

1.4 Ursprung der Massen der Elementarteilchen

- Nur ein masseloses Spin-1 Teilchen beobachtet: Photon
→ $U(1)_Q$ -Eichsymmetrie.
- Die schwache Wechselwirkung ist kurzreichweitig.
⇒ schwere Feldquanten.
- Explizite Massenterme für Eichbosonen (Proca-Gleichung) verletzen die lokale Eichsymmetrie der Lagrange-Funktion, explizite Massenterme für die Fermionen (Dirac-Gleichung) brechen die globale $SU(2)_L$ -Eichsymmetrie.
- Die Eichsymmetrie ist aber verantwortlich und notwendig für die Aufhebung von Divergenzen in jeder Ordnung der Störungstheorie, d.h. die Renormierbarkeit der elektroschwachen Theorie (wie in der QED).

Ausweg:

Sog. **spontane Brechung der Symmetrie des Grundzustands (des Vakuums der Feldtheorie)**,

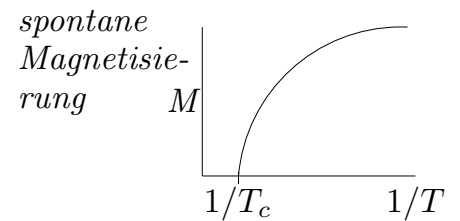
während die volle Eichsymmetrie der Lagrange-Funktion und der Feldgleichungen erhalten bleibt:

$$SU(2)_L \otimes U(1)_Y \xrightarrow{SSB} U(1)_Q$$

(“verborgene Eichsymmetrie”).

Motivation:

Konstruktion in Analogie zu Phasenübergängen 2. Ordnung in der Festkörperphysik: SSB unterhalb der kritischen Temperatur.



Ordnungsparameter (z.B. Magnetisierung) nimmt spontan und diskontinuierlich einen von Null verschiedenen Wert im Grundzustand an.

In der Teilchenphysik: Volle Symmetrie des Vakuums wiederhergestellt bei hohen Energien,

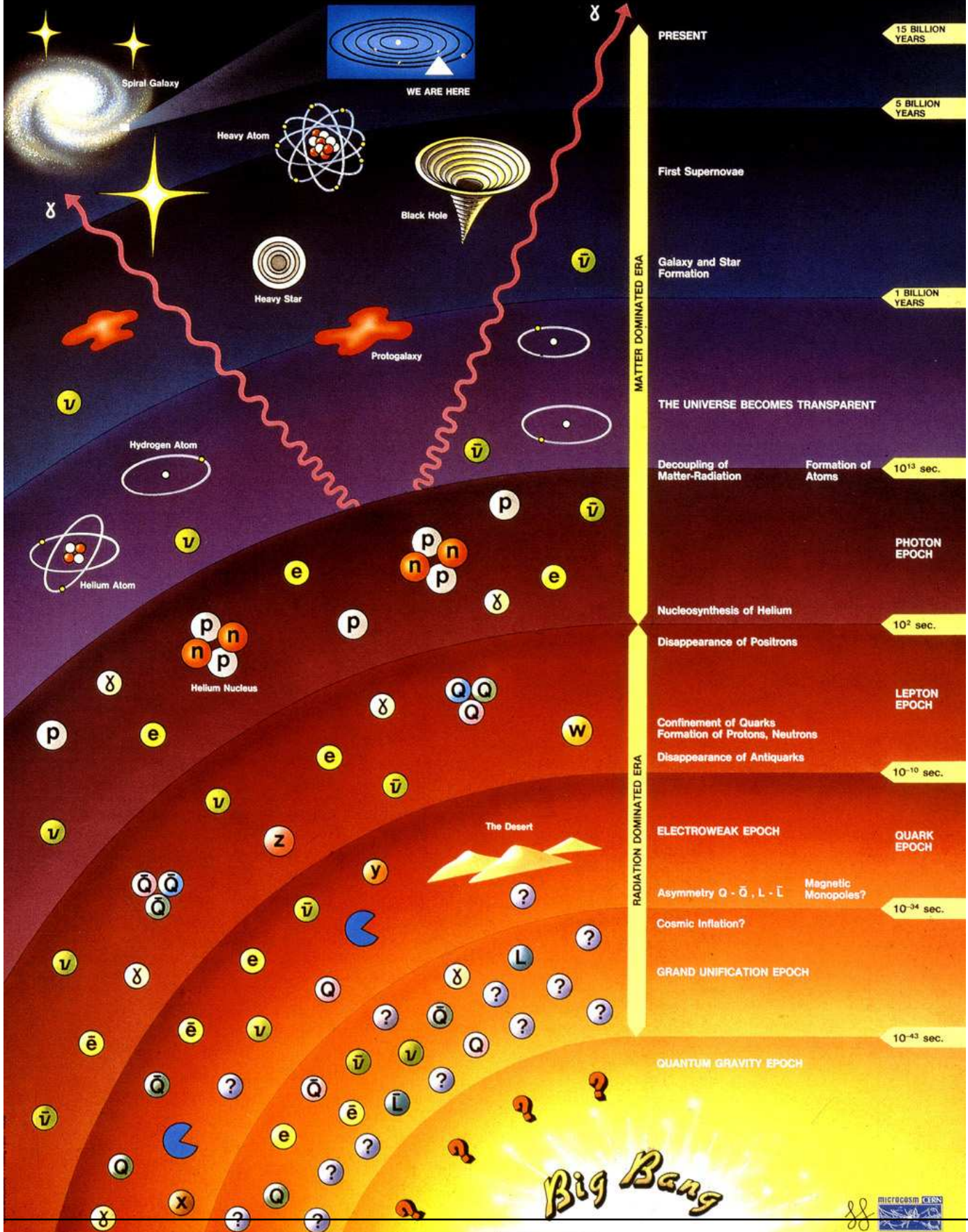
d.h. Phasenübergänge mit spontaner Symmetriebrechung bei Abkühlung des expandierenden frühen Universums.

In der Theorie der Phasenübergänge (**Ginzburg-Landau-Theorie**) entspricht der Ordnungsparameter einem selbstwechselwirkenden skalaren Feld, das im Grundzustand einen von Null verschiedenen Erwartungswert annimmt.

Goldstone-Theorem:

Für jeden Generator einer globalen kontinuierlichen Symmetrie der Bewegungsgleichungen, die im Grundzustand gebrochen ist, tritt ein masseloses skalares Teilchen (Goldstone-Boson) auf.

History of the Universe



Goldstone-Bosonen sind (wegen der Eichsymmetrie) energielose Anregungen, die durch die gebrochenen Symmetriegenatoren erreichbaren (ineinander transformierbaren) Grundzustände verbinden (Quasiteilchenanregungen in der Festkörperphysik, z.B. Phononen).

Als Elementarteilchen wurden sie nicht beobachtet.

Bei lokaler Eichsymmetrie transformieren die Goldstone-Bosonen mittels Eichtransformationen zu den gebrochenen Generatoren als longitudinale Polarisationsfreiheitsgrade der Eichbosonen, die dadurch eine Masse erhalten (Higgs-Mechanismus).

Analogie zum Supraleiter im Magnetfeld:

Durch lokal eichinvariante, elektromagnetische Wechselwirkung mit den Cooper-Paarkondensat im kohärenten supraleitenden Grundzustand (Ordnungsparameterfeld) wird das Photonfeld aus dem Supraleiter abgeschirmt und erhält eine effektive Masse (endliche Reichweite, Eindringtiefe).

Die lokale $U(1)$ -Phasensymmetrie (Teilchenzahlerhaltung) wird im kohärenten Grundzustand gebrochen.

1.4.1 Der Higgs-Mechanismus im Standardmodell

Zusätzliches komplexes, skalares Feld, $SU(2)_L$ -Dublett,

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi^+ \\ \Phi^0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{ccc} Q & I^0 & Y = 2(Q - I^0) \\ +1 & +\frac{1}{2} & +1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & +1 \end{array}$$

mit schwacher und elektromagnetischer Wechselwirkung (4 Freiheitsgrade).

Erfüllt die Klein-Gordon-Gleichung mit $SU(2)_L \times U(1)_Y$ -eichinvarianter Lagrange-Dichte:

$$\mathcal{L}_{\text{Skalar}} = (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - V(\Phi^\dagger \Phi) = T - V$$

mit

$$D_\mu = \partial_\mu \cdot 1 + i \frac{g'}{2} Y B_\mu \cdot 1 + i \frac{g}{2} \vec{\tau} \cdot \vec{W}_\mu$$

und dem Selbstwechselwirkungspotential ($\lambda > 0$):

$$V(\Phi^\dagger \Phi) = \mu^2 (\Phi^\dagger \Phi) + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2.$$

$|\Phi|$ ist der Ordnungsparameter in Analogie zur Ginzburg-Landau-Theorie (freie Energie ersetzt Lagrangedichte).

Für $\mu^2 < 0$ ist der Grundzustand (kin. Energie $T = 0$, $V = V_{\min.}$) bei einem von Null verschiedenen Betrag des Skalarfelds (Vakuumerwartungswert $|\Phi_0| = v/\sqrt{2}$):

$$\frac{\partial V}{\partial |\Phi|} = 2\mu^2|\Phi_0| + 4\lambda|\Phi_0|^3 = 0.$$

$$\implies |\Phi_0| = \sqrt{\frac{-\mu^2}{2\lambda}} =: \frac{v}{\sqrt{2}}.$$

Die Mannigfaltigkeit (Unterraum) im Φ -Raum, auf der $V(\Phi^\dagger\Phi)$ minimal wird, ist $SU(2)_L \times U(1)_Y$ -invariant.

Durch Auswahl eines der möglichen Grundzustände,

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

wird die $SU(2)_L \times U(1)_Y$ -Symmetrie spontan gebrochen.

Eine $U(1)_Q$ -Phasensymmetrie des Vakuums, entsprechend der Erhaltung der elektrischen Ladung bleibt, wie beobachtet, ungebrochen zurück:

$$SU(2)_L \otimes U(1)_Y \xrightarrow{SSB} U(1)_Q.$$

Generatoren T , die den Grundzustand Φ_0 invariant lassen:

$$e^{iT\alpha}\Phi_0 = \Phi_0 \implies T\Phi_0 = 0.$$

Für die gebrochenen $SU(2)_L \times U(1)_Y$ -Generatoren gilt:

$$\begin{aligned}
 \tau_1 \Phi_0 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{v}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0; \\
 \tau_2 \Phi_0 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \frac{v}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0; \\
 \tau_3 \Phi_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{v}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0; \\
 Y \Phi_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \neq 0; \\
 \frac{(\tau_3 - Y)}{2} \Phi_0 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \neq 0;
 \end{aligned}$$

während die elektrische Ladung erhalten bleibt:

$$Q \Phi_0 = \frac{1}{2}(\tau_3 + Y) \Phi_0 = 0.$$

(orthogonal zum Generator $(\tau_3 - Y)/2$, der dem Z_μ^0 -Eichfeld entspricht).

Eine Parametrisierung von Feldanregungen aus dem Grundzustand Φ_0 (Quasiteilchenanregungen):

$$\Phi(x) = e^{i\frac{\vec{\tau}\vec{\zeta}(x)}{2v}} \begin{pmatrix} 0 \\ (v + H(x))/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

mit der **reellen radialen Anregung** $H(x)$ (**skalares Higgs-Boson**: massiv, gegen die Rückstellkraft des Potentials V) und den **reellen Winkelanregungen** $\zeta_i(x)$ ($i = 1, \dots, 3$), die die verschiedenen Grundzustände verbinden.

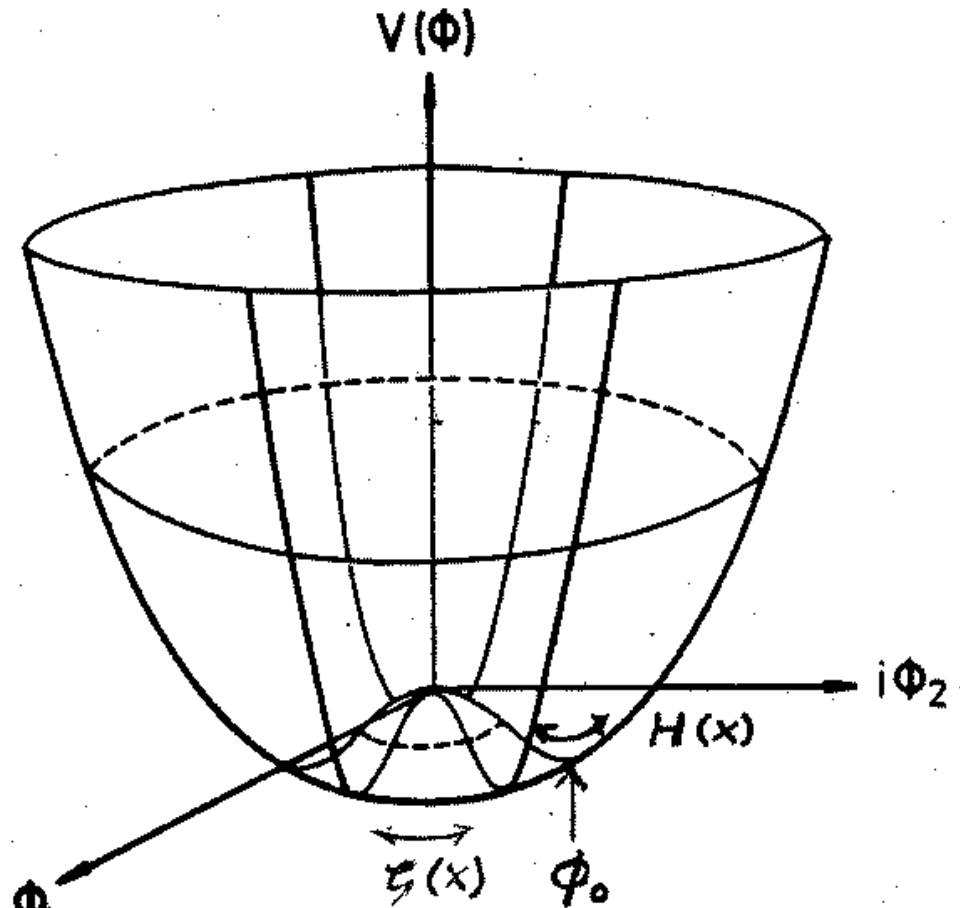
Die **masselosen Goldstone-Moden** ζ_i werden von den Eichbosonen “absorbiert”, die den **gebrochenen Generatoren** entsprechen.

Dies geschieht durch die lokale $SU(2)_L$ -Eichtransformation:

$$\begin{aligned} \Phi(x) &\longrightarrow \Phi'(x) = e^{-i\frac{\vec{\tau}\vec{\zeta}(x)}{2v}} \Phi(x), \\ L_f(x) &\longrightarrow L'_f(x), \\ R_f(x) &\longrightarrow R_f(x), \\ \vec{W}_\mu(x) &\longrightarrow \vec{W}'_\mu(x), \\ B_\mu(x) &\longrightarrow B_\mu(x) \end{aligned}$$

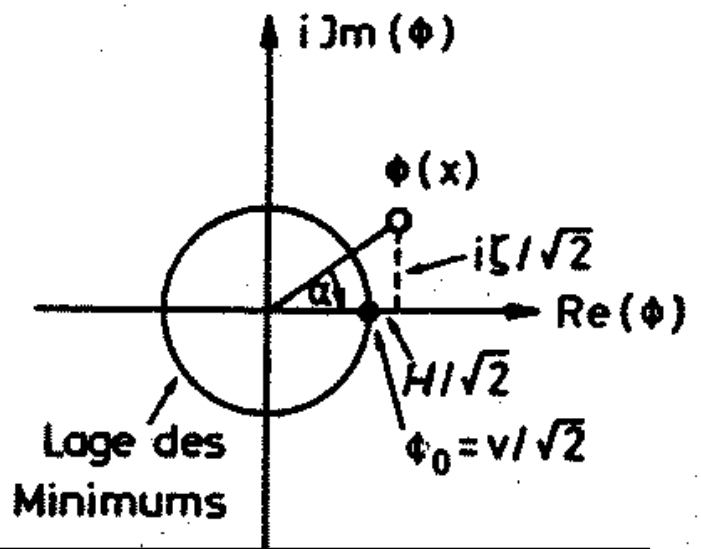
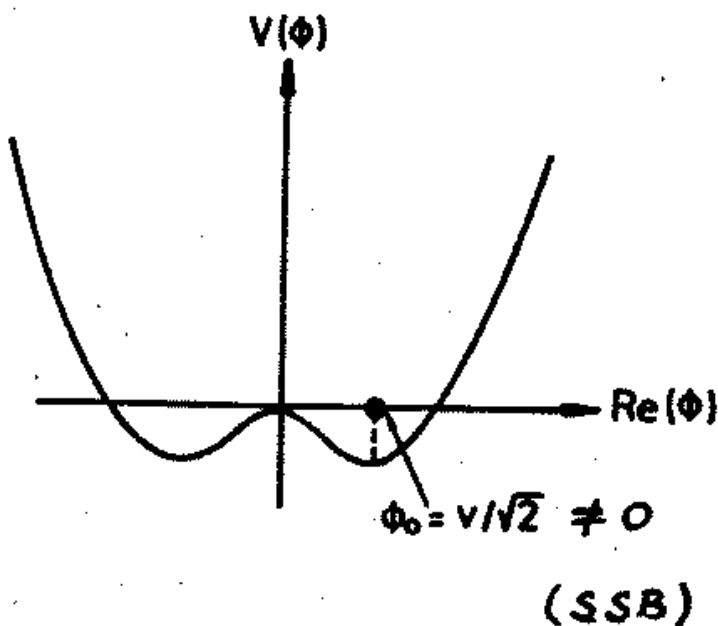
(sog. “unitäre Eichung”).

Higgs - Potential:



Goldstone Moden \leftrightarrow $U(1)$ -Transf

Beispiel: $U(1)$ - Symmetrie des Vakuums gebrochen



Mit $Y_\Phi = +1$ gilt danach:

$$\begin{aligned}
 (D_\mu \Phi)' &= (\partial_\mu 1 + ig \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{W}'_\mu + i \frac{g'}{2} B_\mu 1) \frac{1}{\sqrt{2}} (v + H) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_\mu H \end{pmatrix} + \frac{ig}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (W_\mu^{1'} - iW_\mu^{2'}) (v + H) \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &+ \frac{i}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ (g' B_\mu - gW_\mu^{3'}) (v + H) \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Einsetzen von $\Phi'(x)$ und $(D_\mu \Phi)'$ in $\mathcal{L}_{\text{Skalar}} = T - V$ ergibt:

$$\begin{aligned}
 T &= (D^\mu \Phi)'^\dagger (D_\mu \Phi)' \\
 &= \frac{1}{2} \partial^\mu H \partial_\mu H + \frac{g^2 (v + H)^2}{8} |W_\mu^{1'} - iW_\mu^{2'}|^2 \\
 &+ \frac{(v + H)^2}{8} |g' B_\mu - gW_\mu^{3'}|^2 \\
 &= \frac{1}{2} \partial^\mu H \partial_\mu H + \frac{g^2 v^2}{8} (W_\mu^+ W^{\mu+} + W_\mu^- W^{\mu-}) \\
 &+ \frac{g^2 v^2}{8 \cos^2 \theta_W} Z_\mu^0 Z^{0\mu} \\
 &+ \frac{g^2}{4} (H^2 + 2vH) \left[W_\mu^+ W^{\mu-} + \frac{1}{2 \cos^2 \theta_W} Z_\mu^0 Z^{0\mu} \right]. \\
 V &= \mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2 \\
 &= \frac{\mu^2}{2} (v + H)^2 + \frac{\lambda}{4} (v + H)^4 = -\mu^2 H^2 + \lambda v H^3 + \frac{\lambda}{4} H^4.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{mit } (W_{\mu}^{1'} + iW_{\mu}^{2'})(W^{1'\mu} - iW^{2'\mu}) &\equiv 2W_{\mu}^{+}W^{-\mu} \\ &= W_{\mu}^{+}W^{\mu+} + W_{\mu}^{-}W^{\mu-} \end{aligned}$$

und Rotation mit **Weinberg-Winkel** θ_W wie beim neutralen Strom (Diagonalisierung der Massenmatrix der neutralen Eichbosonen):

$$-Z_{\mu}^0 = \frac{g' B_{\mu} - g W_{\mu}^{3'}}{\sqrt{g^2 + g'^2}} = \frac{g}{\cos \theta_W} (g' B_{\mu} - g W_{\mu}^{3'}).$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathcal{L}_{\text{Skalar}} &= \frac{1}{2} \left(\partial^{\mu} H \partial_{\mu} H - M_H^2 H^2 \right) - \lambda v H^3 - \frac{\lambda}{4} H^4 \\ &+ \frac{g^2}{4} (H^2 + 2vH) \left[W_{\mu}^{+} W^{-\mu} + \frac{1}{2 \cos^2 \theta_W} Z_{\mu}^0 Z^{0\mu} \right] \\ &+ \frac{1}{2} M_W^2 (W_{\mu}^{+} W^{\mu+} + W_{\mu}^{-} W^{\mu-}) + \frac{1}{2} M_Z^2 Z_{\mu}^0 Z^{0\mu}. \end{aligned}$$

mit
Eichbosonen : $M_W = \frac{gv}{2}; \quad M_Z = \frac{gv}{2 \cos \theta_W} = \frac{M_W}{\cos \theta_W};$

Higgsboson : $M_H = \sqrt{-2\mu^2} = \sqrt{2\lambda v}.$

und $\sin^2 \theta_W = 1 - \cos^2 \theta_W = 1 - \frac{M_W^2}{M_Z^2}.$

Alle Wechselwirkungsterme werden genau so benötigt, damit die elektroschwache Theorie **störungstheoretisch berechenbar** (“renormierbar”) ist (durch Eichsymmetrie!).

1.4.2 Massen der Fermionen

Eichinvariante Kopplung der links- und rechtshändigen Fermionen an das Skalarfeld $\Phi(x)$:

$$\mathcal{L}_{WW}^{\text{Yukawa}} = - \sum_{f(\text{up})} g_f \left[\left(\bar{L}_f \bar{\Phi}^* \right) \psi_{fR} + \bar{\psi}_{fR} \left(\bar{\Phi}^T L_f \right) \right] \\ - \sum_{f(\text{down})} g_f \left[\left(\bar{L}_f \Phi \right) \psi_{fR} + \bar{\psi}_{fR} \left(\Phi^\dagger L_f \right) \right]$$

(Yukawa-Kopplung vom Typ $-g(\bar{\psi}\psi)\phi$ zuerst für Nukleon-Pion-Kernwechselwirkung eingeführt.)

mit dem $SU(2)_L$ -Dublett ($Y_{\bar{\Phi}} = 2(Q - I^0) = -1 = -Y_{\Phi}$):

$$\bar{\Phi} := i\tau_2 \Phi^* = \begin{pmatrix} \bar{\Phi}^0 \\ -\bar{\Phi}^- \end{pmatrix} \xrightarrow{SSB} \begin{pmatrix} (v + H)/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wegen der speziellen Eigenschaft der $SU(2)$ -Gruppe, daß $\tau_2 \vec{\tau}^* = -\vec{\tau} \tau_2$, gilt unter $SU(2)_L \times U(1)_Y$ -Eichtransformationen:

$$\begin{aligned}\bar{\Phi} &= i\tau_2 \Phi^* \longrightarrow (i\tau_2 \Phi^*)' = i\tau_2 (U\Phi)^* \\ &= i\tau_2 e^{-i\frac{\vec{\tau}^* \cdot \vec{\beta}}{2}} e^{-i\frac{Y_\Phi}{2}\alpha} \Phi^* \\ &= e^{i\frac{\vec{\tau} \cdot \vec{\beta}}{2}} e^{i\frac{Y_{\bar{\Phi}}}{2}\alpha} (i\tau_2 \Phi^*) = U\bar{\Phi}.\end{aligned}$$

\implies $SU(2)_L$ -Invarianz von $\mathcal{L}_{WW}^{\text{Yukawa}}$:

$$\begin{aligned}(\bar{L}\Phi)\psi_R &\longrightarrow (\bar{L}U^\dagger U\Phi)\psi_R = (\bar{L}\Phi)\psi_R, \\ \bar{\psi}_R(\Phi^\dagger L) &\longrightarrow \bar{\psi}_R(\Phi^\dagger U^\dagger UL) = \bar{\psi}_R(\Phi^\dagger L).\end{aligned}$$

(und ebenso für die 'up'-Terme mit $\bar{\Phi}$),

wobei

$$L \longrightarrow UL, \bar{L} \longrightarrow \bar{L}U^\dagger, \psi_R \longrightarrow \psi_R, \Phi \longrightarrow U\Phi \text{ und } \bar{\Phi} \longrightarrow U\bar{\Phi}.$$

$U(1)_Y$ -Invarianz von $\mathcal{L}_{WW}^{\text{Yukawa}}$:

durch Aufhebung der Phasenfaktoren der L- und R-Fermionen und des Skalarfelds wegen

$$\begin{aligned}Y_{\bar{L}} + Y_{\bar{\Phi}} + Y_R &= +1 - 1 + 0 = 0 \quad (\text{up - Leptonen}) \\ Y_L + Y_\Phi + Y_R &= +1 + 1 - 2 = 0 \quad (\text{down - Leptonen}).\end{aligned}$$

Einsetzen von $\Phi'(x)$ ergibt:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{WW}^{\text{Yukawa}} &= - \sum_f g_f \frac{v + H}{\sqrt{2}} \left(\bar{\psi}_{fL} \psi_{fR} + \bar{\psi}_{fR} \psi_{fL} \right) \\ &\equiv - \sum_f \frac{g_f v}{\sqrt{2}} \bar{\psi}_f \psi_f - \sum_f \frac{g_f}{\sqrt{2}} (\bar{\psi}_f \psi_f) H.\end{aligned}$$

Damit **Dirac-Massenterm** mit

$$m_f = \frac{g_f v}{\sqrt{2}}$$

und Yukawa-Kopplung der Fermionen an das Higgsfeld H

$$\frac{g_f}{\sqrt{2}} = \frac{m_f}{v} \sim m_f.$$

Damit $H \rightarrow f \bar{f}$ bevorzugt in schwerste Fermionen mit $2m_f \leq M_H$.

Beachte: für Quarks gilt:

Massen- (und flavour-) Eigenzustände \neq schwache Eigenzustände von $SU(2)_L$.

1.4.3 Schwache Wechselwirkung und Massen der Quarks

Experimentelle Beobachtung (schwache Zerfälle von K-, D-, B-Mesonen mit s -, c -, b -Quarks):

Die Masseneigenzustände der Quarks (Massenoperator diagonal; feste Massen) sind verschieden von den schwachen Eigenzuständen der Quarks, den linkshändigen $SU(2)$ -Dubletts und den rechtshändigen $SU(2)$ -Singulets (schwache Ladungsoperatoren, $SU(2)$ -Generatoren diagonal; feste schwache Ladungen).

Deshalb ist der Quark-Massenterm in der elektroschwachen Lagrange-Funktion nach der spontanen Symmetriebrechung statt

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{Masse}} &= - \sum_q \frac{g_q v}{\sqrt{2}} (\bar{\psi}_{qL} \psi_{qR} + \bar{\psi}_{qR} \psi_{qL}) \\ &\equiv - \sum_q \frac{g_q v}{\sqrt{2}} \bar{\psi}_q \psi_q = - \sum_q m_q \bar{\psi}_q \psi_q\end{aligned}$$

(vereinfacht durch Annahme einer diagonalen Massenmatrix) allgemeiner von der Form

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{Masse}} &= - \frac{v}{\sqrt{2}} \sum_{i,j} [\bar{\Gamma}_{ij} \bar{u}_{iL} u_{jR} + \bar{\Gamma}_{ji}^* \bar{u}_{jR} u_{iL} \\ &\quad + \Gamma_{ij} \bar{d}_{iL} d_{jR} + \Gamma_{ji}^* \bar{d}_{jR} d_{iL}] \\ &= - \sum_{i,j} [M_{ij}^{(u)} \bar{u}_{iL} u_{jR} + M_{ji}^{(u)*} \bar{u}_{jR} u_{iL} \\ &\quad + M_{ij}^{(d)} \bar{d}_{iL} d_{jR} + M_{ji}^{(d)*} \bar{d}_{jR} d_{iL}]\end{aligned}$$

mit den allgemeinen komplexen Massenmatrizen

$$M_{ij}^{(d)} = \Gamma_{ij} \frac{v}{\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad M_{ij}^{(u)} = \bar{\Gamma}_{ij} \frac{v}{\sqrt{2}}$$

Oder mit der Definition für die up (u)- und down (d)-artigen Quark-Eigenzustände des schwachen Isospins

$$D = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix}$$

in Matrixschreibweise:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Masse}}^{\text{Quarks}} = & - \bar{D}_L M^{(d)} D_R - \bar{D}_R M^{(d)\dagger} D_L \\ & - \bar{U}_L M^{(u)} U_R - \bar{U}_R M^{(u)\dagger} U_L. \end{aligned}$$

(Es gilt $\mathcal{L}^\dagger = \mathcal{L}$ wie verlangt fuer eine Observable.)

Die separaten Massenmatrizen für up- und down-artige Quarks lassen sich diagonalisieren durch separate unitäre Transformationen jeweils für die links- und die rechtshändigen Quark-Zustände:

$$\begin{aligned}
 U_d^\dagger M^{(d)} V_d &= M_{\text{diag.}}^{(d)}; & U_u^\dagger M^{(u)} V_u &= M_{\text{diag.}}^{(u)}; \\
 V_d^\dagger M^{(d)\dagger} U_d &= (U_d^\dagger M^{(d)} V_d)^\dagger = M_{\text{diag.}}^{(d)*}; \\
 V_u^\dagger M^{(u)\dagger} U_u &= (U_u^\dagger M^{(u)} V_u)^\dagger = M_{\text{diag.}}^{(u)*};
 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
 D'_L &= U_d^\dagger D_L; & U'_L &= U_u^\dagger U_L; \\
 D'_R &= V_d^\dagger D_R; & U'_R &= V_u^\dagger U_R.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \mathcal{L}_{\text{Masse}}^{\text{Quarks}} &= \\
 &- \overline{D}_L \overbrace{U_d U_d^\dagger}^{=1} M^{(d)} \overbrace{V_d V_d^\dagger}^{=1} D_R - \overline{D}_R \overbrace{V_d V_d^\dagger}^{=1} M^{(d)\dagger} \overbrace{U_d U_d^\dagger}^{=1} D_L \\
 &- \overline{U}_L U_u \overbrace{U_u^\dagger M^{(u)} V_u V_u^\dagger}^{=1} U_R - \overline{U}_R V_u \overbrace{V_u^\dagger M^{(u)\dagger} U_u U_u^\dagger}^{=1} U_L \\
 &= -\overline{D}'_L M_{\text{diag.}}^{(d)} D'_R - \overline{D}'_R M_{\text{diag.}}^{(d)*} D'_L \\
 &\quad -\overline{U}'_L M_{\text{diag.}}^{(u)} U'_R - \overline{U}'_R M_{\text{diag.}}^{(u)*} U'_L \\
 &= -\overline{D}' M_{\text{diag.}}^{(d)} D' - \overline{U}' M_{\text{diag.}}^{(u)} U'.
 \end{aligned}$$

Die letzte Zeile gilt nach einer $U(1)$ -Phasentransformation der Quarkfelder, so daß die Masseneigenwerte reell werden.

Die Lagrange-Funktion für die schwache geladene Stromwechselwirkung der Quarks läßt sich folgendermaßen durch die Masseneigenzustände ausdrücken:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{CC}^{\text{Quarks}} &= \\
 &= -\frac{g}{\sqrt{2}} [j_{CC}^{\mu+} W_{\mu}^{-} + j_{CC}^{\mu-} W_{\mu}^{+}] \\
 &= -\frac{g}{\sqrt{2}} \sum_{i=1}^3 \left[(\bar{U}_{Li} \gamma^{\mu} D_{Li}) W_{\mu}^{-} + (\bar{D}_{Li} \gamma^{\mu} U_{Li}) W_{\mu}^{+} \right] \\
 &= -\frac{g}{\sqrt{2}} \left[(\bar{U}_L \gamma^{\mu} 1 D_L) W_{\mu}^{-} + (\bar{D}_L \gamma^{\mu} 1 U_L) W_{\mu}^{+} \right] \\
 &\equiv -\frac{g}{\sqrt{2}} \left[(\bar{U}'_L U_u^{\dagger} \gamma^{\mu} U_d D'_L) W_{\mu}^{-} + (\bar{D}'_L U_d^{\dagger} \gamma^{\mu} U_u U'_L) W_{\mu}^{+} \right] \\
 &\equiv -\frac{g}{\sqrt{2}} \left[\underbrace{(\bar{U}'_L \gamma^{\mu} V_{CKM} D'_L)}_{=j_{CC}^{\mu+}} W_{\mu}^{-} \right. \\
 &\quad \left. + \underbrace{(\bar{D}'_L V_{CKM}^{\dagger} \gamma^{\mu} U'_L)}_{=j_{CC}^{\mu-}} W_{\mu}^{+} \right]
 \end{aligned}$$

mit der unitären Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM)-Matrix $V_{CKM} = U_u^{\dagger} U_d$.

1.4.3.1 Mischung der Quark-Flavours

Die “Quark-Mischungsmatrix” V_{CKM} führt zu **geladenen schwachen Übergängen zwischen den Quarkgenerationen**, definiert als die Masseneigenzustände der Quarks, die an die elektromagnetische und starke Wechselwirkung koppeln, und gibt verschiedene Gewichte für die Wahrscheinlichkeit der schwachen CC-Übergänge zwischen den up- und down-artigen Masseneigenzuständen der Quarks:

$$\begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} d_C \\ s_C \\ b_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}.$$

Z.B.: $u \longleftrightarrow d_C = V_{ud}d + V_{us}s + V_{ub}b.$

Die Elemente der CKM-Matrix werden vom Standardmodell nicht vorhergesagt, sondern müssen experimentell bestimmt werden. Dies ist ein aktiver Forschungszweig, insbesondere für die Übergänge mit schweren Quarks (c, b, t).

Zahl der unabhängigen Parameter der CKM-Matrix:

Für $n = 2$ Generationen:

Bis zur Entdeckung des bottom-Quarks.

Reelle orthogonale 2×2 Matrix mit **1 reellen Parameter, keine komplexe Phase:**

$$\text{Cabibbo - Matrix : } V = \begin{pmatrix} \cos \theta_c & \sin \theta_c \\ -\sin \theta_c & \cos \theta_c \end{pmatrix}.$$

θ_c ist der **Cabibbo-Winkel** mit $\sin \theta_c \approx 0.23$ und $\cos \theta_c \approx 0.95$.

Für $n = 3$ Generationen:

CKM-Matrix mit **3 reellen Parametern und 1 komplexen Phase:**
 $V^* \neq V$ (möglich nur für ≥ 3 Generationen):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -s_{23}c_{12} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}$$

Mit den 3 Mischungswinkeln θ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3; i > j$),
 $c_{ij} = \cos \theta_{ij} > 0$, $s_{ij} = \sin \theta_{ij} > 0$, und dem Phasenfaktor $e^{i\delta}$.

Allgemeine Herleitung:

Komplexe $n \times n$ -Matrix: $2n^2$ Parameter.

Unitäre Matrix mit n^2 Nebenbedingungen ($V^\dagger V = 1$): n^2 Parameter.

Davon sind $\frac{n(n-1)}{2}$ Parameter reell; die übrigen $n^2 - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ Parameter sind komplexe Phasenfaktoren.

Denn eine reelle unitäre Matrix (orthogonale Matrix) mit $n + \frac{n(n-1)}{2}$ Nebenbedingungen ($V^T V = 1$) hat $n^2 - n - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ unabhängige reelle Parameter.

n Phasenfaktoren können in den n U -Feldern durch Neudefinition ihrer Phase absorbiert werden (aus der 1. Spalte der Mischungsmatrix):

$$U_{Lj} \longrightarrow e^{-i\alpha_j^{(u)}} U_{Lj} \quad (j = 1, \dots, n).$$

$n - 1$ weitere Phasenfaktoren können aus der 1. Reihe der Mischungsmatrix in den $n - 1$ D -Feldern absorbiert werden:

$$D_{Lj} \longrightarrow e^{-i\alpha_j^{(d)}} D_{Lj} \quad (j = 2, \dots, n),$$

d.h. insgesamt werden $2n - 1$ Phasenfaktoren eliminiert.

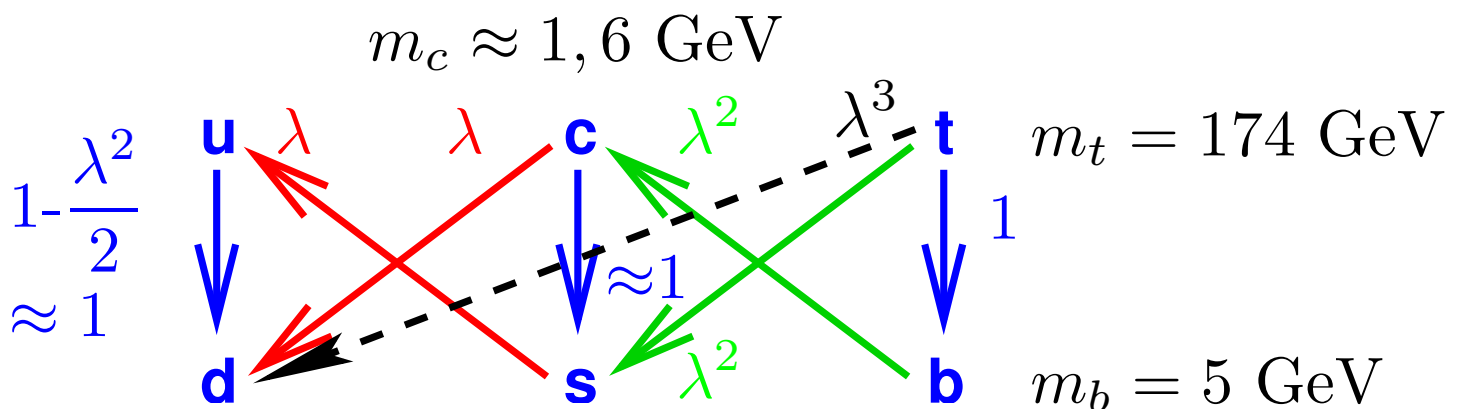
Danach bleiben $n(n+1)/2 - (2n-1) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ unabhängige Phasenfaktoren übrig.

Die aktuellen Meßwerte für die CKM-Matrixelemente sind:

$ V_{ud} = 0.9736 \pm 0.0010$	aus nuklearem β - und μ -Zerfall
$ V_{us} = 0.2205 \pm 0.0018$	aus semilept. Kaon-Zerfällen $K \rightarrow \pi e \nu_e$
$ V_{ub} = (3.6 \pm 0.5) \cdot 10^{-3}$	aus semileptonischen Zerfällen $B \rightarrow X_u \ell \nu_\ell$
$ V_{cd} = 0.224 \pm 0.016$	charm-Quark-Produktionsrate in $\nu(\bar{\nu})$ -Kern-Streuung
$ V_{cs} = 1.01 \pm 0.18$	semileptonische charm-Quark Zerfälle $D \rightarrow K e \nu_e$ ($c \rightarrow s$)
$ V_{cb} = 0.040 \pm 0.002$	aus semilept. B-Mesonzerfällen
$ V_{td} = 0.009 \pm 0.002$	von $B_d^0 \bar{B}_d^0$ -Mischung
$ V_{td} < 0.009$ (95% C.L.)	von $B_s^0 \bar{B}_s^0$ -Mischung
$ V_{td}/V_{ts} < 0.29$ (95 % C.L.)	von $B_d^0 \bar{B}_d^0$ - und $B_s^0 \bar{B}_s^0$ -Mischung
$ V_{td}/V_{ts} < 0.56$ (90 % C.L.)	von $b \rightarrow s \gamma$ Zerfällen
$ V_{ts}/V_{cb} = 1.1 \pm 0.4$	von $b \rightarrow s \gamma$ Zerfällen
$ V_{tb} > 0.016$ (95 % C.L.)	aus top-Quark-Zerfällen $t \rightarrow W^+ b$

$$\begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix}$$

Die Hierarchie der Übergangswahrscheinlichkeiten und der Quarkmassen läßt eine Erklärung durch eine dem Standardmodell übergeordnete Theorie erwarten.



Die näherungsweise Wolfenstein-Parametrisierung macht die Rangordnung der Übergänge zwischen den Quark-Generationen (Massen/flavour-Eigenzustände) deutlich:

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\lambda^2}{2} & \lambda & A\lambda^3(\rho - i\eta) \\ -\lambda & 1 - \frac{\lambda^2}{2} & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1 - \rho - i\eta) & -A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\lambda^4),$$

bei der die Matrixelemente nach dem kleinen Parameter λ entwickelt werden.

Die 4 Wolfenstein-Parameter haben die gemessenen Werte:

$$\begin{aligned} \lambda &\equiv s_{12} = 0.2205 \pm 0.0018, \\ A &\equiv s_{23}/\lambda^2 = 0.82 \pm 0.06, \\ \sqrt{\rho^2 + \eta^2} &\equiv |V_{ub}|/A\lambda^3 = 0.36 \pm 0.09. \end{aligned}$$

Eine komplexe CKM-Matrix ermöglicht eine Beschreibung der beobachteten schwachen Verletzung der CP-Symmetrie im Rahmen des Standardmodells (mit 6 Quarks in 3 Generationen), hervorgerufen wiederum durch die schwache Wechselwirkung und mit Ursprung in der Fermion-Higgs-Boson-Kopplung bzw. der Quark-Massenmatrix:

Vorschlag von Kobayashi und Maskawa 1973 noch vor der Entdeckung der dritten Fermion-Generation (τ -Lepton 1975, bottom-Quark 1977, top-Quark 1994) und vor der Entdeckung des charm-Quarks 1974.

Denn mit

$$\begin{aligned} j_{CC}^{\mu+} &= \bar{U}_L \gamma^\mu V_{CKM} D_L \xrightarrow{CP} -\bar{D}_L V_{CKM}^T \gamma^\mu U_L; \\ j_{CC}^{\mu-} &= \bar{D}_L V_{CKM}^\dagger \gamma^\mu U_L \xrightarrow{CP} -\bar{U}_L \gamma^\mu V_{CKM}^* D_L; \end{aligned}$$

und

$$W_\mu^\pm \xrightarrow{CP} -W_\mu^\mp.$$

verhält sich $\mathcal{L}_{CC}^{\text{Quarks}}$ unter CP-Transformationen wie

$$\begin{aligned} &(\bar{U}_L \gamma^\mu V_{CKM} D_L) W_\mu^- + (\bar{D}_L V_{CKM}^\dagger \gamma^\mu U_L) W_\mu^+ \\ \xrightarrow{CP} &(\bar{D}_L V_{CKM}^T \gamma^\mu U_L) W_\mu^+ + (\bar{U}_L \gamma^\mu V_{CKM}^* D_L) W_\mu^-, \end{aligned}$$

d.h. $\mathcal{L}_{CC}^{\text{Quarks}}$ ist nur CP-invariant, wenn $V^* = V$.

1.4.3.2 Neutrale Ströme der Quarks

$$\mathcal{L}_{NC} = -e j_{\text{el.magn.}}^\mu A_\mu - \frac{e}{\sin \theta_W \cos \theta_W} \left[j^{\mu 3} - j_{\text{el.magn.}}^\mu \sin^2 \theta_W \right] Z_\mu$$

mit dem elektromagnetischen Strom

$$\begin{aligned} j_{\text{el.magn.}}^\mu &= Q_u (\bar{U} \gamma^\mu U) + Q_d (\bar{D} \gamma^\mu D) \\ &= Q_u (\bar{U}' \gamma^\mu U') + Q_d (\bar{D}' \gamma^\mu D') \end{aligned}$$

und dem Strom der dritten Komponente des schwachen Isospins

$$\begin{aligned} j^{\mu 3} &= I_u^3 (\bar{U} \gamma^\mu U) + I_d^3 (\bar{D} \gamma^\mu D) \\ &= \frac{1}{2} (\bar{U} \gamma^\mu U) - \frac{1}{2} (\bar{D} \gamma^\mu D) \\ &= \frac{1}{2} (\bar{U}' \gamma^\mu U') - \frac{1}{2} (\bar{D}' \gamma^\mu D'). \end{aligned}$$

Die **neutralen Ströme** bleiben **flavour-erhaltend** für die Masseneigenzustände U' , D' wie für die schwachen Eigenzustände U , D wegen der Unitarität der Transformation,

$$U_{u,d}^\dagger U_{u,d} = 1; \quad V_{u,d}^\dagger V_{u,d} = 1,$$

so daß z.B. gilt

$$\begin{aligned}\bar{U}\gamma_\mu U &= \bar{U}_L\gamma_\mu U_L + \bar{U}_R\gamma_\mu U_R \\ &= \bar{U}'_L U_u^\dagger \gamma_\mu U_u U'_L + \bar{U}'_R V_u^\dagger \gamma_\mu V_u U'_R \\ &= \bar{U}'_L \gamma_\mu U'_L + \bar{U}'_R \gamma_\mu U'_R = \bar{U}' \gamma_\mu U'.\end{aligned}$$

⇒ Keine CP-Verletzung in der schwachen neutralen und der elektromagnetischen WW.

Die kinetischen Terme bleiben ebenfalls unverändert.

⇒ Keine flavour-ändernden Prozesse mit neutralen Strömen (FCNC-Prozesse) in 1. Ordnung im Standardmodell.

Unterdrückung von FCNC-Prozessen auch in höherer Ordnung der schwachen WW: durch den

“GIM-Mechanismus” (Glashow, Illiopoulos, Maiani).

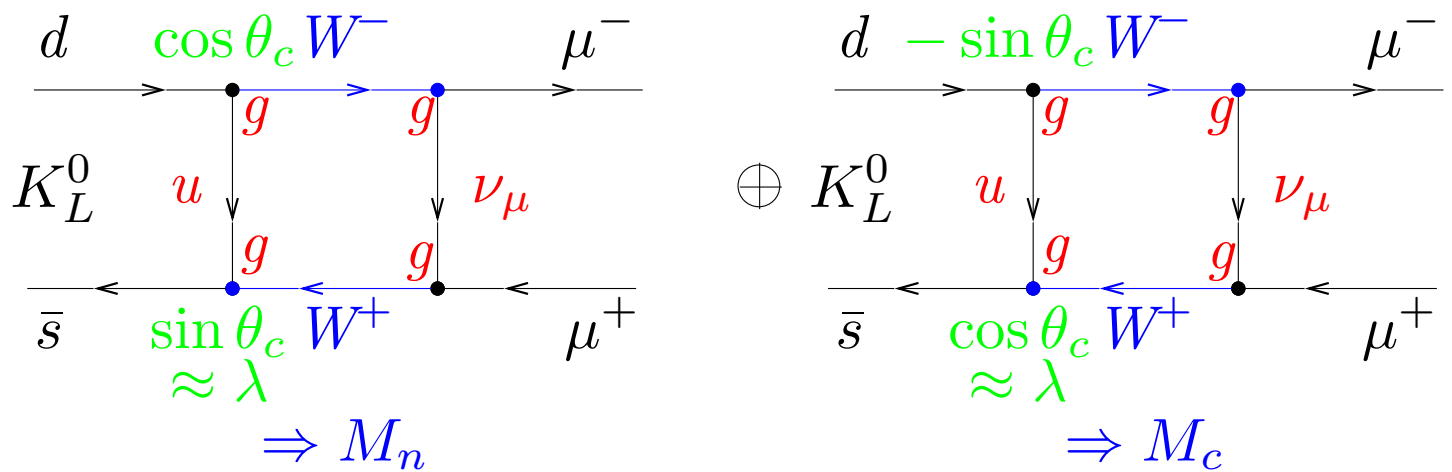
Experimentell sind FCNC-Prozesse sehr klein, z.B. ist das Verzweigungsverhältnis

$$BR(K_L^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-) = \frac{\Gamma(K_L^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-)}{\Gamma_{K_L^0}^{\text{tot}}} \approx 9 \cdot 10^{-7}\%$$

während $BR(K^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu) = 63.5\%$ (typischer schwacher CC-Zerfall).

(NB: Schwacher Zerfall in Myonpaar bevorzugt gegenüber Zerfall in Elektronpaar wegen Drehimpulserhaltung und Paritätsverletzung!)

In 2. Ordnung der schwachen Wechselwirkung ist der Prozeß für den Zerfall $K_L^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$:



Gegenseitige Aufhebung der Amplituden für up- und charm-Quark-Austausch wegen der Unitariät der CKM-Matrix (Orthogonalität der Cabibbo-Matrix für 2 Generationen):

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_u &\sim g^4 \sin \theta_C \cos \theta_C; \\
 \mathcal{M}_c &\sim -g^4 \sin \theta_C \cos \theta_C;
 \end{aligned}$$

Details abhängig vom Wert der charm-Quark-Masse $m_c \gg m_u$.

\Rightarrow Vorhersage für die Masse des charm-Quarks: $> 1 \text{ GeV}$.

Konsequenzen der Quark-Flavour-Mischung in der schwachen Wechselwirkung:

1. Quark-Flavour-Oszillationen.
2. Verletzung der CP-Symmetrie.