} \geq e :$$

Wenn M_W groß ist, ist G_F klein.

Nach der SSB gelten die Beziehungen

$$M_W \equiv \frac{gv}{2} = \left(\frac{g^2\sqrt{2}}{8G_F}\right)^{1/2} = \frac{g}{2}(\sqrt{2}G_F)^{-1/2}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow v &= (\sqrt{2}G_F)^{-1/2} = 246 \text{ GeV} = \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}, \\ \Longrightarrow \Phi_0 &= \frac{v}{\sqrt{2}} = 174 \text{ GeV}, \end{aligned}$$

der Energieskala (d.h. Temperaturskala, $E = kT$) der elektroschwachen Symmetriebrechung (Phasenübergang).

$$\begin{aligned} \Longrightarrow M_W &= \frac{ev}{2\sin\theta_W} \\ M_W^2 &= \frac{e^2}{4\sqrt{2}G_F \sin^2\theta_W} \equiv \frac{\pi\alpha}{\sqrt{2}G_F \sin^2\theta_W} \\ &= \frac{(37.3 \text{ GeV})^2}{\sin^2\theta_W}. \end{aligned}$$

Experimentell (Fermion-Paarproduktion in e^+e^--Vernichtung bei LEP/CERN, νN-Streuung):

$$\begin{aligned} \sin^2\theta_W(E = M_Z) &= 0.23136 \pm 0.00015 \\ \Longrightarrow M_W &\approx 78 \text{ GeV} \\ \Longrightarrow M_Z &= \frac{M_W}{\cos\theta_W} \approx 89 \text{ GeV} \end{aligned}$$

(Vorhersagen der GSW-Theorie in niedgrigster Ordnung der Störungstheorie).

Experimentell (Z- und W-Bosonerzeugung in der e^+e^--Vernichtung bei LEP und SLD und in der $p\overline{p}$-Vernichtung am Tevatron/FNAL):

$$\begin{aligned} M_Z &= 91.1875 \pm 0.0021 \text{ GeV}, \\ M_W &= 80.451 \pm 0.033 \text{ GeV}. \end{aligned}$$

Übereinstimmung mit den theoretischen Vorhersagen mit hoher Präzision, wenn elektroschwache Strahlungskorrekturen (Prozesse höherer Ordnung der Störungstheorie der elektroschwachen WW).

$\Longrightarrow$ Die am besten geprüfte physikalische Theorie.

Inputparameter der Theorie:

$$g,\ g',\ v,\ g_f.$$

Alternativ (experimentell am besten bestimmt):

$$\alpha(E = M_Z),\ G_F,\ \sin^2\theta_W \text{ oder } M_Z,\ m_f.$$

Die Masse des Higgs-Bosons

$$M_H = \sqrt{-2\mu^2} = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \cdot v$$

und die Massen der Fermionen

$$m_f = \frac{g_f v}{\sqrt{2}}$$

lassen sich im Standardmodell nicht vorhersagen.

1.8.6 Renormierung der Kopplungskonstanten

Fundamentales Problem bei der störungstheoretischen Berechnung von Observablen in der relativistischen Feldtheorie mit elementaren Punktteilchen als Trägern der Ladungen:

Divergenzen bei hohen Impulsüberträgen $\rightarrow \infty$, d.h. kleinen Abständen $\rightarrow 0$ in Diagrammen höherer Ordnung (Schleifendiagramme), die über die Prozesse niedrigster Ordnung (Baum-Graphen) hinausgehen (sog. UV-Divergenzen).

Problem behebbar durch das Renormierungsprogramm (effektive Ladungen und Massen in Anwesenheit von quantenmechanischen Vakuumfluktuationen) für renormierbare Feldtheorien.

Erfolg der QED aufgrund ihrer Eigenschaft der Renormierbarkeit.

Auch Nicht-Abelsche Eichtheorien (auch mit SSB) sind renormierbar (t'Hooft, Veltman 1971).

1.8.6.1 Beispiel aus der QED: Vakuumpolarisation bei der $e^- p$-Coulomb-Streuung

Die QED-Beiträge höherer Ordnung führen zu einer effektiven Modifikation des Photon-Propagators, die die **Form** des Resultats niedrigster Ordnung unverändert läßt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}^{(1)} &= e_0^2 \overline{u}_e(p_3)\gamma^\mu u)e(p_1)\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}\overline{u}_p(p_4)\gamma^\nu u_p(p_2); \\
\mathcal{M}^{(2)} &= e_0^2 \overline{u}_e(p_3)\gamma^\mu u)e(p_1)\left[\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}\right. \\
&\cdot \quad Q_f^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left(ie_0\gamma^\nu \frac{i(\not{k}+m)}{k^2-m^2} ie_0\gamma^\rho \frac{i(\not{q}-\not{k}+m)}{(q-k)^2-m^2}\right) \\
&\cdot \quad \left.\frac{-ig_{\rho\sigma}}{q^2}\right]\overline{u}_p(p_4)\gamma^\sigma u_p(p_2).
\end{aligned}$$

(Summe über alle Fermionen und $W^\pm$ in der Schleife, gewichtet mit Ladung und Masse/einfallende Energie).

Das Integral über $d^4k = k^2 dk d\Omega_k dk_0$, $k = |\vec{k}|$, divergiert für $k \to \infty$.

Deshalb willkürliche Integrationsgrenze beim sog. Abschneideparameter $k = \Lambda$.

Dann ist für $q^2 \to 0$ ($|Q_f| = 1$):

$$\mathcal{M}^{(1)} + \mathcal{M}^{(2)} = e_0^2 \left[1 - \frac{\alpha_0}{3\pi} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) \right] \frac{\mathcal{M}^{(1)}}{e_0^2}.$$

Höhere Schleifenordnungen $n = 2, ..., \infty$ ("leading log"-Strahlungskorrekturen) wiederholen sich in der Korrektur zum Photon-Propagator in einer geometrischen Reihe, die exakt aufsummiert werden kann, d.h.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}^{(n)} &= e_0^2 \left[1 - \frac{\alpha_0}{3\pi} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) - \left(\frac{\alpha_0}{3\pi} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) \right)^2 + ... \right] \frac{\mathcal{M}^{(1)}}{e_0^2} \\ &= \frac{e_0^2}{1 + \frac{\alpha_0}{3\pi} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right)} \cdot \frac{\mathcal{M}^{(1)}}{e_0^2} \end{aligned}$$

In einer fundamentalen Theorie (gültig für alle $k \to \infty$) soll das Endresultat unabhängig vom Abschneideparameter Λ sein.

Interpretation des Resultats:

Im Streuprozeß wird die effektive (renormierte) elektr. Ladung ($\alpha = e^2/4\pi$)

$$\alpha_R(m_e^2) = \alpha = \frac{\alpha_0}{1 + \frac{\alpha_0}{3\pi} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m_e^2}\right)} =: Z_3 \cdot \alpha_0$$

gemessen.

Für $q^2 \to 0$ ist dies die Elementarladung $e = e_R(m_e^2)$ bzw. die Feinstrukturkonstante $\alpha_R(q^2 = m_e^2) = \alpha \approx \frac{1}{137}$, gemessen in der Coulomb-Streuung bei sehr niedrigen Energien (Atomphysik).

Die (sehr langsame, log) Divergenz in der Renormierungskonstanten Z_3 für $\Lambda \to \infty$ wird durch die "nackte" Ladung e_0 kompensiert.

Für $|q^2| \gg m_e^2$ gilt:

$$\begin{aligned}
\alpha_R(q^2) &= \frac{\alpha_0(\Lambda^2)}{1 + \frac{\alpha_0}{3\pi} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m_e^2}\right) - \frac{\alpha_0}{3\pi} \ln\left(\frac{-q^2}{m_e^2}\right)} \\
&= \frac{\alpha_0(\Lambda^2)}{\left[1 + \frac{\alpha_0}{3\pi} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m_e^2}\right)\right]\left[1 - \frac{\alpha_R(m_e^2)}{3\pi} \ln\left(\frac{-q^2}{m_e^2}\right)\right]} \\
&= \frac{\alpha_R(m_e^2)}{1 - \frac{\alpha_R(m_e^2)}{3\pi} \ln\left(\frac{-q^2}{m_e^2}\right)}.
\end{aligned}$$

Allgemein ist die q^2-Abhängigkeit der el.magn. Kopplung ("laufende" Kopplungskonstante):

$$\begin{aligned}
\alpha_R(q^2) &= \frac{\alpha_R(q_0^2)}{1-\frac{\alpha_R(q_0^2)}{3\pi}\ln\left(\frac{q^2}{q_0^2}\right)}. \\
&\xrightarrow{\text{alle } f} \frac{\alpha_R(q_0^2)}{1-\sum_f N_C^f Q_f^2 \frac{\alpha_R(q_0^2)}{3\pi}\ln\left(\frac{q^2}{q_0^2}\right)}.
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Sehr langsame Entwicklung (log): $\alpha(M_Z^2) = 1/128.9$.

Kleiner Beitrag zum Lamb-shift in der Atomphysik.

$\Longrightarrow$ Abschirmung der "nackten" elektrischen Ladung bei großen Abständen (d.h. kleinen Impulsüberträgen) durch die polarisierten Vakuumfluktuationen (virtuelle $f\bar{f}$-Paare mit Lebensdauer $\Delta t \approx \hbar/2m_f$) wie in einem polarisierbaren Medium mit Permeabilität $\varepsilon > 1$.

1.8.6.2 Die starke Kopplungskonstante der QCD

Vakuumpolarisation in der Quark-Quark-Streuung mit Gluon-Austausch:

$\Longrightarrow q^2$-Abhängigkeit der starken Kopplungskonstante $\alpha_s = \frac{g_s}{4\pi}$:

Beitrag der inneren Quark-Schleifen in Analogie zur QED mit $e^2 \to g_s^2 Sp\left(\frac{\lambda^a}{2}\frac{\lambda^b}{2}\right) = g_s^2\frac{\delta^{ab}}{2}$:

$$[\alpha_s(q^2)]_{q\bar{q}} = \frac{\alpha_s(q_0^2)}{1 - N_q\frac{\alpha_s(q_0^2)}{6\pi}\ln\left(\frac{q^2}{q_0^2}\right)}.$$

Beitrag der Gluon-Schleifen:

$$[\alpha_s(q^2)]_{gg} = \frac{\alpha_s(q_0^2)}{1 + 11\frac{\alpha_s(q_0^2)}{4\pi}\ln\left(\frac{q^2}{q_0^2}\right)}.$$

Zusammen (additive Beiträge):

$$\begin{aligned}\alpha_s(q^2) &= \frac{\alpha_s(q_0^2)}{1 + (33 - 2N_q)\frac{\alpha_s(q_0^2)}{12\pi}\ln\left(\frac{q^2}{q_0^2}\right)} \\ &= \frac{12\pi}{(33 - 2N_q)\ln\left(\frac{q^2}{\Lambda_{QCD}^2}\right)}\end{aligned}$$

mit der Definition des QCD-Skalenparameters (aus der Störungstheorie) $\Lambda_{QCD}^2 = q_0^2 e^{-(C\alpha_s(q_0^2))^{-1}}$ mit $C = (33 - 2N_q)/12\pi$, der experimentell bestimmt werden muß (äquivalent zur Messung von $\alpha_s(q_0^2)$).

(gültig nur für $q^2 \gg \Lambda_{QCD}$: Störungstheorie anwendbar).

$\Longrightarrow$ Für $N_q \leq 16$ nimmt die starke Kopplungskonstante mit wachsendem q^2 schnell ab:

$$\alpha_s(q^2) \mapsto 0 \ \text{ für } \ |q^2| \to \infty,$$

$\Longrightarrow$ sog. "asympthotische Freiheit" der Quarks und Gluonen bei hohen Impulsüberträgen bzw. kurzen Abständen, in den farbneutralen Bindungszuständen der Hadronen ($d < 10^{-15}$ m $\approx$ Größe des Protons).

Effekt der überwiegenden Gluon-Vakuumpolarisation (nicht-Abelsche farbgeladene Eichbosonen): Anti-Abschirmung der Farbladung.

Zahlreiche Messungen der starken Kopplungskonstanten (aus hadronischen Wirkungsquerschnitten) ergeben:

$$\alpha_s(M_Z^2) = 0.118 \pm 0.002.$$

$\Longrightarrow$ Bei großen q^2 ist die Störungstheorie in der QCD anwendbar;

im Gegensatz zu kleinen $q^2 \leq \Lambda_{QCD}$ bzw. großen Abständen zwischen den Quarks, bei denen die starke Kopplungskonstante große Werte annimmt, d.h. keine Stöhrungstheorie:

Confinement der Quarks und Gluonen in Hadronen;

Fragmentation von Quarks und Gluonen in farbneutrale Hadronen.