1.5 Vergleich von Theorie und Experiment

1.5.1 Störungstheorie und Feynman-Diagramme

Zur Berechnung von Übergangsamplituden $\langle f|\psi(t)\rangle$ für Zerfallswahrscheinlichkeiten und Wirkungsquerschnitte.

Einfachste Methode (nach Feynman):

Iterative Lösung der klassischen Feldgleichungen, mit Wechselwirkungsterm als Störung zu den freien Feldgleichungen, unter Benutzung der Methode der Greenschen Funktion.

1.5.1.1 Bekanntes Beispiel: Elektrostatik

Poisson-Gleichung für skalares elektrostatisches Potential $\phi(\vec{x})$:

$$\vec{\nabla}^2\Phi(\vec{x}) = -\rho(\vec{x}).$$

Lösung für Punktladung am Ort $\vec{x}'$: $\rho(\vec{x}) = q\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}')$:

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|} \quad (\mathrm{Coulomb-Potential}).$$

Für eine allgemeine Ladungsverteilung $\rho(\vec{x}')$ ist die Lösung offensichtlich:

$$\Phi(\vec{x}) = \int \frac{\rho(\vec{x}')}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|}d^3x' =: \int G(\vec{x}-\vec{x}')\rho(\vec{x}')d^3x'$$

mit der sog. Greenschen Funktion

$$G(\vec{x},\vec{x}') = G(\vec{x}-\vec{x}') = \frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

die eine Lösung der Poisson-Gleichung ist für eine Einheitspunktladung am Ort $\vec{x}'$ (Definition):

$$\vec{\nabla}_x^2 G(\vec{x},\vec{x}') = -\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}').$$

1.5.1.2 Anwendung auf Eichfeldtheorien: Elektromagnetische WW von Fermionen (QED)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{QED}_{\text{Fermion}} &= \overline{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi \\
&= \overline{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - eQ\overline{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \\
&= \overline{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - ej^\mu A_\mu .
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow$ Feldgleichung nach dem Lagrange-Formalismus:

$$
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \overline{\psi}} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \overline{\psi})} \right) = 0
$$

ist die Dirac-Gleichung

$$
(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = eQ\gamma^\mu A_\mu(x)\psi(x)
$$

mit elektromagnetischem Kopplungsterm:

eine inhomogene Differentialgleichung, die i.a. nicht analytisch lösbar ist, d.h. iterative Lösung mit inhomogenem Wechselwirkungsterm als Störung.

Ansatz für die Greensche Funktion:

$$
(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)K(x - x') = \delta^{(4)}(x - x') \cdot 1.
$$

Mit der Lösung $\psi^{(0)}(x)$ der homogenen freien Dirac-Gleichung, $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi^{(0)}(x) = 0$

ist damit die allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl.:

$$\underline{\psi(x)} = \psi^{(0)}(x) + eQ \int d^4x' K(x - x')\gamma^\mu A_\mu(x')\underline{\psi(x')}.$$

Die Integralgleichung kann iterativ gelöst werden:

0. Näherung: $\psi^{(0)}(x) \longrightarrow$ einsetzen in RS.

1. Näherung:

$$\psi^{(1)}(x) = \psi^{(0)}(x) + eQ \int d^4x' K(x - x')\gamma^\mu A_\mu(x')\underline{\psi^{(0)}(x')};$$

$\longrightarrow$ einsetzn in RS.

2. Näherung:

$$\psi^{(2)}(x) = \psi^{(0)}(x) + eQ \int d^4x' K(x - x')\gamma^\mu A_\mu(x')\psi^{(0)}(x')$$

$$+e^2Q^2 \int\int d^4x'' d^4x' \quad K(x - x'') \quad \gamma^\mu A_\mu(x'') \quad K(x'' - x') \quad \gamma^\mu A_\mu(x')\psi^{(0)}(x').$$

Störungsentwicklung nach Potenzen des WW-Terms $\sim e$.

Fouriertransformation der Greenschen Funktion,

$$K(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \widehat{K}(p) e^{-ip(x-x')},$$

ergibt bei Einsetzen in die Dirac-Gleichung:

$$\begin{aligned}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) K(x-x') &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p (\not{p} - m) \widehat{K}(p) e^{-ip(x-x')} \\ \equiv \delta^{(4)}(x-x') \cdot 1 &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ip(x-x')} \cdot 1,\end{aligned}$$

d.h. $(\not{p} - m)\widehat{K}(p) = 1$, mit $\not{p} := \gamma^\mu p_\mu = \gamma^0 p_0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{p}$ etc.

$$\Longrightarrow (\not{p} + m)(\not{p} - m)\widehat{K}(p) = (p^2 - m^2)\widehat{K}(p) \equiv (\not{p} + m) \cdot 1$$

$\Longrightarrow$ “Fermion-Propagator”

$$\boxed{\widehat{K}(p) = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}}$$

mit Integrationsregel für das Fourierintegral der räumlichen Greenschen Funktion in der komplexen Ebene:

Konvergente Lösungen für Wellen mit positiver Energie (Teilchen), die sich in positiver Zeitrichtung ($t > t'$) ausbreiten und für Wellen mit negativer Energie (Antiteilchen), die sich in negativer Zeitrichtung ausbreiten ($t < t'$). $\longrightarrow$ Feynman-Bild.

1.5.1.3 Berechnung der Übergangsmatrixelemente

mit der Streumatrix S,

$$\psi_s(x) = S \cdot \psi_i(x),$$

ist das Streumatrixelement

$$\begin{aligned}
\langle\psi_f|\psi_s\rangle &= \langle\psi_f|S|\psi_i\rangle =: S_{fi} \equiv \mathcal{M}_{fi}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_f - p_i) \\
&= \int d^3x\psi_f^\dagger(x)S\psi_i(x) = \int d^3x\psi_f^\dagger(x)\psi_s(x) \\
&= S_{fi}^{(0)} + S_{fi}^{(1)} + S_{fi}^{(2)} + \ldots
\end{aligned}$$

wobei für die gestreute Welle $\psi_s(x)$ die obige Störungsentwicklung durchgeführt wird (einsetzen!).

Im Anfangs (i)- und Endzustand (f) befinden sich wechselwirkungsfreie Zustände (ebene Wellen).

1.5.1.4 Wirkungsquerschnitte und Zerfalls-wahrscheinlichkeiten

Übergangswahrscheinlichkeit pro Raum- und Zeiteinheit ("Goldene Regel"):

$$dw = |S_{fi}|^2 \rho(E_f) dE_f / (V_0 \cdot T).$$

Dabei ist bei Begrenzung der WW auf V_0, T:

$$|S_{fi}|^2 = |M_{fi}|^2 \cdot V_0 \cdot T \cdot (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i)$$

und $\rho(E_f)$ die Zustandsdichte im Endzustand.

Differentieller Wirkungsquerschnitt für die 2-Körper-Reaktion $a+b \to c+d$ (mit $p_1+p_2 = p_3+p_4$, $s := (p_1+p_2)^2 = E^2_{CMS}$):

$$d\sigma = dw / j_{\text{ein}}$$

mit der einlaufenden Teilchenstromdichte (Lorentz-invariant):

$$\begin{aligned} j_{\text{ein}} &= |\vec{v}_{ab}| \frac{2E_1}{V} \frac{2E_2}{V} = \frac{4}{V^2}[(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{4}{V^2} E_{CMS} |\vec{p}_a^{\,CMS}|. \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \boxed{d\sigma = \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{j_{\text{ein}}} d\text{Lips}}$$

mit dem Lorentz-invarianten Phasenraumelement (Zustandsdichte im Endzustand):

$$d\text{Lips} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_3 + p_4 - p_1 - p_2) \frac{V}{2E_3} \frac{d^3p_3}{(2\pi)^3} \frac{V}{2E_4} \frac{d^3p_4}{(2\pi)^3}.$$

Zerfallsbreite für n-Körperzerfall $a \to 1, ..., n$:

$$\boxed{d\Gamma = \frac{|\mathcal{M}|^2}{2E_a} d\text{Lips}}$$

mit

$$d\text{Lips} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i) \prod_{j=1}^{n} \frac{V}{2E_j} \frac{d^3p_j}{(2\pi)^3}.$$

$\Gamma = \int d\Gamma = \frac{1}{\tau}$.

Das Normierungsvolumen V kürzt sich!