0.4pt0pt 0pt0pt 0pt1pt 0pt1pt

1.2 Eichsymmetrien und Wechselwirkungen

Für Quantenfelder können die Gesetze der elektromagnetischen Wechselwirkung aus einem Eichprinzip hergeleitet werden (H. Weyl 1921, 1929).

1.2.1 Globale Eichinvarianz

Die Erwartungswerte quantenmechanischer Observabler (einschließlich der Lagrangefunktion!)

$$< \mathcal{O} >= \int \psi^* \mathcal{O} \psi$$

sind invariant unter globalen Phasenrotationen der Wellenfunktion

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = e^{iQ\alpha}\psi(x).$$

Nur relative Phasen zwischen Zuständen sind meßbar.

Die Invarianz der Lagrangefunktion (Forminvarianz der Wellengleichung) unter Phasentransformationen entspricht einer globalen U(1)-Symmetrie, genannt "Eichsymmetrie", die nach dem Noether'schen Theorem (E. Noether, 1918) zur Erhaltung der Wahrscheinlichkeit und von Ladungen (inneren Quantenzahlen der Teilchenzustände) führt.

Invarianz der Lagrangedichte $\mathcal{L}(\phi, \phi^*, \partial_\mu\phi, \partial_\mu\phi^*)$ für skalare, komplexe Felder unter $U(1)$-Eichtransformationen

$$\begin{aligned}
\phi(x) &\longrightarrow \phi'(x) = e^{iQ\alpha}\phi(x), \\
\phi^*(x) &\longrightarrow \phi^{*\prime}(x) = e^{-iQ\alpha}\phi^*(x).
\end{aligned}$$

d.h. auch unter infinitesimalen Variationen der Felder

$$\begin{aligned}
\phi(x) &\longrightarrow \phi'(x) = \phi(x) + \delta\phi(x) = \phi(x) + iQ(\delta\alpha)\phi(x), \\
\phi^*(x) &\longrightarrow \phi^{*\prime}(x) = \phi^*(x) + \delta\phi^*(x) = \phi^*(x) - iQ(\delta\alpha)\phi^*(x)
\end{aligned}$$

bedeutet für beliebige ortsunabhängige $\delta\alpha$, (d.h. es gilt $\delta(\partial_\mu\phi) = iQ(\delta\alpha)\partial_\mu\phi$):

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^*}\delta\phi^* + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^*)}\delta(\partial_\mu\phi^*) \\
&= \left[\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right]iQ(\delta\alpha)\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}iQ(\delta\alpha)\partial_\mu\phi + c.c. \\
&= iQ(\delta\alpha)\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\phi\right] - iQ(\delta\alpha)\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^*)}\phi^*\right] \equiv 0,
\end{aligned}$$

unter Verwendung der Euler-Lagrange-Gleichungen.

Es gilt folglich die Kontinuitätsgleichung

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{\partial}{\partial t}\rho + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$$

für die 4-Stromdichte $j^\mu = (\rho, \vec{j})$ der Ladung $Q = \int d^3x\rho$:

$$j^\mu \equiv -iQ\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\phi - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^*)}\phi^*\right)$$

so daß die Ladung Q in einem abgeschlossenen System eine Erhaltungsgröße ist:

$$\frac{d}{dt}Q = 0.$$

1.2.2 Lokale Eichsymmetrie

Die quantenmechanischen Erwartungswerte sollen invariant sein unter lokaler Phasenwahl der Wellenfunktionen oder Felder, d.h. unabhängig an verschiedenen Raum-Zeit-Punkten:

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = e^{iQ\alpha(x)}\psi(x).$$

Ortsabhängige Phasentransformationen (lokale Eichtransformationen) bedeuten für die Ableitungen der Felder in den Wellengleichungen:

$$\partial_\mu\psi(x) \longrightarrow \partial_\mu\psi'(x) = e^{iQ\alpha(x)}[\partial_\mu\psi(x) + iQ(\partial_\mu\alpha(x))\psi(x)].$$

Invarianz der Lagrangedichte und Forminvarianz der Wellengleichungen kann erreicht werden, indem die gewöhnliche Ableitung durch eine eich-kovariante Ableitung ersetzt wird:

$$\partial_\mu \longrightarrow D_\mu \equiv \partial_\mu + ieQA_\mu(x),$$

wobei $q = eQ$ die elektrische Ladung des Feldes $\psi(x)$ ist ($e =$ Elementarladung, $Q =$ Ladungsquantenzahl) und $A_\mu(x)$ das 4-Potential des elektromagnetischen Feldes, das sog. Eichvektorfeld zur Eichgruppe U(1) mit Spin 1, das unter den Phasenrotationen transformiert wie

$$A_\mu(x) \longrightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x)$$

($\equiv$ Eichtransformation des elektromagnetischen Feldes).

Damit gilt

$$
\begin{aligned}
D_\mu \psi(x) &= (\partial_\mu + ieQA_\mu)\psi \longrightarrow \\
D'_\mu \psi'(x) &= (\partial_\mu + ieQA'_\mu(x))e^{iQ\alpha(x)}\psi(x) \\
&= e^{iQ\alpha(x)}[\partial_\mu + iQ\partial_\mu\alpha(x) + ieQA_\mu(x) - iQ\partial_\mu\alpha(x)]\psi(x \\
&= e^{iQ\alpha(x)}[\partial_\mu + ieQA_\mu(x)]\psi(x) \equiv e^{iQ\alpha(x)} D_\mu\psi(x)
\end{aligned}
$$

und $\psi^* D_\mu \psi$ ist invariant unter lokalen Phasentransformationen.

Dies wurde durch die Einführung einer Wechselwirkung für das Feld ψ, der elektromagnetischen Wechselwirkung für die U(1)-Phasentransformationen, erreicht.

Die globale U(1)-Symmetrie der Feldgleichungen für $\psi(x)$ führt zur Erhaltung der elektrischen Ladung, der Quellen des Eichfeldes, auch bei Wechselwirkung mit dem elektromagnetischen Feld. Die Eichfeldgleichungen mit der zugehörigen Eichinvarianz enthalten automatisch Ladungserhaltung.

Die Wechselwirkung (Kopplungsterme zwischen Materiefeld $\psi(x)$ und Eichwechselwirkungsfeld $A_\mu(x)$) ist (eindeutig) festgelegt durch die Forderung der lokalen Phaseninvarianz, das lokale Eichprinzip, d.h. durch die kovariante Ableitung

$$D_\mu \psi(x) = \partial_\mu \psi(x) + ieQA_\mu(x)\psi(x)$$

(minimale eichinvariante Kopplung).

Beispiel 1:

Elektromagnetische Wechselwirkung zwischen Fermionen (Elektronen) und dem Photonfeld (QED):

Die Lagrangedichte für das freie Dirac-Feld

$$\mathcal{L}_{\text{frei}} = \overline{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi$$

wird ersetzt durch die lokal eichinvariante Form mit minimaler Kopplung

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \overline{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi \\
&= \overline{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - eQA_\mu \overline{\psi}\gamma^\mu\psi \\
&= \mathcal{L}_{\text{frei}} - j^\mu A_\mu
\end{aligned}$$

mit dem (erhaltenen) elektromagnetischen Strom $j^\mu = eQ\overline{\psi}\gamma^\mu\psi$.

Zusammen mit der Lagrangedichte für das freie elektromagnetische Feld ist die Lagrangedichte der Quantenelektrodynamik:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{QED} &= \mathcal{L}_{\text{frei}}^{\text{Photon}} + \mathcal{L}_{\text{frei}}^{\text{Fermion}} + \mathcal{L}_{\text{WW}} \\
&= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \overline{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - j^\mu A_\mu \\
&= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \overline{\psi}i\gamma^\mu \partial_\mu\psi - m\overline{\psi}\psi - j^\mu A_\mu \\
&= \mathcal{L}_{\text{kin}}^{\text{Photon}} + \mathcal{L}_{\text{kin}}^{\text{Fermion}} + \mathcal{L}_{\text{Masse}}^{\text{Fermion}} + \mathcal{L}_{\text{WW}} = T - V.
\end{aligned}$$

Die Beiträge zur gesamten Lagrangedichte sind additiv und erfüllen die U(1)-Eichinvarinz.

Beispiel 2:

Elektromagnetische Wechselwirkung zwischen geladenen Spin-0-Bosonen und dem Photonfeld:

Die Lagrangedichte für das freie Klein-Gordon-Feld

$$\mathcal{L}_{\text{frei}} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$$

wird ersetzt durch die lokal eichinvariante Form mit minimaler Kopplung ($q = eQ$)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (D_\mu \phi)^* D^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi \\
&= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi \\
&\quad -iq[\phi^* \partial^\mu \phi - (\partial^\mu \phi^*)\phi] A_\mu + q^2 A_\mu A^\mu \phi^* \phi \\
&= \mathcal{L}_{\text{frei}} - j^\mu A_\mu + q^2 A_\mu A^\mu \phi^* \phi \\
&= \mathcal{L}_{\text{kin}}^{\text{Photon}} + \mathcal{L}_{\text{kin}}^{\text{Boson}} + \mathcal{L}_{\text{Masse}}^{\text{Boson}} + \mathcal{L}_{\text{WW}}.
\end{aligned}$$

Dabei ist $j^\mu = iq[\phi^* \partial^\mu \phi - (\partial^\mu \phi^*)\phi]$ der erhaltene elektromagnetische Strom für die freien Bosonen.

Nach dem Noether-Theorem hat der erhaltene Strom für die an das Photonfeld koppelnden Bosonen eine andere Form. Der Wechselwirkungsterm erhält einen zusätzlichen Beitrag in der Form einer Kontaktwechselwirkung zwischen Photonen und Materie-Bosonen (eich- und lorentzinvariant).

1.2.3 Nicht-Abelsche Eichsymmetrien

Beispiel:

Erweiterung der Isospinsymmetrie $SU(2)$ zu einer lokalen Eichsymmetrie (Yang, Mills 1954):

Freie Lagrangefunktion für Nukleonen (Proton, Neutron):

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi} I (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi.$$

Proton und Neutron bilden dabei ein Isotopenspindublett (2-dimensionale Darstellung der Isospingruppe).

$$\psi = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}.$$

Beide Fermionfelder $p(x)$ und $n(x)$ sind jeweils 4-Spinoren.

Die freie Lagrangefunktion ohne Wechselwirkung ist diagonal im 2-dimensionalen Isospinraum (2-dim. Einheitsmatrix I) und invariant unter globalen Isospinrotationen

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = e^{i\vec{\alpha}\cdot\vec{I}}\psi(x) = e^{i\vec{\alpha}\cdot\vec{\tau}/2}\psi(x),$$

wobei $\vec{\tau}$ der 3-Isovektor der Pauli'schen 2×2 Spinmatrizen ist (die drei Generatoren der Isospingruppe $SU(2)$, $\vec{I} = \vec{\tau}/2$, in der fundamentalen 2-dimensionalen Darstellung; Bezeichnung $\vec{\tau}$ statt $\vec{\sigma}$ für den Isospin).

Wie bei der $U(1)$-Symmetrie der elektromagnetischen Wechselwirkung:

Übergang zu einer lokalen $SU(2)$-Eichsymmetrie, d.h. Forderung nach Invarianz der Lagrangefunktion und Feldgleichungen unter lokalen Eichtransformationen

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = e^{i\vec{\alpha}(x)\cdot\vec{\tau}/2}\psi(x) \equiv G(x)\psi(x).$$

Damit transformiert der 4-Gradient des Feldes wie

$$\partial_\mu\psi(x) \longrightarrow G(x)(\partial_\mu\psi(x)) + (\partial_\mu G(x))\psi(x).$$

$\Longrightarrow$ Einführen einer kovarianten Ableitung (kovariant unter den lokalen Eichtransformationen $G(x)$):

$$D_\mu(x) = I\partial_\mu + igB_\mu(x)$$

mit der 2×2-Einheitsmatrix I auf dem Isospinraum und einer Kopplungskonstanten g, die die Stärke der Eichwechselwirkung angibt.

Das Eichvektorfeld $B_\mu(x)$ ist eine 2×2-Matrix auf dem Isospinraum, definiert durch $(a = 1, 2, 3)$:

$$\begin{aligned} B^\mu(x) &= \frac{1}{2}\vec{\tau} \cdot \vec{b}^\mu(x) = \frac{1}{2}\tau_a b_a^\mu(x) \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} b_3^\mu(x) & b_1^\mu(x) - ib_2^\mu(x) \\ b_1^\mu(x) + ib_2^\mu(x) & -b_3^\mu(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit dem Isovektor $\vec{b}_\mu = (b_1^\mu, b_2^\mu, b_3^\mu)$ der drei Eichvektorfelder $b_i(x)$, die den drei Generatoren (Ladungsoperatoren) der $SU(2)$-Eichsymmetrie $\vec{I} = \vec{\tau}/2$ entsprechen.

Um die lokale nicht-Abelsche $SU(2)$-Eichsymmetrie zu erhalten, müssen also 3 neue Eichvektorpotentiale eingeführt werden, die 3 Eichbosonfeldern entsprechen, die die Eichwechselwirkungen vermitteln.

(Dies erinnert an die 3 Austauschteilchen $W^\pm$ und Z^0 der schwachen Wechselwirkung, die ebenfalls globale $SU(2)$-Symmetrie besitzt, aber an Quark- und Leptonfelder koppelt.)

Die kovariante Ableitung soll unter lokalen Eichtransformationen ebenso transformieren wie die Felder, um die lokale Eichinvarianz der Lagrangefunktion zu gewährleisten, d.h.

$$D_\mu\psi \longrightarrow D'_\mu\psi' = G(x)(D_\mu\psi).$$

Diese Forderung definiert das Transformationsverhalten der Eichvektorfelder:

$$\begin{aligned}
D'_\mu\psi' &= (\partial_\mu + igB'_\mu)\psi' \\
&= G(\partial_\mu\psi) + (\partial_\mu G)\psi + igB'_\mu(G\psi) \\
&\equiv G(\partial_\mu + igB_\mu)\psi \\
&= G(\partial_\mu\psi) + igG(B_\mu\psi)
\end{aligned}$$

und damit

$$igB'_\mu(G\psi) = igG(B_\mu\psi) - (\partial_\mu G)\psi$$

für beliebige Werte des Nukleonfelds ψ, d.h. nach Multiplizieren mit G^{-1}:

$$\begin{aligned}
B'_\mu &= GB_\mu G^{-1} + \frac{i}{g}(\partial_\mu G)G^{-1} \\
&= G\left[B_\mu + \frac{i}{g}G^{-1}(\partial_\mu G)\right]G^{-1}.
\end{aligned}$$

Dies ist die nicht-Abelsche Verallgemeinerung der $U(1)$-Eichtransformation des elektromagnetischen Potentials (Isoskalar), die analog lautet:

$$\begin{aligned}
A'_\mu &= G_{EM}A_\mu G_{EM}^{-1} + \frac{i}{eQ}(\partial_\mu G_{EM})G_{EM}^{-1} \\
&\equiv A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x)
\end{aligned}$$

mit der lokalen $U(1)$-Eichtransformation

$$G_{EM}(x) = e^{iQ\alpha(x)}.$$

1.2.4 Eichsymmetrien und Gruppentheorie

Eichsymmetrien werden durch sog. Lie-Gruppen beschrieben:

Gruppen von Transformationen $g(\alpha)$, die durch einen Satz kontinuierlicher Parameter α_a $(a = 1, ..., n)$ beschrieben werden und analytische Funktionen dieser Parameter sind.

Sie lassen sich aus infinitesimal kleinen Transformationen nahe der Einheitstransformation I,

$$\delta g = g(\delta\alpha) = I + i\delta\alpha^a T^a + \mathcal{O}(\delta\alpha^2),$$

zusammensetzen. T^a $(a = 1, ..., n)$ sind die Erzeugenden oder Generatoren der Gruppe.

Alle Gruppenelemente lassen sich in der Form

$$g(\alpha) = e^{i\alpha^a T^a}$$

darstellen (Phasentransformationen der Wellenfunktion).

Die Transformationen sind unitär, wenn die Erzeugenden hermitesch sind. Alle Darstellungen endlicher (endliche Zahl von Parametern) oder kompakter (beschränkter Parameterraum) Lie-Gruppen lassen sich darauf zurückführen (geeignete Parametrisierung).

Unitarität ist wegen der Erhaltung der Wahrscheinlichkeit eine Bedingung für Symmetrietransformationen von Zuständen in der Quantenmechanik.

Die hermiteschen Generatoren sind quantenmechanische Observable und Erhaltungsgrößen.

Jeder Satz von n linear unabhängigen Generatoren einer Lie-Gruppe erfüllt die Vertauschungsrelationen

$$[T^a, T^b] = T^a T^b - T^b T^a = i f^{abc} T^c$$

mit den i.a. komplexen Strukturkonstanten f^{abc} und $[T^a, T^b] = -[T^b, T^a]$.

Mit der Vertauschung als zusätzlicher Operation bilden die Generatoren eine sog. Lie-Algebra. Die Strukturkonstanten sind spezifisch für die Lie-Algebra. Sie hängen aber von der Wahl der unabhängigen Generatoren und damit der Parameter der Gruppe ab.

Die Zahl der unabhängigen Parameter bzw. der Generatoren (Ladungsoperatoren) heißt die Ordnung n einer Lie-Gruppe. Die maximale Anzahl der miteinander vertauschenden und damit simultan diagonalisierbaren Generatoren ist der Rang r der Gruppe.

Für das Standardmodell sind die folgenden Lie-Gruppen relevant:

1) die einzige kommutative oder Abelsche Lie-Gruppe U(1) der unitären 1-dim. Phasentransformationen mit Ordnung und Rang 1 und

2) die Gruppen $SU(N)$ $(N \geq 2)$ der speziellen unitären Transformationen N-dimensionaler komplexer Vektoren mit $U^\dagger U = 1$ und Det$(U) = 1$.
Sie erhalten das komplexe Betragsquadrat der Vektoren.

Die Generatoren $T = T^\dagger$ lassen sich darstellen als hermitesche $n \times n$-Matrizen mit Spur$(T) = 0$ auf einem n-dimensionalen Vektorraum (Darstellungsraum).
Die fundamentale Darstellung ist die mit der niedrigsten Dimension n. Sie entspricht den Multipletts der fundamentalen Teilchenzustände.

Es gibt $2N^2 - N^2 - 1 = N^2 - 1$ unabhängige Matrizen dieser Art und damit Generatoren und unabhängige Parameter der Gruppe. Für die Gruppen $SU(N)$ ist der Rang $N - 1$ und gibt gleichzeitig die Zahl der verschiedenen fundamentalen Darstellungen an.