1.1 Feldtheorien der Elementarteilchen

1.1.1 Quantenmechanik und Feldtheorie

Klass. Mechanik Hamilton'sche Bewegungsgleichungen	$\longrightarrow$	Klass. QM Schrödingergleichung (Einteilchenzustände)	$\longrightarrow$	Vielteilchensysteme: 2. Quantisierung (Vielteilchengrundzustand + Anregungen)
		$\downarrow$ Lorentzinvarianz		
Relativistische Mechanik	$\longrightarrow$	Relativistische Wellengleichungen ($\rightarrow$ Antiteilchen)	$\longrightarrow$	Vielteilchensysteme: Feldquantisierung (Vakuumgrundzustand + Teilchenanregungen)

Die Maxwell-Gleichungen sind das erste Bespiel einer relativistischen Feldtheorie.

Die Lorentz-Symmetrie wurde anhand der Maxwell-Gleichungen entdeckt.

Die erste Quantenfeldtheorie war die QED mit elektromagnetisch gekoppelten Quantenfeldern für elektrisch geladene Materie und elektromagnetisches Feld (Photonen). Sie ist das Muster für alle anderen Wechselwirkungen des Standardmodells.

1.1.2 Notation

1. Wirkungsquantum $\hbar = 1$, Lichtgeschwindigkeit $c = 1$.

2. 4-Vektoren:

   Raum-Zeit-Koordinaten:

   Kontravariante Koordinaten:

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z).$$

   Kovariante Koordinaten:

$$\begin{aligned} x_\mu &= (x_0, x_1, x_2, x_3) = (t, -x, -y, -z), \\ x_\mu &= g_{\mu\nu} x^\nu \equiv \sum_\nu g_{\mu\nu} x^\nu . \end{aligned}$$

   mit dem metrischen Tensor der Minkowsky-Raum-Zeit:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \equiv g^{\mu\nu},$$

$$g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 4; \quad g_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu} = g^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu$$

   und Summation über wiederholte Indizes.

3. Skalarprodukt (invariant):

$$x^2 \equiv x^\mu x_\mu = t^2 - \vec{x}^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2.$$

4. Energie-Impuls-Vektor:

$$\begin{aligned} p^\mu &= (E, \vec{p}) = (E, p_x, p_y, p_z), \\ p_\mu &= (E, -\vec{p}) = (E, -p_x, -p_y, -p_z), \end{aligned}$$

$$p^2 \equiv p^\mu p_\mu = E^2 - \vec{p}^2 = m^2.$$

5. Differentialoperatoren:

$$\begin{aligned} \partial_\mu &\equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right), \\ \partial^\mu &\equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla}\right). \end{aligned}$$

6. Quantenmechanische Operatoren:

4-Impuls: $\widehat{p}^\mu = i\partial^\mu = i\frac{\partial}{\partial x_\mu} = (i\frac{\partial}{\partial t}, -i\vec{\nabla})$,

$$\widehat{p}^\mu \widehat{p}_\mu = -\partial^\mu \partial_\mu = -\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2\right) = -\Box$$

mit dem d'Alembert-Operator $\Box = \partial^\mu \partial_\mu$.

1.1.3 Lagrange-Formalismus in der Feldtheorie

1.1.3.1 Lagrange-Formalismus in der klassischen Mechanik

Nach dem Hamiltonschen Prinzip der kleinsten Wirkung erhält man die Bewegungsgleichungen durch Variation des Wirkungsintegrals

$$S \equiv \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_i, \dot{q}_i), \tag{1}$$

mit der Lagrangefunktion $L(q_i, \dot{q}_i) = T - V$ als Funktion der verallgemeinerten Koordinaten $q_i(t)$ und ihrer Ableitungen $\dot{q}_i$ $(i = 1, \ldots n)$, aus der Bedingung

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_i, \dot{q}_i) = 0, \tag{2}$$

wobei die Koordinaten an den Endpunkten t_1 und t_2 festgehalten werden.

Die Bewegungsgleichungen liefern die Trajektorien $q_i(t)$, für die die Wirkung S minimal wird.

Die Bewegungsgleichungen sind die Euler-Lagrange-Gleichungen:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \tag{3}$$

1.1.3.2 Anwendung des Lagrange-Formalismus in der Feldtheorie

Die Feldgleichungen ergeben sich durch Variation der klassichen Wirkung

$$S \equiv \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \tag{4}$$

mit der Lagrangedichte $\mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x))$ als Funktion des Feldes $\phi(x)$ (Kontinuum unendlich vieler Variabler) und seines 4-Gradienten $\partial_\mu \phi(x)$, die die Rolle der Lagrangefunktion

$$L = \int d^3x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = T - V$$

übernimmt.

Das Hamilton-Prinzip, $\delta S = 0$ mit $\delta\phi(t_1, \vec{x}) = 0 = \delta\phi(t_2, \vec{x})$, ist erfüllt, wenn die Euler-Langrage-Bewegungsgleichungen

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi(x))} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi(x)} = 0 \tag{5}$$

erfüllt sind.

Die Feldgleichungen sind relativistisch kovariant, wenn die Lagrangedichte lorentzinvariant, also ein Lorentzskalar ist. Wegen der Randbedingung ändern sie sich nicht, wenn eine totale Divergenz $\partial_\mu A$ zur Lagrangedichte addiert wird.

Die Symmetrien der Feldgleichungen ergeben sich aus den Symmetrien der Lagrangedichte.

Die Quantenzahlen der Elementarteilchen und ihre Wechselwirkungen sind durch Symmetrien der Lagrangedichte bestimmt.

1.1.4 Feldgleichungen für freie Teilchen

Relativistische Wellengleichungen für die fundamentalen Teilchen des Standardmodells.

1.1.4.1 Rekapitulation: Schrödingergleichung

für nicht-relativistische freie Punktteilchen ohne Spin:
$E = \frac{\vec{p}^2}{2m} = T$.

Quantisierung:

$$E \longrightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}; \quad \vec{p} \longrightarrow -i\hbar\vec{\nabla}.$$

$\Longrightarrow$ Wellengleichung:

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\vec{x},t)}{\partial t} = \widehat{H}\psi(\vec{x},t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2\psi(\vec{x},t)$$

mit den ebenen Wellenlösungen

$$\psi(\vec{x},t) = \frac{1}{V}e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$$

zu den Energie- und Impulseigenwerten $E = \hbar\omega$, $\vec{p} = \hbar\vec{k}$.

Mit den Definitionen

$$
\begin{aligned}
\rho &= \psi^*\psi = |\psi|^2 \ (= \frac{1}{V}), \\
\vec{j} &= -\frac{i\hbar}{2m}(\psi^*(\nabla\psi) - (\vec{\nabla}\psi^*)\psi) \ (= \frac{\hbar\vec{k}}{mV} = \rho\frac{\vec{p}}{m} = \rho\vec{v})
\end{aligned}
$$

für die Wahrscheinlichkeitsdichte und die Wahrscheinlichkeitsstromdichte (in Klammern für ebene Wellen) gilt die lokale Erhaltung der Wahrscheinlichkeit (Kontinuitätsgleichung):

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$$

und damit

$$\frac{d}{dt}\int d^3x\rho = 0.$$

1.1.4.2 Skalare Bosonen: Klein-Gordon-Gleichung

(Gordon, Klein 1926; Pauli, Weisskopf 1934)

für relativistische skalare (Spin 0-) Bosonen (z.B. $\pi^{\pm}$, $K^0/\bar{K}^0$, Higgsfeld): $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$.

Quantisierung ($\hbar = 1$):

$$p^\mu = (E, \vec{p}) \longrightarrow i\partial^\mu = (i\frac{\partial}{\partial t}, -i\vec{\nabla}).$$

$\Longrightarrow$ Wellengleichung:

$$-\frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial t^2} = (-\vec{\nabla}^2 + m^2)\phi(x),$$

$$\boxed{\Longrightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 + m^2\right)\phi(x) \equiv (\Box + m^2)\phi(x) = 0.}$$

Die gleiche Gleichung gilt für das komplex konjugierte Feld (Antiteilchen):

$$(\Box + m^2)\phi^*(x) = 0.$$

Die Feldgleichungen lassen sich aus der Lagrangedichte

$$\boxed{\mathcal{L} = [(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi)^* - m^2 \phi\phi^*] = \mathcal{L}(\phi, \phi^*; \partial^\mu \phi, \partial^\mu \phi^*)}$$

nach dem Variationsformalismus von Euler und Lagrange herleiten durch Variation der Felder:

$\delta\phi^*(x)$ ergibt Feldgleichung für $\phi(x)$.

$\delta\phi(x)$ ergibt Feldgleichung für $\phi^*(x)$.

Freie Lösungen sind ebene Wellen:

$$\phi^\pm(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} \mp \omega t)}$$

zu den Energieeigenwerten $E = \pm\omega$ mit $\omega = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$.

Die globale $U(1)$-Eichsymmetrie der Lagrangedichte unter Phasentransformationen der Felder (s.u.) führt zu dem lokalen Erhaltungssatz (Kontinuitätsgleichung)

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$$

für die 4-Wahrscheinlichkeitsstromdichte $j^\mu = (\rho, \vec{j})$:

$$\begin{aligned} j^\mu &= -i\frac{1}{2m}\cdot\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\phi - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^*)}\phi^*\right) \\ &= -\frac{i}{2m}[(\partial^\mu\phi)^*\phi - (\partial^\mu\phi)\phi^*] \end{aligned}$$

mit $\rho = \pm\frac{1}{V} \cdot \frac{\omega}{m}$ und $\vec{j} = \frac{1}{V} \cdot \frac{\vec{k}}{m}$ für ebene Wellenlösungen (relativistische Verallgemeinerung der Wahrscheinlichkeitserhaltung in der klassichen Quantenmechanik).

Die Wahrscheinlichkeitsdichte ρ für Lösungen mit negativen Energieeigenwerten ist ebenfalls negativ.

Im Rahmen der Quantenfeldtheorie können die ebenen Wellen mit negativer Energie als Wellenfunktionen für die Antiteilchen interpretiert werden (s.u.).

Die relativistische Invarianz erlaubt keine konsistente quantenmechanische Interpretation der Einteilchenwellengleichung. Eine Vielteilchenquantentheorie ist erforderlich. Die (klassiche) Lagrangedichte ist dennoch für die Untersuchung der Symmetrien und Wechselwirkungen und die meisten Berechnungen ausreichend.

Grenzfall:

Reelle skalare Felder beschreiben Spin 0-Teilchen, die mit ihren Antiteilchen identisch sind (z.B. π^0, Higgsboson).

Die Wellengleichung

$$(\Box + m^2)\phi(x) = 0$$

entspricht der Lagrangedichte

$$\mathcal{L}(\phi, \partial^\mu \phi) = \frac{1}{2}[(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^2].$$

1.1.4.3 Fermionen: Dirac-Gleichung

(Dirac, 1928)

für relativistische Spin $\frac{1}{2}$-Fermionen (Leptonen und Quarks): $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$.

Quantisierung:

$$E \longrightarrow i\frac{\partial}{\partial t}; \quad \vec{p} \longrightarrow -i\vec{\nabla}.$$

$\Longrightarrow$ Ansatz für die Wellengleichung nur mit 1. Ableitung nach der Zeit (wie Schrödingergleichung nach den Interpretationsproblemen mit der Klein-Gordon-Gleichung) und damit auch nach dem Ort (wegen relativistischer Kovarianz):

$$\begin{aligned} i\frac{\partial\psi}{\partial t} \equiv \widehat{H}\psi &= (\vec{\alpha}\cdot\widehat{\vec{p}} + \beta m)\psi \\ &\equiv (-i\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} + \beta m)\psi \end{aligned}$$

mit Parametern $\vec{\alpha}$, β, die so gewählt werden müssen, daß weiterhin (für jede Komponente des Feldes ψ) die Klein-Gordon-Gleichung erfüllt ist, d.h. nach 2. Ableitung des Ansatzes nach der Zeit und Einsetzen des Ansatzes für die 1. Ableitung:

$$-\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \equiv \widehat{H}^2\psi = (\widehat{\vec{p}}^{\,2} + m^2)\psi \equiv (-\vec{\nabla}^2 + m^2)\psi$$

Dies ist nur erfüllbar, wenn $\alpha_{1,2,3} = \alpha^\dagger_{1,2,3}$ und $\beta = \beta^\dagger$ hermitesche Matrizen sind mit den Eigenschaften:

1. $\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = \alpha_3^2 = \beta^2 = 1 \implies$ Eigenwerte $= \pm 1$

2. Antivertauschungsrelationen:

$$\alpha_j \alpha_k + \alpha_k \alpha_j = 0 \;\; (j \neq k),$$

$$\alpha_j \beta + \beta \alpha_j = 0 \implies \mathrm{Spur}(\alpha_{1,2,3}) = \mathrm{Spur}(\beta) = 0.$$

Damit muß die Dimension der Matrizen gerade sein und mindestens $n = 4$, da es für $n = 2$ neben der Einheitsmatrix I nur 3 linear unabhängige Matrizen gibt, die Pauli'schen Spinmatrizen:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Für $n = 4$ gibt es 16 linear unabhängige Matrizen.

Die folgenden Kombinationen von Matrizen sind am günstigsten für eine raum-zeitlich symmetrische Formulierung der Dirac-Wellengleichung: die Dirac'schen γ-Matrizen:

$$\gamma^0 = \beta, \gamma^1 = \beta\alpha_1, \gamma^2 = \beta\alpha_2, \gamma^3 = \beta\alpha_3,$$

die formal einen 4-Vektor bilden,

$$\gamma^\mu = (\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3), \;\; \gamma_\mu = g_{\mu\nu}\gamma^\mu = (\gamma^0, -\gamma^1, -\gamma^2, -\gamma^3),$$

bei Lorentztransformationen aber invariant bleiben.

Damit ist die relativistisch kovariante Dirac-Gleichung:

$$\boxed{(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0}$$

d.h.

$$\left[i(\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla}) - m \cdot I \right] \psi = 0.$$

Die Fermionfelder sind 4-komponentig: 4-Spinoren.

Die γ-Matrizen haben die folgenden Eigenschaften:

- $\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \cdot I.$
- $\gamma^\mu \gamma_\mu = g_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu = 4 \cdot I.$
- $\gamma^{0\dagger} = \gamma^0, \; \gamma^{j\dagger} = -\gamma^j.$

Eine gebräuchliche Darstellung der γ-Matrizen ist (Pauli-Dirac-Darstellung: γ^0 diagonal):

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \; \gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ -\sigma_j & 0 \end{pmatrix}.$$

Der adjungierte Spinor, definiert durch

$$\overline{\psi} := \psi^\dagger \gamma^0,$$

erfüllt die adjungierte Dirac-Gleichung:

$$\overline{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) = 0.$$

Das Produkt $\overline{\psi}\psi$ ist im Gegensatz zu $\psi^\dagger\psi$ lorentzinvariant (Lorentz-Skalar).

Die lorentzinvariante Lagrangedichte für freie Dirac-Teilchen ist damit:

$$\boxed{\mathcal{L} = \overline{\psi}(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x)}$$

Variation $\delta\overline{\psi}$ liefert als Feldgleichung die Dirac-Gleichung.

Variation $\delta\psi$ liefert als Feldgleichung die adjungierte Dirac-Gleichung.

Lösungen der freien Dirac-Gleichung sind ebene Wellen mit 4 internen Spinorfreiheitsgraden,
zu zwei (positiven und negativen Energieeigenwerten $E = \pm\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ und zu zwei Spineinstellungen $s = 1, 2$ (up/down bzgl. der z-Richtung),
die ein Orthonormalsystem bilden:

$$\psi^+(x) = u_s(p)e^{-ip_\mu x^\mu}; \;\; \psi^-(x) = v_s(p)e^{+ip_\mu x^\mu}$$

mit den Spinorkomponenten

$$u_1(p) = \sqrt{\frac{E+m}{V}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x+ip_y}{E+m} \end{pmatrix}; \; u_2(p) = \sqrt{\frac{E+m}{V}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x-ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix};$$

$$v_1(p) = \sqrt{\frac{|E|+m}{V}} \begin{pmatrix} \frac{p_x-ip_y}{|E|+m} \\ \frac{-p_z}{|E|+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; v_2(p) = \sqrt{\frac{|E|+m}{V}} \begin{pmatrix} \frac{p_z}{|E|+m} \\ \frac{p_x+ip_y}{|E|+m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dabei ist $p_\mu x^\mu = Et - \vec{p} \cdot \vec{x}$ und $u_s^\dagger u_s = v_s^\dagger v_s = 2E/V$.

Interpretation der Zustände:

- $u_s(p)$ $(E > 0)$: (in pos. Zeitrichtung) einlaufendes Fermion (am WW-Punkt vernichtet).

- $\overline{u}_s(p)$ $(E > 0)$: (in pos. Zeitrichtung) auslaufendes Fermion (am WW-Punkt erzeugt).

- $v_s(p)$ $(E < 0)$: (in neg. Zeitrichtung) einlaufendes Anti-Fermion (am WW-Punkt erzeugt).

- $\overline{v}_s(p)$ $(E < 0)$: in neg. Zeitrichtung auslaufendes Anti-Fermion (am WW-Punkt vernichtet).

Bei Wahl der Spinrichtung entlang der Impulsrichtung (Spin-Quantisierungsachse) können folgende Spinzustände definiert werden:

Linkshändige Fermionen $\psi_L = P_L\psi$: Spin und Impuls antiparallel.

Rechtshändige Fermionen $\psi_R = P_R\psi$: Spin und Impuls parallel.

Die Projektionsoperatoren $P_L = P_L^2$ und $P_R = P_R^2$, mit $P_L P_R = P_R P_L = 0$ und $P_R + P_L = 1$, sind gegeben durch:

$$P_L = \frac{1-\gamma_5}{2} = P_L^\dagger, \quad P_R = \frac{1+\gamma_5}{2} = P_R^\dagger.$$

Dabei ist der Chiralitätsoperator γ_5 ist gegeben durch

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \gamma_5^\dagger$$

mit den Eigenzuständen (Chiralitätsspinorzustände):

$$\gamma_5\psi_R = \psi_R, \quad \gamma_5\psi_L = -\psi_L,$$

wobei

$$\begin{aligned}
\overline{\psi}_L &= (P_L\psi)^\dagger\gamma^0 = \overline{\psi}P_R, \\
\overline{\psi}_R &= (P_R\psi)^\dagger\gamma^0 = \overline{\psi}P_L.
\end{aligned}$$

Die Helizität $h = \frac{\vec{s}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|}$ hängt vom Bezugsystem ab, außer für masselose Teilchen.

Es gilt:

- $\gamma_5^2 = I$.
- $\gamma^\mu \gamma_5 + \gamma_5 \gamma^\mu = 0$.
- $\gamma_5 P_R = -P_R$, $\gamma_5 P_L = -P_L$.
- $\gamma^\mu P_L = P_R \gamma^\mu$, $\gamma^\mu P_R = P_L \gamma^\mu$.

In der Pauli-Dirac-Darstellung (γ^0 diagonal) hat γ_5 die Form

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}.$$

1.1.4.4 Photonen: Elektromagnetisches Feld

Maxwell-Gleichungen $(c = 1)$:

(Maxwell 1864)

(i) $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0; \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t};$ (Randbedingungen)

(ii) $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0; \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t};$ (freies Feld)

(ii′) $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho; \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}.$ (mit Quellen)

mit der elektrischen Ladungsdichte $\rho(x)$ und der elektrischen Stromdichte $\vec{j}(x)$, für die ein Erhaltungssatz (Kontinuitätsgleichgung) gilt:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0,$$

der unmittelbar aus (ii′) durch Berechnung des Gradienten folgt.

Die Gleichungen (i) für die elektromagnetischen Felder $\vec{E}(x)$ und $\vec{B}(x)$ sind automatisch erfüllt, wenn diese durch ein skalares Potential $\Phi(x)$ und ein Vektorpotential $\vec{A}(x)$ ausgedrückt werden:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}; \qquad \vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

Eichinvarianz der Lösungen der Maxwell-Gleichungen

unter den Transformationen

$$\Phi(x) \longrightarrow \Phi(x) - \frac{\partial\chi(x)}{\partial t}; \qquad \vec{A}(x) \longrightarrow \vec{A}(x) + \vec{\nabla}\cdot\chi(x)$$

mit einem beliebigen skalaren Feld $\chi(x)$.

Die Maxwell-Gleichungen sind Lorentz-kovariant. Die Lichtgeschwindigkeit ist in allen bewegten Bezugssystemen die gleiche (Entdeckung der Speziellen Relativitätstheorie 1905).

Relativistisch kovariante Schreibweise:

Mit dem 4-Potential $A^\mu = (\Phi, \vec{A})$ und dem antisymmetrischen Feldtensor, definiert durch dessen 4-Rotation

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu = -F^{\nu\mu}$$

mit

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ -E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix},$$

erhalten die Maxwell-Gleichungen die Form:

(i) $\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} = 0;$

(ii) $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0;$

(ii′) $\partial_\mu F^{\mu\nu} = -j^\nu.$

Aus (ii′) und der Definition des Feldtensors (aufgrund von (i)) folgt durch Anwendung der 4-Divergenz unmittelbar die kovariante Form der Kontinuitätsgleichung zur Ladungserhaltung:

$$\partial_\nu j^\nu = -\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$$

mit der elektrischen 4-Stromdichte $j^\mu(x) = (\rho(x), \vec{j}(x))$.

Die Erhaltung der elektrischen Ladung ist damit mit der Eichsymmetrie der elektromagnetischen Feldgleichungen verbunden.

Die Lösungen der Maxwellgleichungen für die Felder sind invariant unter der Eichtransformation des 4-Potentials:

$$A^\mu(x) \longrightarrow A^\mu(x) - \partial^\mu \chi(x).$$

Potentialschreibweise der Maxwell-Gleichungen

durch Einsetzen der Definition des Feldtensors:

$$\begin{array}{rrcl}
(\mathrm{ii}') & -\partial_\mu F^{\mu\nu} & = & \partial_\mu F^{\nu\mu} \equiv \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) \\
& & = & \partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\
& & = & \Box A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) = j^\nu; \\
(\mathrm{ii}) & & & \Box A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) = 0.
\end{array}$$

Ohne Quellen (im Vakuum) erhält man durch geeignete Wahl der Eichung (Lorentz-Eichung)

$$A^\mu \longrightarrow A^{\mu\prime} = A^\mu - \partial^\mu \chi,$$

so daß

$$\partial_\mu A^{\mu\prime} \equiv 0,$$

d.h. Wahl des Feldes $\chi(x)$, so daß

$$\partial_\mu \partial^\mu \chi \equiv \Box \chi = \partial_\mu A^\mu.$$

Damit gilt die bekannte Wellengleichung für das elektromagnetische Potential:

$$\Box A^\nu = 0.$$

Jede Komponente von $A^\nu(x)$ erfüllt daher die Klein-Gordon-Gleichung für ein masseloses Teilchen.

Lösungen der freien elektromagnetischen Wellengleichung

sind ein- bzw. auslaufende ebene Wellen

$$\begin{aligned} A^{\mu+}(x) &= \frac{1}{\sqrt{V}}\varepsilon_\mu(k,\lambda)e^{-ik_\mu x^\mu}, \\ A^{\mu-}(x) &= \frac{1}{\sqrt{V}}\varepsilon^*_\mu(k,\lambda)e^{ik_\mu x^\mu} \end{aligned}$$

mit dem Wellenvektor $k^\mu = p^\mu/\hbar$ mit $k_\mu k^\mu = k^2 = m_\gamma^2 \equiv 0$ und 2 transversalen Polarisationsfreiheitsgraden:

$$\varepsilon_\mu(\lambda = \pm 1) = (\varepsilon^0, \vec{\varepsilon}) = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, \pm i, 0)$$

(zirkulare Polarisation mit Helizitäten $\lambda = \frac{\vec{k}\cdot\vec{s}}{|\vec{k}||\vec{s}|} = \pm 1$, $\vec{k}||\hat{z}$). Aus der Bedingung $\partial_\nu A^\nu = 0$ für die Lorentz-Eichung folgt die Randbedingung $k_\mu \varepsilon^\mu = 0$.

Die Funktion $\chi(x)$ der Lorentz-Eichung kann so gewählt werden, daß auch $\vec{k}\cdot\vec{\varepsilon} = 0$,

d.h. es gibt aufgrund der Eichinvarianz keine longitudinale Polarisation ($\lambda = 0$) der elektromagnetischen Wellen bzw. der masselosen Photonen, sie läßt sich durch Eichtransformation eliminieren.

Die Maxwell-Gleichungen beschreiben also ein Photonfeld mit Spin 1 und Masse 0, das nur zwei Helizitätszustände parallel und antiparallel zum Wellenvektor besitzt.

Die Masselosigkeit des Photons und das Verschwinden des transversalen Helizitätsfreiheitsgrads des 4-Vektorfelds des Photons sind beides miteinander verknüpfte Konsequenzen der Eichfreiheit.

Die elektrisch neutralen Photonen sind mit ihren Antiteilchen identisch.

Das gleiche gilt für reelle, massive Bosonfelder mit Spin 0 (Higgs-Boson).

Lagrangedichte für das elektromagnetische Feld

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{4}(\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu)(\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu)\end{aligned}$$

ergibt nach den Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\nu} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}\right) = 0$$

die Feldgleichungen im Vakuum und

$$\boxed{\mathcal{L} = -\tfrac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - j^\nu A_\nu}$$

die Feldgleichungen mit Quellen, wie leicht zu verifizieren ist.

1.1.4.5 Massive Vektorfelder

Durch Einführung eines lorentzinvarianten Masseterms in der Lagrangedichte analog zur Klein-Gordon-Gleichung,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}M^2 A^\nu A_\nu$$

erhält man die Wellengleichung (Proca-Gleichung) für Spin-1 Bosonen mit Masse M (z.B. $W^\pm$, Z^0):

$$\begin{aligned} \partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + M^2 A^\nu &= 0, \\ \Box A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) + M^2 A^\nu &= 0. \end{aligned}$$

Die 4-Divergenz des ersten Terms der Gleichung verschwindet, so daß für massive Vektorfelder immer gilt $\partial_\mu A^\mu \equiv 0$, d.h. die Eichfreiheit ist durch Fixierung der Eichung verloren. Damit gilt für jede Komponente des Feldes $A^\nu(x)$ die Klein-Gordon-Gleichung mit Masse:

$$[\Box + M^2]A^\nu = 0$$

mit der Nebenbedingung $\partial_\mu A^\mu = 0$. Der Massenterm in $\mathcal{L}$ ist offensichtlich nicht invariant unter der Eichtransformation des 4-Potentials.

Um die Eichinvarianz auch für massive Vektorbosonen zu retten, wird der Higgs-Mechanismus mit spontaner Brechung der Eichsymmetrie benötigt.

Die ebenen Wellenlösungen für freie massive Vektorbosonen besitzen im Gegensatz zum Photon 3 Polarisationfreiheitsgrade mit zusätzlicher longitudinaler Polarisation bzw. transversaler Helizität $\lambda = 0$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\mu(k; \lambda = \pm 1) &= \mp \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, \pm i, 0); \\ \varepsilon_\mu(k; \lambda = 0) &= \mp \frac{1}{M}(k, 0, 0, E). \end{aligned}$$

mit $k_\mu = (E, 0, 0, k)$, $k_\mu k^\mu = E^2 - k^2 = M^2$

und $k_\mu \varepsilon^\mu = 0$.