1.5.1.5 Feynman-Regeln

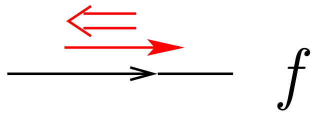
Regeln zur Berechnung der Streumatrixelemente $\mathcal{M}$ in der Stöhrungstheorie, die sich durch die sog. Feynman-Diagramme veranschaulichen lassen.

Faktoren im Streumatrixelement $\mathcal{M}$ für beliebige Streuprozesse bzw. Teichenzerfälle: mit Integration über die 4-Impulse der virtuellen Teilchen ($p^2 \neq m^2$) im Zwischenzustand:

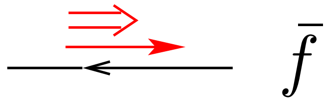
$\longrightarrow t$

QED:

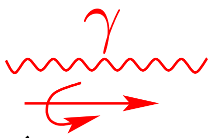
Ein- (auslaufendes) Fermion: $u_s(p)$ $(\overline{u}_s(p))$



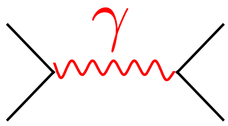
Ein- (auslaufendes) Anti-Fermion: $v_s(p)$ $(\overline{v}_s(p))$



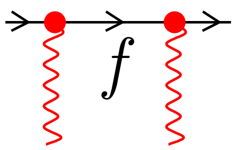
Ein- (auslaufendes) reelles Photon: $\varepsilon_\mu(k;\lambda)$ $(\varepsilon^*_\mu(k;\lambda))$



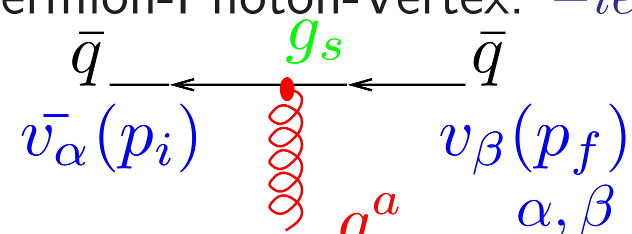
Virtuelles (intermediäres) Photon: $-i\dfrac{g_{\mu\nu}}{q^2+i\varepsilon}$



Virtuelles Fermion (Propagator): $i\dfrac{\not{p}+m}{p^2-m^2+i\varepsilon}$

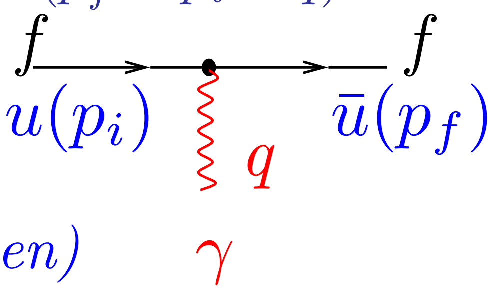


Fermion-Photon-Vertex: $-ieQ_f\gamma^\mu(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_f-p_i-q)$



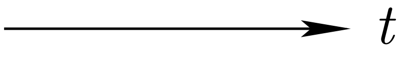
$\alpha,\beta = r,g,b$

a=1,...,8 (Gluonen)

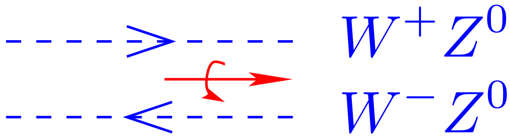


QCD:

Quark-Gluon-Vertex: $-i\frac{g_s}{2}\lambda^a_{\alpha\beta}\gamma^\mu(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_f-p_i-q)$

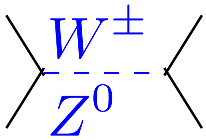


Elektroschwache Wechselwirkung:



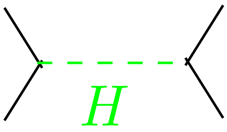
Ein- (auslaufendes) Z^0-, $W^\pm$-Boson: $\varepsilon_\mu(k;\lambda)$ $(\varepsilon^*_\mu(k;\lambda))$

Virtuelles Z^0-, $W^\pm$-Boson:



$$-i\frac{g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu/M^2}{q^2 - M^2 + i\varepsilon}$$

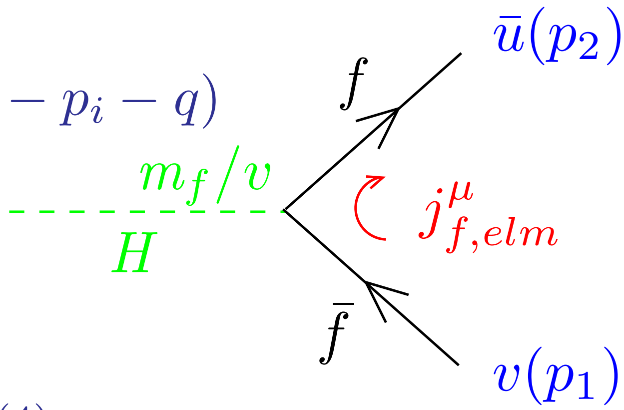
Virtuelles Higgs–Boson:



$$\frac{i}{q^2 - M_H^2 + i\varepsilon}$$

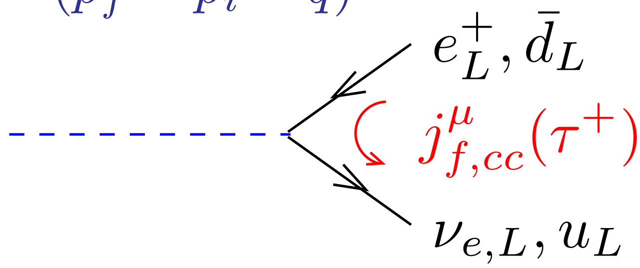
Fermion-Higgs-Boson-Vertex:

$$-i\frac{m_f}{v}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_f - p_i - q)$$



Fermion-$W^\pm$-Vertex:

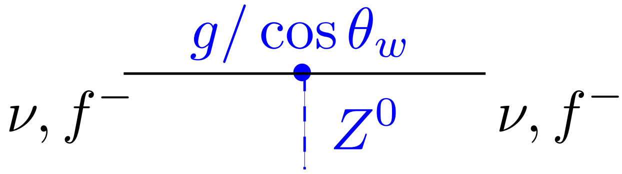
$$-i\frac{g}{2\sqrt{2}}\gamma^\mu(1-\gamma_5)(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_f - p_i - q)$$



Fermion-Z^0-Vertex:

$$-i\frac{g}{2\cos\theta_W}\gamma^\mu[c^f_L(1-\gamma_5) + c^f_R(1+\gamma_5)](2\pi)^4\delta^{(4)}(p_f - p_i - q)$$

Schwache NC-Kopplungskonstanten:



$$\text{Links}: \ \mathrm{c^f_L = I^3_f - Q_f \sin^2\theta_W}; \quad \text{rechts}: \ \mathrm{c^f_R = -Q_f \sin^2\theta_W};$$

$$\text{Vektor}: \ \mathrm{v_f = c^f_L + c^f_R = I^3_f - 2Q_f \sin^2\theta_W};$$

$$\text{Axialvektor}: \ \mathrm{a_f = c^f_L - c^f_R = I^3_f}.$$

$$\overline{u}\gamma^\mu c^f_L(1-\gamma_5) + c^f_R(1+\gamma_5)u = \overline{u}\gamma^\mu(v_f - a_f\gamma_5)u.$$

1.5.1.6 Fermion-Fermion-Streuung:

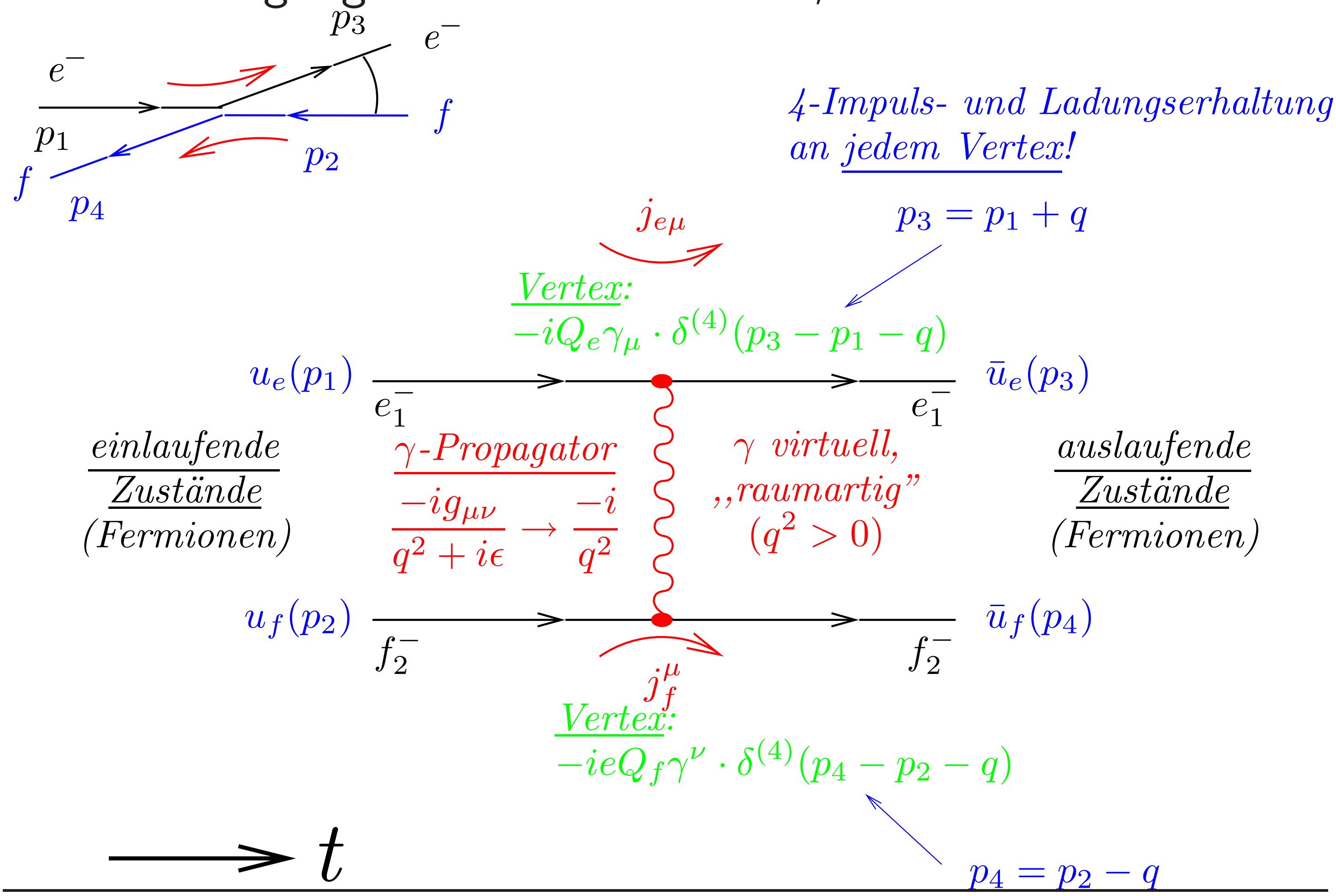
Das Übergangsmatrixelement $\mathcal{M}_{fi}$ für elektromagnetische Fermion (Elektron e)-Fermion (f)-Streuung unter Austausch eines (“virtuellen”) Photons ist demnach:

$$\mathcal{M}_{fi} = -ie^2 Q_e Q_f \overline{u}_e(p_3)\gamma_\mu u_e(p_1)\frac{1}{q^2}\overline{u}_f(p_4)\gamma^\mu u_f(p_2)$$

in 1. Ordnung der Störungsrechnung, 2. Ordnung in eQ bzw. 1. Ordnung in der Feinstrukturkonstanten $\alpha \equiv e^2/4\pi \approx 1/137$

$(\sigma(e^- f \to e^- f) \sim |\mathcal{M}_{fi}|^2 \sim e^4 Q_e^2 Q_f^2 \sim \alpha^2)$

und mit $q^2 = (p_3 - p_1)^2 \approx -2p_1p_3 = -4E_1E_3\sin^2(\theta/2)$ bei Vernachlässigung der Fermion-Massen; $\theta =$ Streuwinkel.



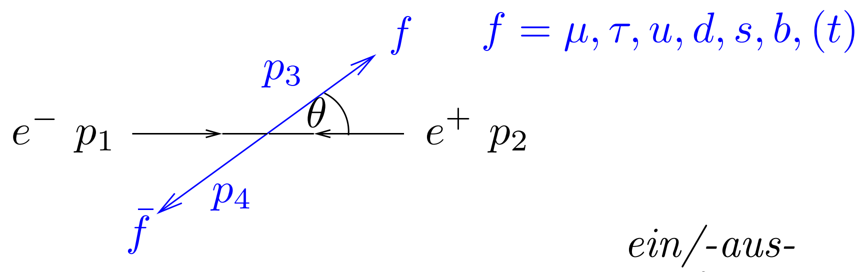
1.5.1.7 Elektron-Positron-Vernichtung

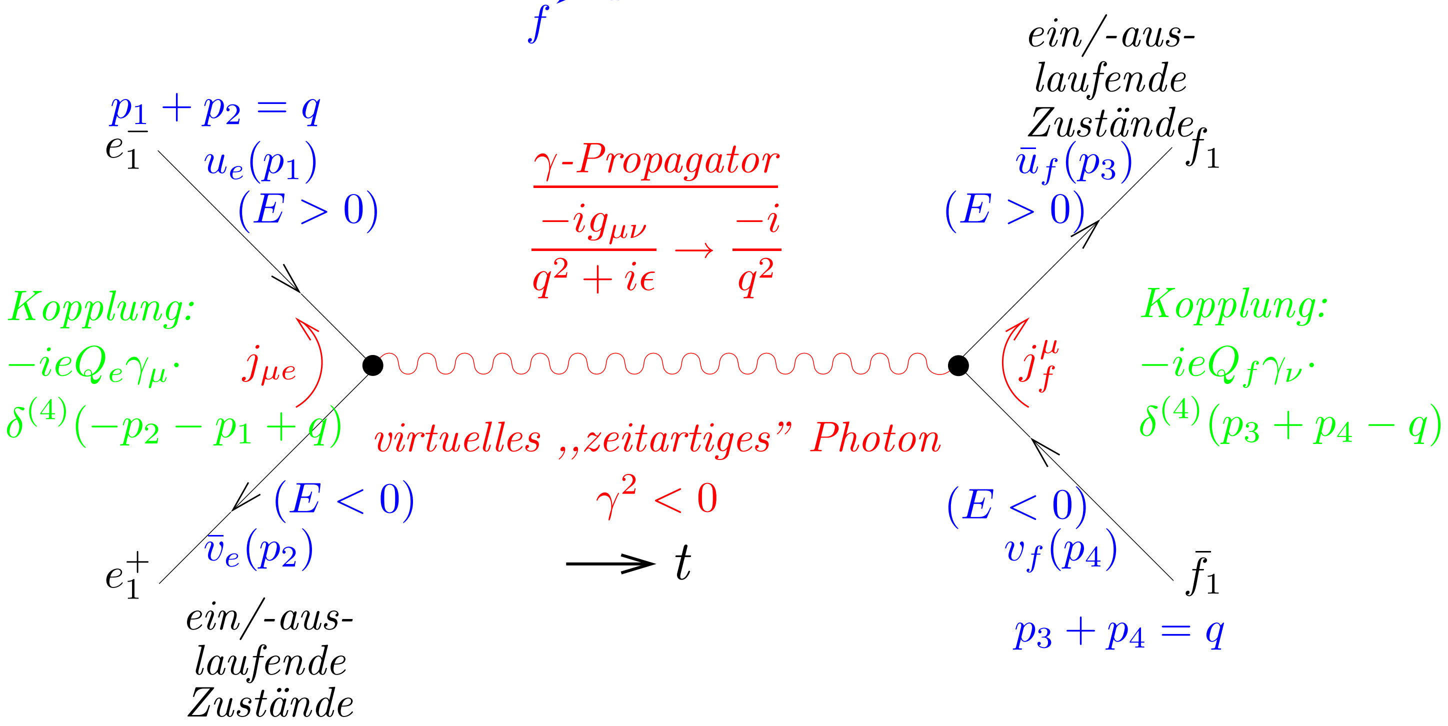
Nach den Feynman-Regeln ist das QED-Übergangsmatrixelement für die Elektron-Positron-Vernichtung unter Erzeugung eines Fermion-Antifermion-Paars (Erzeugung neuer Materie an e^+e^--Speicherringen):

$$\mathcal{M} = -ie^2 Q_e Q_f \overline{v}_e(p_2)\gamma_\mu u_e(p_1)\frac{1}{q^2}\overline{u}_f(p_3)\gamma^\mu v_f(p_4)$$

mit $q^2 = (p_1 + p_2)^2 =: s = E^2_{CMS}$ (Schwerpunktsenergie).

Im Schwerpunktsystem gilt: $\sqrt{s} = 2E_e$.





1.5.2 Wechselwirkungsprozesse im Standardmodell

1.5.2.1 Selbstwechselwirkung der Eichbosonen

Freie nicht-Abelsche $SU(2) \times U(1)$-Eichfelder:

$$\vec{W}_\mu, B_\mu \longrightarrow W_\mu^\pm, Z_\mu^0, A_\mu$$

mit der Lagrangedichte ($i = 1, ..., 3$)

$$\mathcal{L}_{SU(2)}^{\text{frei}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^i F^{i\mu\nu}$$

mit

$$F_{\mu\nu}^i = \partial_\nu W_\mu^i - \partial_\mu W_\nu^i + g\varepsilon^{ijk} W_\mu^j W_\nu^k$$

oder kurz:

$$\vec{F}_{\mu\nu} = \partial_\nu \vec{W}_\mu - \partial_\mu \vec{W}_\nu + g\vec{W}_\mu \times \vec{W}_\nu .$$

Die zugehörige Bewegungsgleichung nach dem Lagrange-Formalismus ist:

$$\partial_\mu \partial^\mu \vec{W}_\nu - \partial_\nu (\partial^\mu \vec{W}_\mu) = \vec{J}_\nu ,$$

eine Wellengleichung für jede Komponente (ohne Lorentz-Eichung) mit neuem Selbstwechselwirkungsterm (Quellterm)

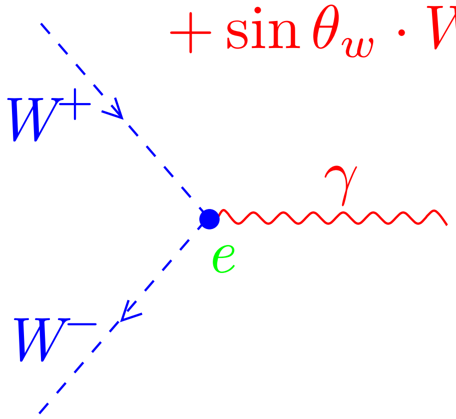
$$\begin{aligned} \vec{J}_\nu &= -g\vec{W}^\mu \times \vec{F}_{\mu\nu} \\ &= -g\big[\vec{W}^\mu \times \partial_\mu \vec{W}_\nu - \vec{W}^\mu \times \partial_\nu \vec{W}_\mu\big] + g^2 \vec{W}^\mu \times \big(\vec{W}_\mu \times \vec{W}_\nu\big), \end{aligned}$$

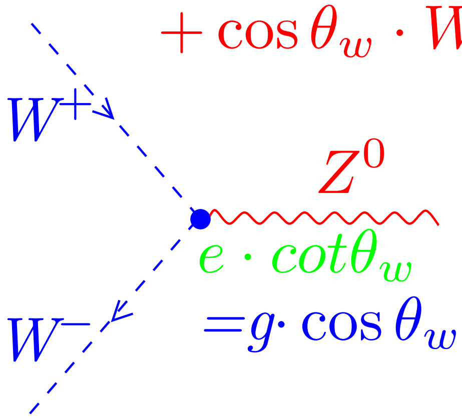
d.h. $\mathcal{L}_{\text{Selbst}-\text{WW}} = \vec{J}_\mu \vec{W}^\mu$.

$\Longrightarrow$ 3- und 4-Eichbosonkopplung ($\sim g$ bzw. $\sim g^2$).

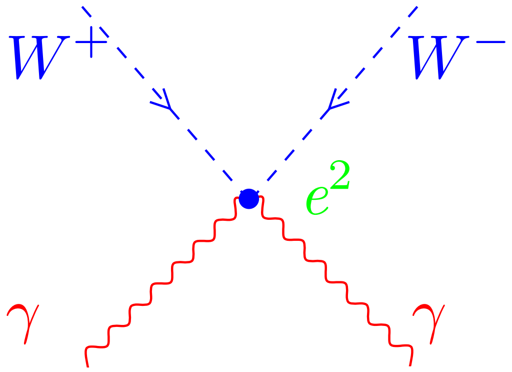
$\longrightarrow t$

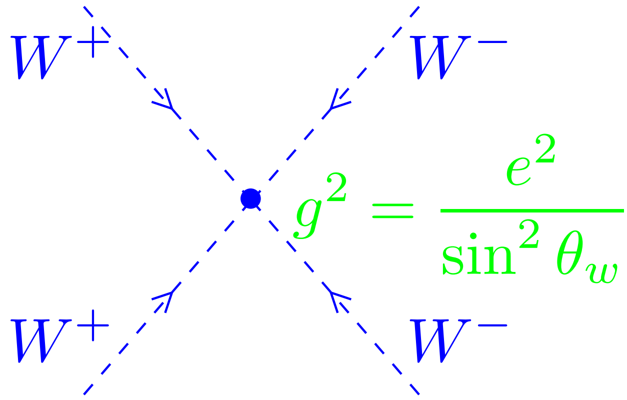
$$A_\mu = \cos\theta_w \cdot B_\mu + \sin\theta_w \cdot W^0_\mu \qquad Z^0_\mu = -\sin\theta_w \cdot B_\mu + \cos\theta_w \cdot W^0_\mu$$

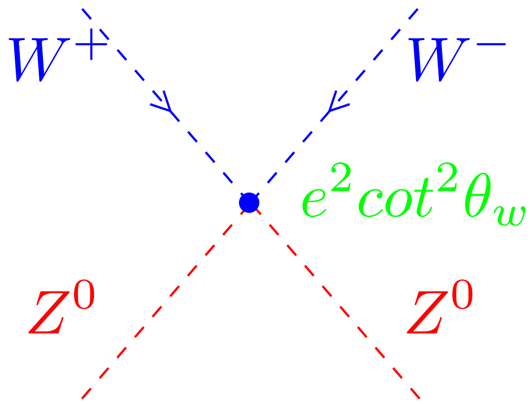


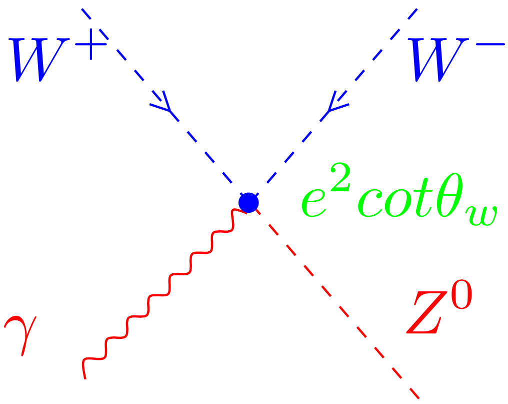


$\gamma : \propto e$ (e.m.)
$Z^0 : \propto e cot\theta_w$ (schwach)
$W^\pm : \propto g^2$ (schwach)



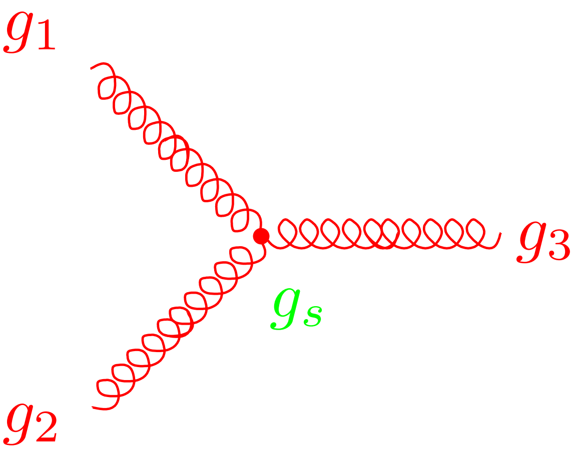


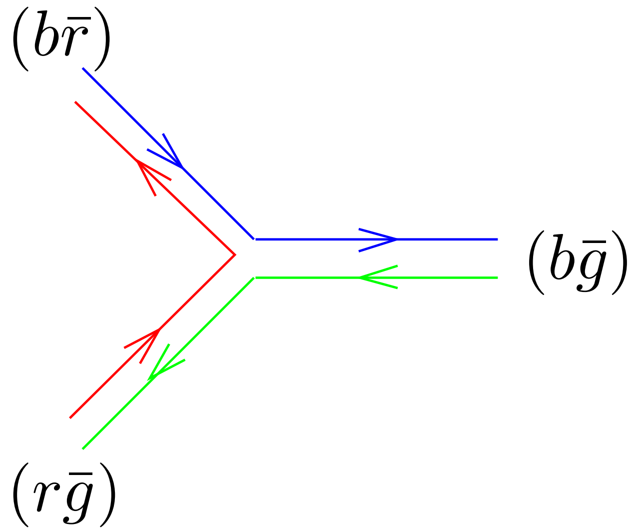


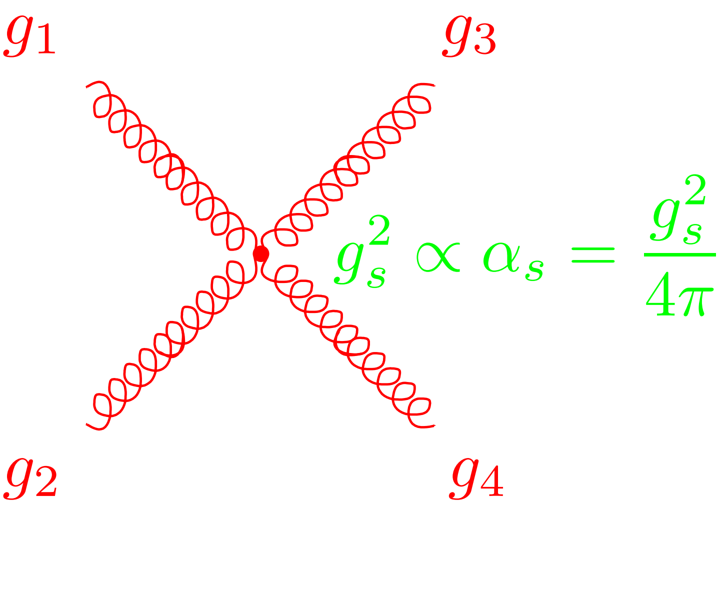


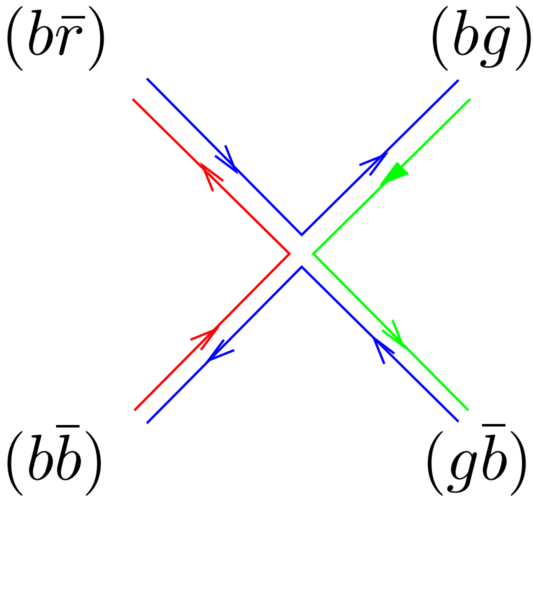
Ebenso die Selbstwechselwirkung der Gluonen (QCD), die für das Confinement der Quarks in den Hadronen verantwortlich ist:

$$\longrightarrow t$$



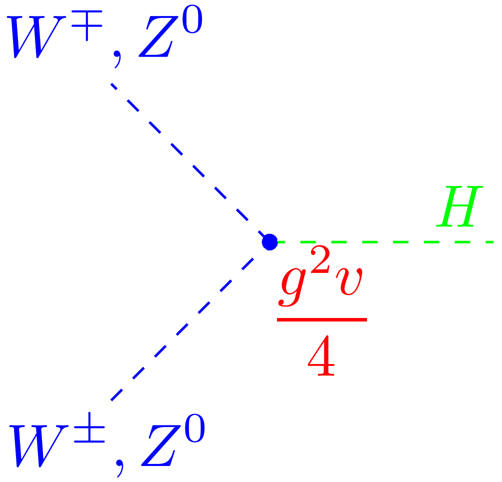


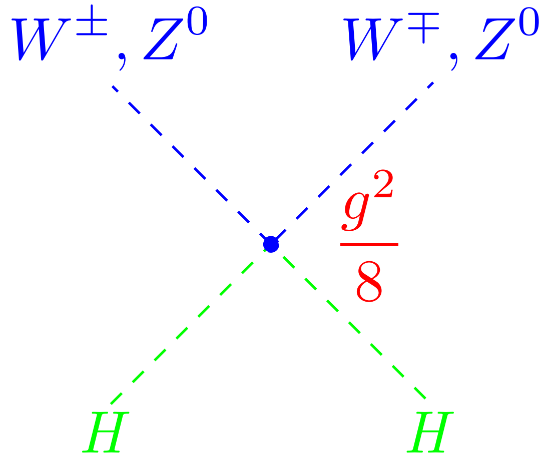




1.5.2.2 Higgs-Eichboson-Wechselwirkung

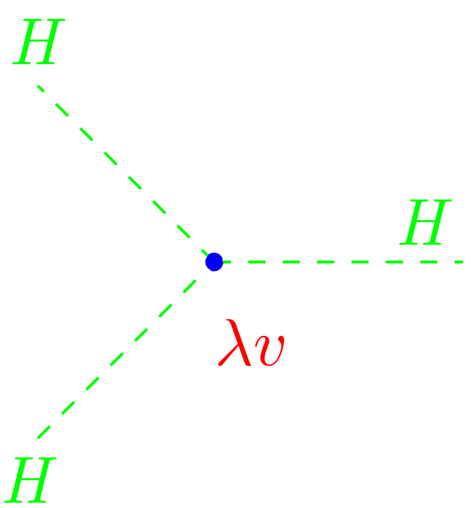
$$\mathcal{L}_{WW} = \frac{g^2}{8} \cdot (H^2 + 2vH)\left[2W_\mu^+ W^{\mu-} + \frac{1}{\cos^2\theta_W} Z_\mu^0 Z^{\mu 0}\right]$$

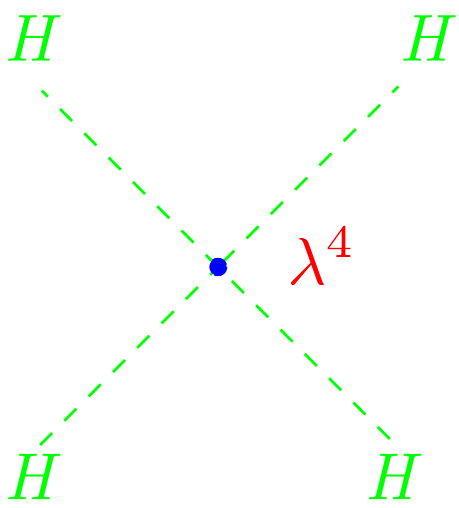




1.5.2.3 Selbstwechselwirkung des Higgs-Bosons

$$\mathcal{L}_{WW} = -\lambda v H^3 - \frac{\lambda}{4} H^4$$



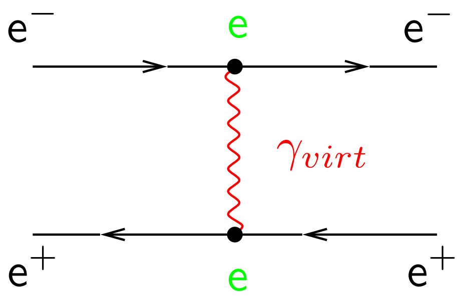


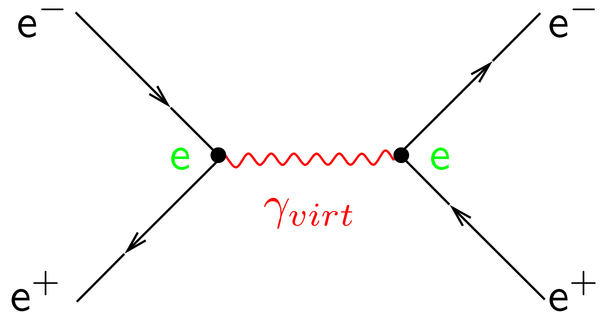
1.5.2.4 QED-Prozesse

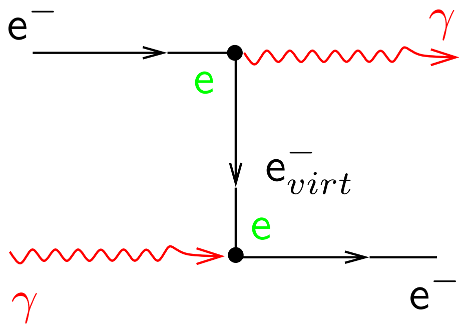
$\longrightarrow t$

Elektron-Positron-Streuung $\sigma \propto \alpha^2 \propto e^4$

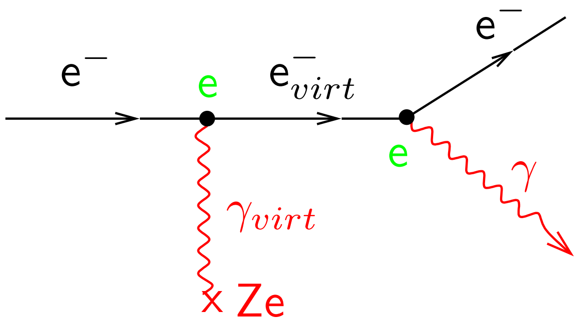
(Bhabha-Streuung)





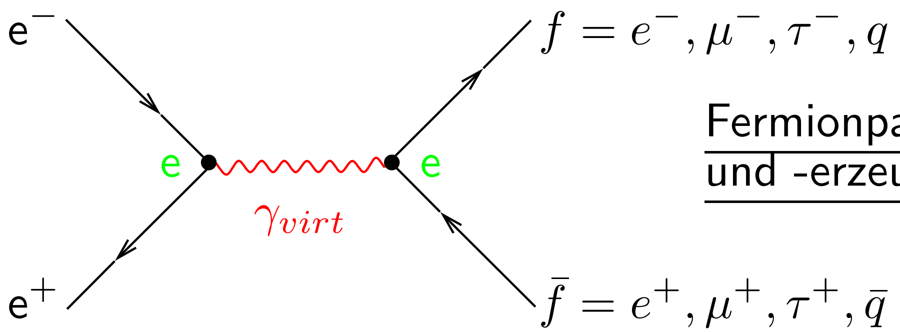


Elektron-Photon-Compton-Streuung: $\sigma \propto \alpha^2$



Bremsstrahlung:

$\sigma \propto \alpha^2$



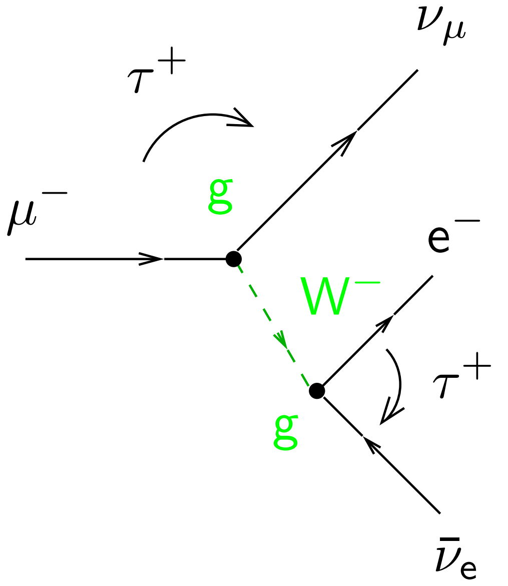
Fermionpaarvernichtung und -erzeugung:

$\sigma \propto \alpha^2$

1.5.2.5 QCD-Prozesse

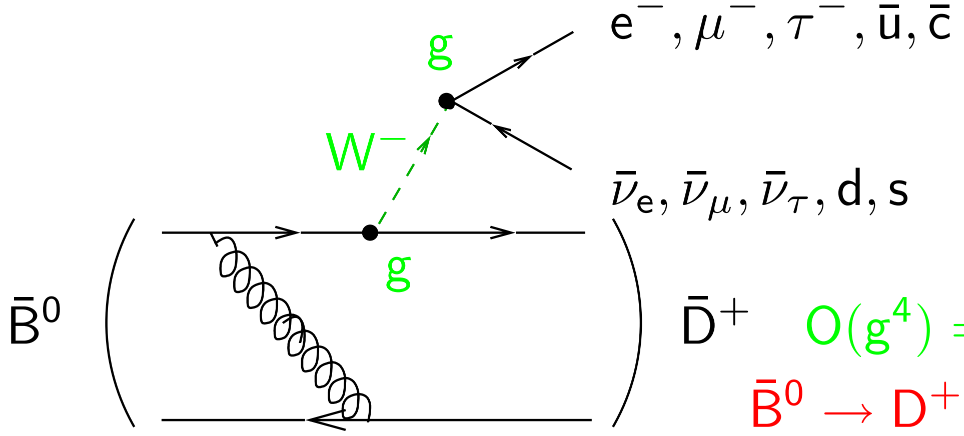
1.5.2.6 Schwache Prozesse

Schwache Zerfälle (CC)



$\mu^- \longrightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$

$O(g^4) = O(G_F^2)$

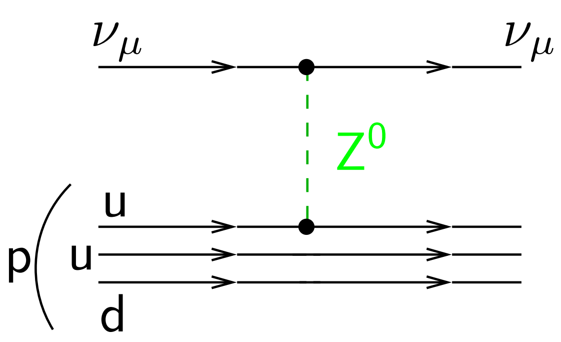


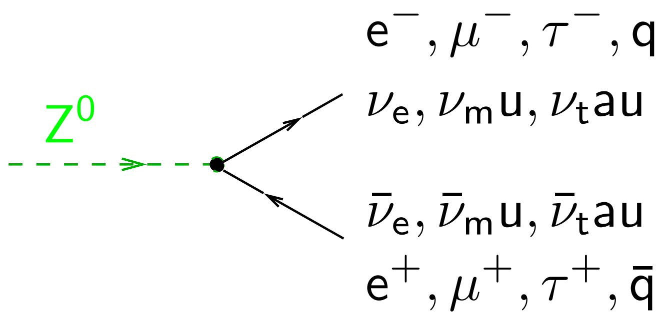
$O(g^4) = O(G_F^2)$

$\bar{B}^0 \to D^+ e^- \bar{\nu}_e$

Zuschauerprozeβ

Neutrale Stromwechselwirkung





$\Rightarrow N_\nu = 3\ (2 m_{\nu Z})$

1.5.2.7 Prozesse höherer Ordnung in der Störungstheorie: Strahlungskorrekturen

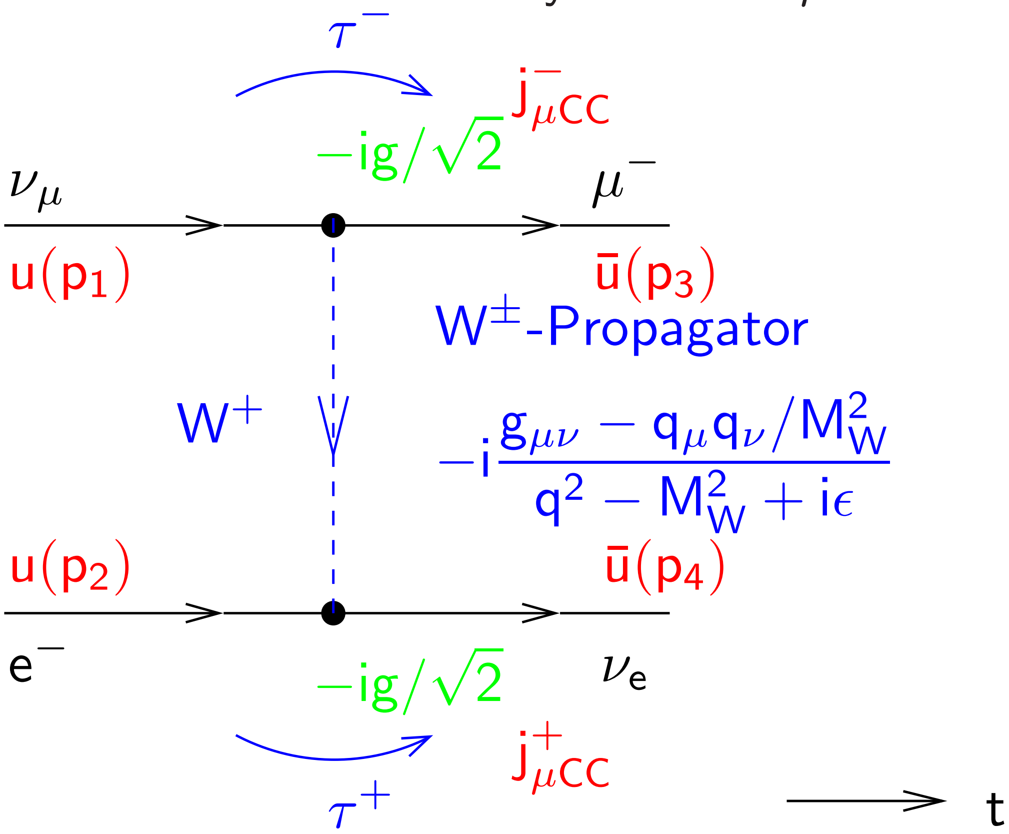
1.5.2.7.1 Elektroschwache Korrekturen

1.5.7.2 QCD-Korrekturen

1.5.3 Prozesse der schwachen Wechselwirkung

Beispiel: Neutrino-Elektron-Streuung:
CC-Prozeß: $\nu_\mu e^- \longrightarrow \mu^- \nu_e$

(verwandt mit dem schwachen Myonzerfall: $\mu^- \to e^- \nu_\mu \overline{\nu_e}$):

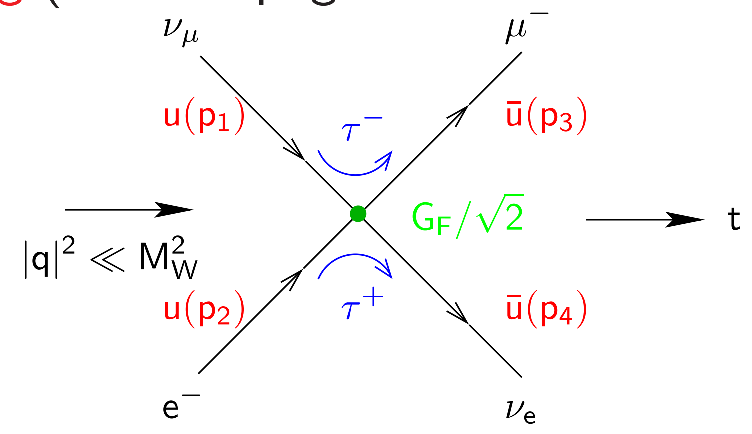


Das Übergangsmatrixelement ist:

$$\mathcal{M} = i\,\frac{g^2}{2} \quad \cdot \quad \left[\overline{u}_\mu(p_3)\gamma^\mu \frac{1-\gamma_5}{2} u_{\nu_\mu}(p_1)\right] \underbrace{\frac{-g_{\mu\nu} + q_\mu q_\nu/M_w^2}{q^2 - M_W^2}}_{\longrightarrow \frac{1}{M_W^2}\ \mathrm{f.}\,|q|^2 \ll M_W^2}$$

$$\cdot \quad \left[\overline{u}_{\nu_e}(p_4)\gamma^\nu \frac{1-\gamma_5}{2} u_e(p_2)\right]$$

geht in der Näherung kleiner Impulsüberträge $|q|^2 \ll M_W^2$ (wie beim Myonzerfall), d.h. sehr kurze Reichweite der Feldquanten, über in das Matrixelement für die Fermi'sche 4-Fermion-Punktwechselwirkung oder schwache Strom-Strom-Wechselwirkung (kein Propagator für Austauschteilchen):



$$\mathcal{M} = i\frac{G_F}{\sqrt{2}}[\overline{u}_\mu(p_3)\gamma^\mu(1-\gamma_5)u_{\nu_\mu}(p_1)][\overline{u}_{\nu_e}(p_4)\gamma_\mu(1-\gamma_5)u_e(p_2)]$$

mit der schwachen Fermi-Kopplungskonstanten G_F.

Präzisionmessung der Fermi-Konstanten aus der Myon-Lebensdauer

$$\tau_\mu = \frac{1}{\Gamma_\mu} = \frac{192\pi^3}{G_F^2 m_\mu^5}:$$

$$\Longrightarrow G_F = (1.16639 \pm 0.00002) \cdot 10^{-5}\ \mathrm{GeV}^{-2}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{g^2}{8M_W^2} = \frac{G_F}{\sqrt{2}}}$$

Erklärt die Schwachheit der schwachen Wechselwirkung bei niedrigen Energien trotz

$$g = \frac{e}{\sin\theta_W} \geq e:$$

Wenn M_W groß ist, ist G_F klein.

Nach der SSB gelten die Beziehungen

$$M_W \equiv \frac{gv}{2} = \left(\frac{g^2\sqrt{2}}{8G_F}\right)^{1/2} = \frac{g}{2}(\sqrt{2}G_F)^{-1/2}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow v &= (\sqrt{2}G_F)^{-1/2} = 246\ \mathrm{GeV} = \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}, \\ \Longrightarrow \Phi_0 &= \frac{v}{\sqrt{2}} = 174\ \mathrm{GeV}, \end{aligned}$$

der Energieskala (d.h. Temperaturskala, $E = kT$) der elektroschwachen Symmetriebrechung (Phasenübergang).

$$\begin{aligned} \Longrightarrow M_W &= \frac{ev}{2\sin\theta_W} \\ M_W^2 &= \frac{e^2}{4\sqrt{2}G_F\sin^2\theta_W} \equiv \frac{\pi\alpha}{\sqrt{2}G_F\sin^2\theta_W} \\ &= \frac{(37.3\ \mathrm{GeV})^2}{\sin^2\theta_W}. \end{aligned}$$

Experimentell (Fermion-Paarproduktion in e^+e^--Vernichtung bei LEP/CERN, νN-Streuung):

$$\begin{aligned} \sin^2\theta_W(E = M_Z) &= 0.23136 \pm 0.00015 \\ \Longrightarrow M_W &\approx 78\ \mathrm{GeV} \\ \Longrightarrow M_Z &= \frac{M_W}{\cos\theta_W} \approx 89\ \mathrm{GeV} \end{aligned}$$

(Vorhersagen der GSW-Theorie in niedgrigster Ordnung der Störungstheorie).

Experimentell (Z- und W-Bosonerzeugung in der e^+e^--Vernichtung bei LEP und SLD und in der $p\bar{p}$-Vernichtung am Tevatron/FNAL):

$$\begin{aligned} M_Z &= 91.1875 \pm 0.0021 \text{ GeV}, \\ M_W &= 80.451 \quad \pm 0.033 \quad \text{GeV}. \end{aligned}$$

Übereinstimmung mit den theoretischen Vorhersagen mit hoher Präzision, wenn elektroschwache Strahlungskorrekturen (Prozesse höherer Ordnung der Störungstheorie der elektroschwachen WW).

$\Longrightarrow$ Die am besten geprüfte physikalische Theorie.

Inputparameter der Theorie:

$$g, \; g', \; v, \; g_f.$$

Alternativ (experimentell am besten bestimmt):

$$\alpha(E = M_Z), \; G_F, \; \sin^2\theta_W \text{ oder } M_Z, \; m_f.$$

Die Masse des Higgs-Bosons

$$M_H = \sqrt{-2\mu^2} = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \cdot v$$

und die Massen der Fermionen

$$m_f = \frac{g_f v}{\sqrt{2}}$$

lassen sich im Standardmodell nicht vorhersagen.

1.5.4 Renormierung der Kopplungskonstanten

Fundamentales Problem bei der störungstheoretischen Berechnung von Observablen in der relativistischen Feldtheorie mit elementaren Punktteilchen als Trägern der Ladungen:

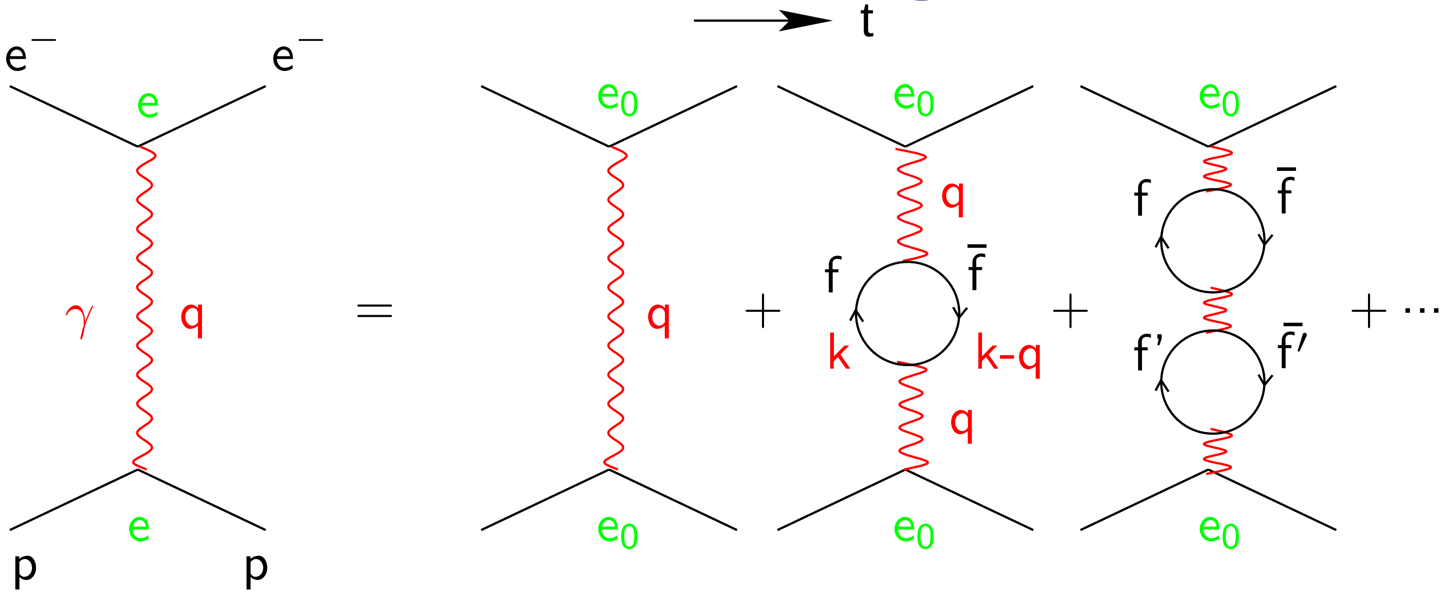
Divergenzen bei hohen Impulsüberträgen $\to \infty$, d.h. kleinen Abständen $\to 0$ in Diagrammen höherer Ordnung (Schleifendiagramme), die über die Prozesse niedrigster Ordnung (Baum-Graphen) hinausgehen (sog. UV-Divergenzen).

Problem behebbar durch das Renormierungsprogramm (effektive Ladungen und Massen in Anwesenheit von quantenmechanischen Vakuumfluktuationen) für renormierbare Feldtheorien.

Erfolg der QED aufgrund ihrer Eigenschaft der Renormierbarkeit.

Auch Nicht-Abelsche Eichtheorien (auch mit SSB) sind renormierbar (t'Hooft, Veltman 1971).

1.5.4.1 Beispiel aus der QED: Vakuumpolarisation bei der e^-p-Coulomb-Streuung



$$\mathcal{M} = \mathcal{M}^{(1)} + \mathcal{M}^{(2)} + \mathcal{M}^{(3)} + \ldots$$

Die QED-Beiträge höherer Ordnung führen zu einer effektiven Modifikation des Photon-Propagators, die die **Form** des Resultats niedrigster Ordnung unverändert läßt:

$$\mathcal{M}^{(1)} = e_0^2 \overline{u}_e(p_3)\gamma^\mu u)e(p_1)\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}\overline{u}_p(p_4)\gamma^\nu u_p(p_2);$$

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^{(2)} &= e_0^2 \overline{u}_e(p_3)\gamma^\mu u)e(p_1)\left[\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}\right.\\ &\cdot\ Q_f^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left(ie_0\gamma^\nu \frac{i(\not{k}+m)}{k^2-m^2} ie_0\gamma^\rho \frac{i(\not{q}-\not{k}+m)}{(q-k)^2-m^2}\right)\\ &\cdot\ \left.\frac{-ig_{\rho\sigma}}{q^2}\right]\overline{u}_p(p_4)\gamma^\sigma u_p(p_2).\end{aligned}$$

(Summe über alle Fermionen und $W^\pm$ in der Schleife, gewichtet mit Ladung und Masse/einfallende Energie).

Das Integral über $d^4k = k^2 dk d\Omega_k dk_0$, $k = |\vec{k}|$, divergiert für $k \to \infty$.

Deshalb willkürliche Integrationsgrenze beim sog. Abschneideparameter $k = \Lambda$.

Dann ist für $q^2 \to 0$ ($|Q_f| = 1$):

$$\mathcal{M}^{(1)} + \mathcal{M}^{(2)} = e_0^2 \left[1 - \frac{\alpha_0}{3\pi} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right)\right] \frac{\mathcal{M}^{(1)}}{e_0^2}.$$

Höhere Schleifenordnungen $n = 2, ..., \infty$ ("leading log"-Strahlungskorrekturen) wiederholen sich in der Korrektur zum Photon-Propagator in einer geometrischen Reihe, die exakt aufsummiert werden kann, d.h.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}^{(n)} &= e_0^2 \left[1 - \frac{\alpha_0}{3\pi} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) - \left(\frac{\alpha_0}{3\pi} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right)\right)^2 + ... \right] \frac{\mathcal{M}^{(1)}}{e_0^2} \\ &= \quad \frac{e_0^2}{1 + \frac{\alpha_0}{3\pi} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right)} \cdot \frac{\mathcal{M}^{(1)}}{e_0^2}\end{aligned}$$

In einer fundamentalen Theorie (gültig für alle $k \to \infty$) soll das Endresultat unabhängig vom Abschneideparameter Λ sein.

Interpretation des Resultats:

Im Streuprozeß wird die effektive (renormierte) elektr. Ladung ($\alpha = e^2/4\pi$)

$$\alpha_R(m_e^2) = \alpha = \frac{\alpha_0}{1 + \frac{\alpha_0}{3\pi}\ln\left(\frac{\Lambda^2}{m_e^2}\right)} =: Z_3 \cdot \alpha_0$$

gemessen.

Für $q^2 \to 0$ ist dies die Elementarladung $e = e_R(m_e^2)$ bzw. die Feinstrukturkonstante $\alpha_R(q^2 = m_e^2) = \alpha \approx \frac{1}{137}$, gemessen in der Coulomb-Streuung bei sehr niedrigen Energien (Atomphysik).

Die (sehr langsame, log) Divergenz in der Renormierungskonstanten Z_3 für $\Lambda \to \infty$ wird durch die "nackte" Ladung e_0 kompensiert.

Für $|q^2| \gg m_e^2$ gilt:

$$\begin{aligned}
\alpha_R(q^2) &= \frac{\alpha_0(\Lambda^2)}{1 + \frac{\alpha_0}{3\pi}\ln\left(\frac{\Lambda^2}{m_e^2}\right) - \frac{\alpha_0}{3\pi}\ln\left(\frac{-q^2}{m_e^2}\right)} \\
&= \frac{\alpha_0(\Lambda^2)}{\left[1 + \frac{\alpha_0}{3\pi}\ln\left(\frac{\Lambda^2}{m_e^2}\right)\right]\left[1 - \frac{\alpha_R(m_e^2)}{3\pi}\ln\left(\frac{-q^2}{m_e^2}\right)\right]} \\
&= \frac{\alpha_R(m_e^2)}{1 - \frac{\alpha_R(m_e^2)}{3\pi}\ln\left(\frac{-q^2}{m_e^2}\right)}.
\end{aligned}$$

Allgemein ist die q^2-Abhängigkeit der el.magn. Kopplung ("laufende" Kopplungskonstante):

$$\begin{aligned}\alpha_R(q^2) &= \frac{\alpha_R(q_0^2)}{1 - \frac{\alpha_R(q_0^2)}{3\pi}\ln\left(\frac{q^2}{q_0^2}\right)}. \\ &\xrightarrow{\text{alle } f} \frac{\alpha_R(q_0^2)}{1 - \sum_f N_C^f Q_f^2 \frac{\alpha_R(q_0^2)}{3\pi}\ln\left(\frac{q^2}{q_0^2}\right)}.\end{aligned}$$

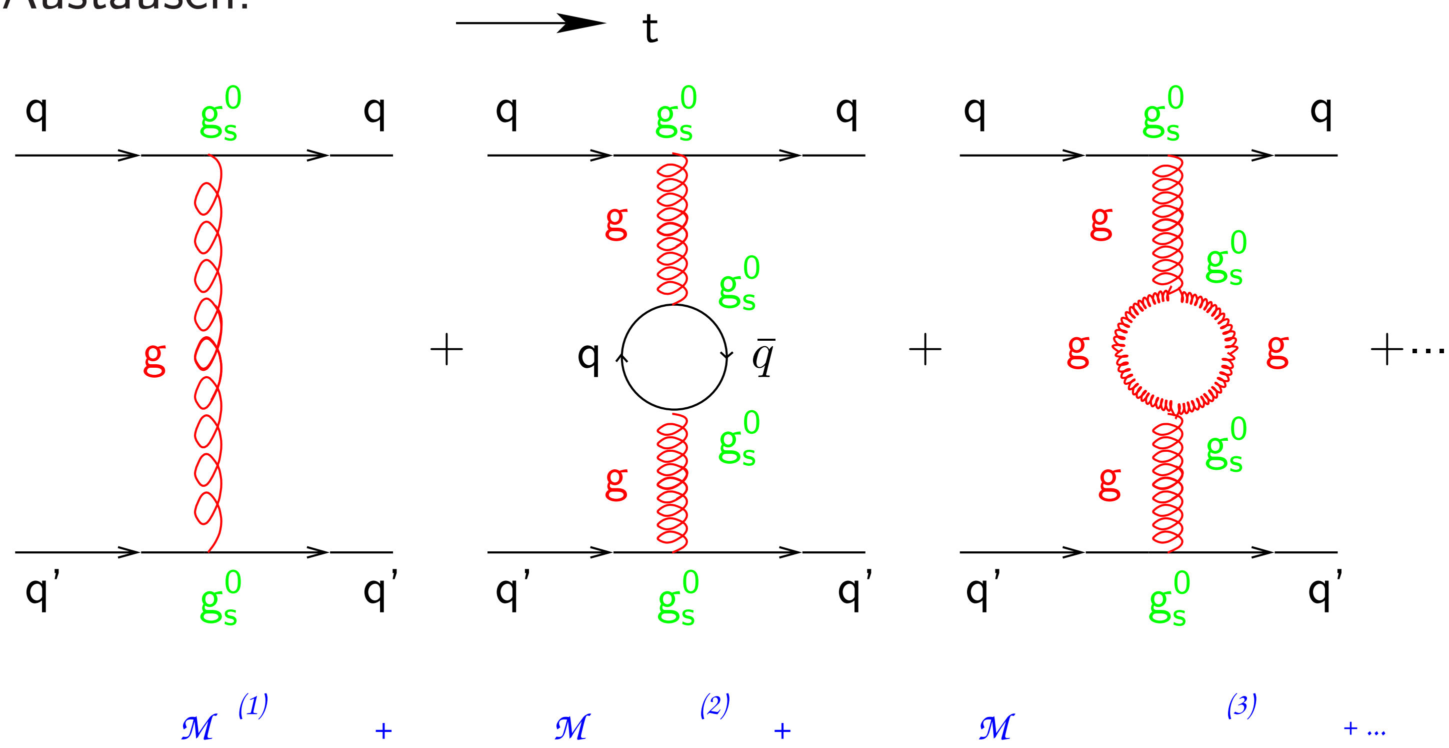
$\Longrightarrow$ Sehr langsame Entwicklung (log): $\alpha(M_Z^2) = 1/128.9$.

Kleiner Beitrag zum Lamb-shift in der Atomphysik.

$\Longrightarrow$ Abschirmung der "nackten" elektrischen Ladung bei großen Abständen (d.h. kleinen Impulsüberträgen) durch die polarisierten Vakuumfluktuationen (virtuelle $f\bar{f}$-Paare mit Lebensdauer $\Delta t \approx \hbar/2m_f$) wie in einem polarisierbaren Medium mit Permeabilität $\varepsilon > 1$.

1.5.4.2 Die starke Kopplungskonstante der QCD

Vakuumpolarisation in der Quark-Quark-Streuung mit Gluon-Austausch:



$\Longrightarrow$ q^2-Abhängigkeit der starken Kopplungskonstante $\alpha_s = \frac{g_s}{4\pi}$:

Beitrag der inneren Quark-Schleifen in Analogie zur QED mit $e^2 \to g_s^2 Sp\left(\frac{\lambda^a}{2}\frac{\lambda^b}{2}\right) = g_s^2 \frac{\delta^{ab}}{2}$:

$$[\alpha_s(q^2)]_{q\bar{q}} = \frac{\alpha_s(q_0^2)}{1 - N_q \frac{\alpha_s(q_0^2)}{6\pi} \ln\left(\frac{q^2}{q_0^2}\right)}.$$

Beitrag der Gluon-Schleifen:

$$[\alpha_s(q^2)]_{gg} = \frac{\alpha_s(q_0^2)}{1 + 11\frac{\alpha_s(q_0^2)}{4\pi}\ln\left(\frac{q^2}{q_0^2}\right)}.$$

Zusammen (additive Beiträge):

$$\begin{aligned}\alpha_s(q^2) &= \frac{\alpha_s(q_0^2)}{1 + (33 - 2N_q)\frac{\alpha_s(q_0^2)}{12\pi}\ln\left(\frac{q^2}{q_0^2}\right)} \\ &= \frac{12\pi}{(33 - 2N_q)\ln\left(\frac{q^2}{\Lambda^2_{QCD}}\right)}\end{aligned}$$

mit der Definition des QCD-Skalenparameters (aus der Störungstheorie) $\Lambda^2_{QCD} = q_0^2 e^{-(C\alpha_s(q_0^2))^{-1}}$ mit $C = (33 - 2N_q)/12\pi$, der experimentell bestimmt werden muß (äquivalent zur Messung von $\alpha_s(q_0^2)$).

(gültig nur für $q^2 \gg \Lambda_{QCD}$: Störungstheorie anwendbar).

$\Longrightarrow$ Für $N_q \leq 16$ nimmt die starke Kopplungskonstante mit wachsendem q^2 schnell ab:

$$\alpha_s(q^2) \mapsto 0 \text{ für } |q^2| \to \infty,$$

$\Longrightarrow$ sog. "asympthotische Freiheit" der Quarks und Gluonen bei hohen Impulsüberträgen bzw. kurzen Abständen, in den farbneutralen Bindungszuständen der Hadronen ($d < 10^{-15}$ m $\approx$ Größe des Protons).

Effekt der überwiegenden Gluon-Vakuumpolarisation (nicht-Abelsche farbgeladene Eichbosonen): Anti-Abschirmung der Farbladung.

Zahlreiche Messungen der starken Kopplungskonstanten (aus hadronischen Wirkungsquerschnitten) ergeben:

$$\alpha_s(M_Z^2) = 0.118 \pm 0.002.$$

$\Longrightarrow$ Bei großen q^2 ist die Störungstheorie in der QCD anwendbar;

im Gegensatz zu kleinen $q^2 \leq \Lambda_{QCD}$ bzw. großen Abständen zwischen den Quarks, bei denen die starke Kopplungskonstante große Werte annimmt, d.h. keine Stöhrungstheorie:

Confinement der Quarks und Gluonen in Hadronen;

Fragmentation von Quarks und Gluonen in farbneutrale Hadronen.